



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

Simulació i visualització gràfica
en problemes de mecànica celeste

Bárbara Llorente Trillo

Director: Antoni Benseny Arcadia

Realitzat a: Departament de Matemàtica

Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 24 de juny de 2014

A Àngeles, per la seva paciència.

Índex

1	Introducció	6
2	Lleis de la Física	7
2.1	Llei de la gravitació	7
2.2	Lleis de Newton	7
2.3	Lleis de Kepler	8
3	El problema dels dos cossos	10
3.1	Equacions del moviment	10
3.2	Reducció al problema de Kepler	12
4	El problema restringit de tres cossos	13
4.1	Formulació i unitats	13
4.1.1	Formulació Hamiltoniana	14
4.2	Coordenades sinòdiques	14
4.2.1	Coordenades cartesianes sinòdiques baricèntriques	14
5	Variables físiques	16
5.1	Energia i moment angular	16
5.1.1	Constant de Jacobi	17
5.2	Punts d'equilibri de Lagrange	18
5.3	Regions de Hill i corbes de velocitat -zero	20
6	Regulació de Levi-Civita	23
6.1	Levi -Civita regularització del cos primari	23
6.2	Levi -Civita regularització del cos secundari	25
7	Manual del programa	27
7.1	Control de la massa	27
7.2	Control de la constant de Jacobi	30
7.3	Interpretació del programa	34
7.4	Programació	35
8	Conclusions	36
	Bibliografia	37

Resum

In this memory be studied the restricted three body problem using tools of numerical calculation, differential equations, physicals and computer. For this, will review concepts of physics, like Newton's laws, the law of universal gravitation and the law of Kepler. Secondly, we discuss the simplest case **the two body problem** and their reduction to the Kepler problem. Thirdly, it will begin to talk about the restricted three bodies problem and arise as the formulation to do the simulation. After, explain some important constants, such as the Jacobi constant, that we find in this problem and also discuss the regulation of Levi-Civita applied to the program to discuss the possible singularities of system of differential equations of vector fields integrated. Finally, explain the application and that is what makes the simulation.

1 Introducció

La idea per fer aquest treball va sorgir quan vaig fer una assignatura optativa a la llicenciatura, Software gràfic, en la que mitjançant la llibreria OpenGL et permetia visualitzar objectes i poder fer per exemple simulació de xocs. Va ser molt interessant, perquè aplicaves algorismes que havies après en altres assignatures com mètodes o càlcul numèric per integrar equacions diferencials i fer cosses reals, com un camp de futbol.

En aquest treball de fi de grau volia fer una simulació per ordinador però que no s'allunyés massa de la rama matemàtica. Una de les rames científiques on s'apliquen directament les matemàtiques és en la física i dintre d'aquesta l'astronomia. És una part de la física que sempre m'agrada on és fàcil trobar algun tema que es pugui implementar. Així va ser com vaig escollir el problema restringit de tres cossos. Per poder realitzar aquest treball s'han hagut d'intersecar temes de física, de càlcul numèric per poder programar-lo, eines d'equacions diferencials i informàtiques.

En aquesta memòria, en primer lloc, es farà un repàs sobre conceptes de la física, com les lleis de Newton, la llei de la gravitació universal o la llei de Kepler. En segon lloc, es parlarà del cas més senzill el problema de dos cossos i la seva reducció al problema de Kepler. En tercer lloc, és començarà a parlar sobre el problema restringit de tres cossos i com sorgeixen les fórmules per poder fer la simulació. Després s'explicaran algunes constants importants, com la constant de Jacobi, que hi trobem en aquest problema i parlarem també de la Regulació de Levi-Civita que s'aplica al programa per tractar les possibles singularitats dels sistemes d'equacions diferencials dels camps vectorials que s'integren. Finalment, s'explicarà el funcionament de l'aplicació i que és el que fa la simulació.

2 Lleis de la Física

2.1 Llei de la gravitació

Dos cossos s'atreuen amb una força directament proporcional al producte de les seves masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e}, \quad (1)$$

on

- $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ és la constant de gravitació,
- \vec{e} és el vector unitari entre la posició dels dos cossos.

2.2 Lleis de Newton

Les lleis de Newton relacionen les forces que els cossos exerceixen entre ells, i també relacionen els canvis en el moviment d'un cos amb les forces que hi actuen, i ens permeten analitzar diversos fenòmens de la mecànica. Les lleis del moviment de Newton són tres principis a partir dels quals s'expliquen la major part dels problemes de la mecànica relatius al moviment dels cossos.

1. Primera llei de Newton o llei de la inèrcia

Un cos en repòs continua en repòs sempre que no hi actuï cap força externa i un cos en moviment continuarà en moviment a una velocitat constant sempre que no hi actuï cap força externa.

2. Segona llei o llei de força

L'acceleració d'un cos és directament proporcional a la força neta que hi actua i inversament proporcional a la seva massa. Per tant,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{neta}}{m}, \quad (2)$$

on $\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F}$

3. Tercera llei de Newton o llei d'acció i reacció

Amb tota acció hi ha sempre una reacció igual i contrària: és a dir, que les accions mútues de dos cossos sempre són iguals i dirigides en sentit oposat.

2.3 Lleis de Kepler

Cap a finals del segle XVI, l'astrònom Tycho Brahe va estudiar els moviments dels planetes i va fer observacions considerablement més exactes que les que s'havien fet anteriorment. Utilitzant les dades de Brahe, Johannes Kepler va descobrir que les trajectòries reals dels planetes al voltant del Sol són el·líptiques, com les que es mostren a la figura següent.

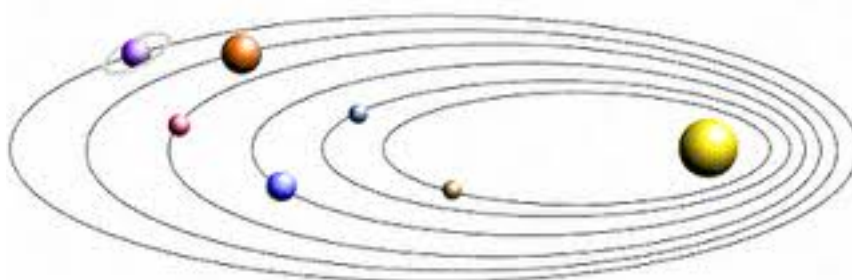


Fig 2.1

També va demostrar que els planetes no es movien a una velocitat constant, sinó que ho feien més ràpidament quan eren a prop del Sol que quan n'eren lluny. Finalment, Kepler va desenvolupar una relació matemàtica precisa entre el període orbital d'un planeta i la seva distància mitjana respecte del Sol.

Kepler va expressar els resultats en tres lleis empíriques del moviment anomenades les tres lleis de Kepler que resumeixen les regularitats observades en el moviment dels planetes i constitueixen la cinemàtica del moviment planetari.

1. Primera llei

Els planetes descriuran òrbites el·líptiques en què el Sol ocupa un dels seus focus.

D'un altre manera, considerem ω l'angle entre el semieix major A_0B_0 i la direcció del raig d'origen OR, on O representa el focus per a qualsevol punt $A(r, \theta)$ sobre l'el·lipse, es té

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad (3)$$

on p és un paràmetre i e l'excentricitat de l'el·lipse.

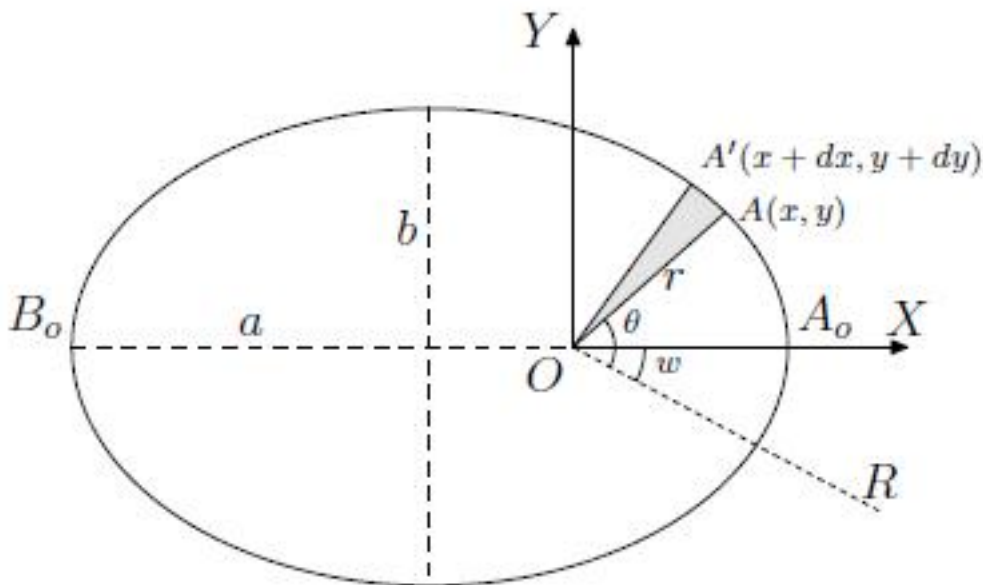


Fig 2.2

2. Segona llei

Les àrees recorregudes en intervals de temps iguals són iguals: la velocitat (areolar) d'escombrat de les àrees és constant.

Si observem la figura 2.2, un punt A descriu una òrbita plana qualsevol $A_0AA'B_0$ i en l'instant t es troba en $A(x, y)$. Al llarg d'un cert temps dt , es trobarà en $A'(x + dx, y + dy)$ i l'àrea dS del triangle elemental AA' serà

$$dS = \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (4)$$

Segons això la llei de Kepler s'expressarà per mitjà de la igualtat

$$r^2 d\theta = 2c dt \quad (5)$$

on c és una constant de proporcionalitat (constants de les àrees), entre l'àrea escombrada pel punt A i el temps emprat en descriure-la.

3. Tercera llei

Els quadrats dels períodes són proporcionals als cubs dels semieixos majors. En forma matemàtica

$$T^2 = k a^3, \quad (6)$$

on k és una constant i a el semieix major.

3 El problema dels dos cossos

El problema dels dos cossos es refereix a la interacció de dues masses en moviment sota l'acció mútua de la gravetat descrita per la llei de la gravitació universal de Newton:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (7)$$

on G és la constant de gravitació universal.

En aquest apartat, derivarem les equacions bàsiques del moviment planetari i resoldrem el problema dels dos cossos, demostrant com sorgeixen les lleis de Kepler.

3.1 Equacions del moviment

Considerem dos cossos de masses m_1 , m_2 que s'atrauen segons les lleis de Newton. Sigui r_1 , r_2 , els vectors de posició dels punts, respecte l'origen O i sigui \vec{r} el vector de la recta que uneix m_1 , m_2 , com es veu en la figura 3.1.

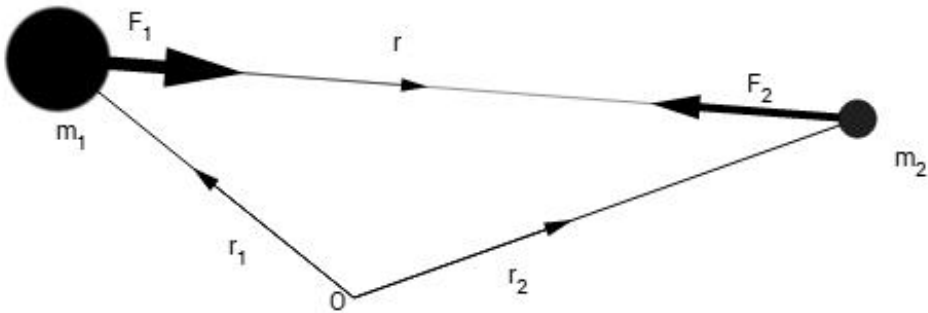


Fig 3.1

El mòdul de la força que m_1 exerceix sobre m_2 , \vec{F}_{12} és el mateix que la força que fa m_2 sobre m_1 , \vec{F}_{21} , és a dir,

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (8)$$

on $r = |\mathbf{r}|$.

Aquestes forces són iguals però en sentit oposat

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \vec{F}_{12} &= m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned} \quad (9)$$

Sumant aquestes equacions, obtenim

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (10)$$

Integrant-la tenim

$$\begin{aligned} m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2 &= A \\ m_1 r_1 + m_2 r_2 &= At + B \end{aligned} \quad (11)$$

on A i B són dos vectors constants.

Recordem que, si r_0 és el vector que defineix la posició del centre de gravetat dels dos cossos, i considerem $M = m_1 + m_2$ es té

$$Mr_0 = m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2 = At + B \quad (12)$$

d'on resulta la següent proposició:

Proposició 3.1 *El centre de gravetat de dos cossos, que s'atrauen segons la llei de Newton, es mou amb moviment rectilini i uniforme.*

Estudiem ara el moviment relatiu del cos m_2 respecte m_1 . Aquest moviment quedarà definit

$$\mathbf{r} = r_2 - r_1 \quad (13)$$

i derivant dos cops respecte al temps, ens porta a la fórmula

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 \quad (14)$$

Dividim les igualtats (7), respectivament per m_1 , m_2 , i restem els resultats obtenim

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{k^2 \mathbf{r}}{r^3} \quad (15)$$

on la constant k ve donada per l'expressió

$$\mu = k^2 = GM = G(m_1 + m_2) \quad (16)$$

L'equació (14) és la que regeix el moviment relatiu de dos cossos atrets segons les lleis de Newton. Multiplicant vectorialment els dos membres d'aquesta igualtat per \mathbf{r} , obtenim

$$\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (17)$$

on

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (18)$$

Aquesta igualtat pot ser integrada de la forma

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = 2\mathbf{c} \quad (19)$$

On $2c$ és el vector constant que resulta de la integració. Així s'obté, sota una nova formulació, la llei de les àrees prevista per la primera llei de Kepler.

Per una altra part, multiplicant escalarment (18) per \mathbf{r} , obtindrem la igualtat

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (20)$$

Resumint, les igualtats (18) i (19) ens demostren la proposició següent:

Proposició 3.2 *El moviment relatiu a m_2 respecte m_1 , es troba en un pla i compleix la llei de les àrees.*

3.2 Reducció al problema de Kepler

En el problema de dos cossos, que ja hem comentat, la situació que tenim és que hi ha dos masses que s'atreuen mutuament per la força de la gravetat, i les equacions del moviment són les següents:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{\mathbf{r}} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (21)$$

Com estem considerant com a origen el centre de masses, que és un punt fix, podem considerar el sistema inercial sobre aquest origen. Aleshores, considerem la recta que uneix les dues masses, trobem un nou sistema en el que els dos cossos es mouen com si fossin únic cos, i per tant estem agafant com a referència la recta que uneix els dos cossos.

Llavors, l'equació del moviment del problema de Kepler és

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (22)$$

4 El problema restringit de tres cossos

Aquest és un cas particular del problema dels tres cossos. Si dos dels cossos es mouen sense ser influenciats pel tercer cos, l'estudi del moviment d'aquest tercer cos sota l'acció dels altres dos s'anomena problema restringit de tres cossos.

En aquest apartat descriurem les seves equacions del moviment en el cas que els dos cossos es mouen en òrbites circulars i el tercer cos es mou en el mateix pla que els altres dos.

4.1 Formulació i unitats

Considerem el moviment del cos amb massa negligible sota la influència gravitacional de les altres masses m_1 i m_2 .

Suposarem que les dues masses tenen òrbites circulars respecte a un centre de masses comú i les forces exercides de la partícula no afecten a les dues masses.

El problema restringit de tres cossos en el cas pla i circular analitza el moviment d'un tercer cos sota l'acció gravitacional dels altres dos cossos, sense pertorbar les òrbites circulars i restringit a avançar al seu mateix pla.

La tercera llei de Kepler relaciona el semieix a de l'òrbita el·líptica (radi en el cas circular) en el problema de Kepler amb la velocitat angular per al cas circular, n :

$$n^2 a^3 = G(m_1 + m_2) \quad (23)$$

on $n = \frac{2\pi}{T}$ i T és el període de la òrbita.

Considerem les masses del primari i secundari $m_1 = 1 - m$ i $m_2 = m$ amb $0 \leq m \leq 0.5$. La distància entre els dos cossos és 1 i la velocitat angular també. Els temps que triguen en donar una volta sencera al voltant del centre de masses és 2π .

El moviment del tercer cos correspon al moviment sota el potencial gravitacional

$$V = -\frac{1-m}{R_1(t)} - \frac{m}{R_2(t)}, \quad (24)$$

on $R_1(t)$, $R_2(t)$ són les distàncies del tercer cos al primari i secundari respectivament.

Utilitzarem la formulació hamiltoniana per obtenir les equacions diferencials.

4.1.1 Formulació Hamiltoniana

El flux hamiltonià associat a la funció hamiltoniana $H(Q, P, t)$ depèn de la posició Q i del moment P avaluat al mateix temps, es dona pel sistema de equacions diferencial de primer ordre següent:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q}\end{aligned}\quad (25)$$

La transformació canònica entre els diferents sistemes Hamiltonians es pot assolir per la funció generatiu. Agafant $H(Q, P, t)$ com a funció de posicions Q i el moment P , per a cada transformació de posicions $q = q(Q, t)$ deu ser entès com a transformació canònica entre les posicions del moment (Q, P) i les posicions transformades i el moment (q, p) considerant la funció generatiu

$$W(Q, p, t) = q(Q, t)p \quad (26)$$

Els moment transformats $p = p(Q, P; t)$ s'obtenen invertint l'expressió lineal del moment P respecte el moment transformat p :

$$P = \frac{\partial W(Q, p, t)}{\partial p} \quad (27)$$

La funció transformada hamiltoniana s'obté sumant termes si la funció generatriu depèn de t :

$$h(q, p, t) = H(Q(q, t), P(q, p, t), t) + \frac{\partial W(Q, p, t)}{\partial t} \quad (28)$$

El flux de la transformació hamiltoniana és ara

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}. \quad (29)$$

4.2 Coordenades sinòdiques

4.2.1 Coordenades cartesianes sinòdiques baricèntriques

El canvi desde les coordenades sidèriques es dóna per una rotació d'angle $-t$, que fixat els cossos primari i secundari en les posicions inicials $(m, 0)$, $(m - 1, 0)$ respectivament:

$$\begin{aligned}x &= X \cos t + Y \sin t \\ y &= -X \sin t + Y \cos t\end{aligned}\quad (30)$$

La funció generatriu corresponent és

$$W(X, Y, p_x, p_y, t) = (X \cos t + Y \sin t)p_x + (-X \sin t + Y \cos t)p_y \quad (31)$$

i es té la relació següent entre el moment sideral i sinòdic:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W(X, Y, p_x, p_y, t)}{\partial X} = p_x \cos t - p_y \sin t, \\ p_y &= \frac{\partial W(X, Y, p_x, p_y, t)}{\partial Y} = p_x \sin t - p_y \cos t \end{aligned} \quad (32)$$

i sumant aquests termes la funció hamiltoniana resulta:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - (xp_y - yp_x) + V(x, y) \quad (33)$$

on el potencial gravitacional és

$$V(x, y) = -(1 - m)\frac{1}{r_1} - m\frac{1}{r_2} \quad (34)$$

i

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - m)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - m + 1)^2 + y^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Llavors les equacions hamiltonianes pel moviment del tercer cos respecte al temps són

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y, & \dot{p}_x &= p_y - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = p_y - (1 - m)\frac{x - m}{r_1^3} - m\frac{x - m + 1}{r_2^3} \\ \dot{y} &= p_y + x, & \dot{p}_y &= -p_x - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -p_x - (1 - m)\frac{y}{r_1^3} - m\frac{y}{r_2^3} \end{aligned} \quad (36)$$

Derivant un altre cop:

$$\ddot{x} = +2\dot{y} - x - (1 - m)\frac{x - m}{r_1^3} - m\frac{x - m + 1}{r_2^3} \quad (37)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} - y - (1 - m)\frac{y}{r_1^3} - m\frac{y}{r_2^3} \quad (38)$$

on els últims termes estan representats per les components cartesianes de la força gravitacional i els termes $(\dot{y}, -2\dot{x})$ i (x, y) per a la component cartesiàna de la força centrífuga.

5 Variables físiques

5.1 Energia i moment angular

L'energia ens dona informació de com els objectes s'apropen al sistema inercial o s'allunyen. El total de la energia E és la suma de l'energia cinètica T i l'energia potencial V

$$E = T + V.$$

En el nostre sistema de referència l'energia cinètica és:

$$T = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) \quad (39)$$

El moment angular K es pot expressar en coordenades canòniques cartesianes sinòdiques com:

$$K = xp_y - yp_x = (x_1 + m) p_{y_1} - y_1 p_{x_1} = (x_2 - m + 1) p_{y_2} - y_2 p_{x_2} \quad (40)$$

La funció hamiltoniana H en coordenades sinòdiques és la diferència entre l'energia sideral i el moment angular sideral del baricentre i això es coneix per ser independent del temps. Per tant, la funció hamiltoniana és una integral primera del sistema d'equacions diferencials hamiltoniana associat.

Quan $E < 0$ el tercer cos s'apropa al sistema

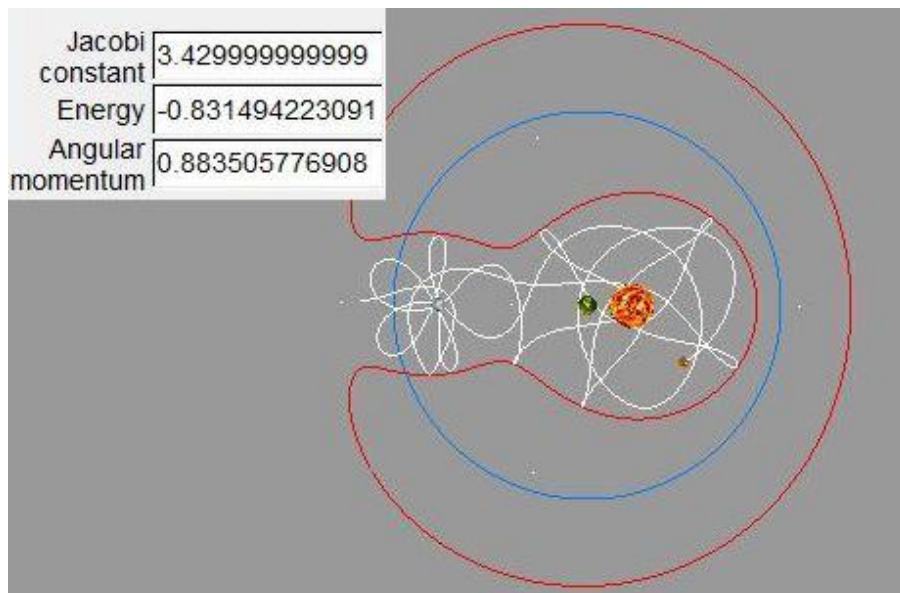


Fig. 5.1

i quan $E > 0$ el tercer cos s'allunya del sistema.

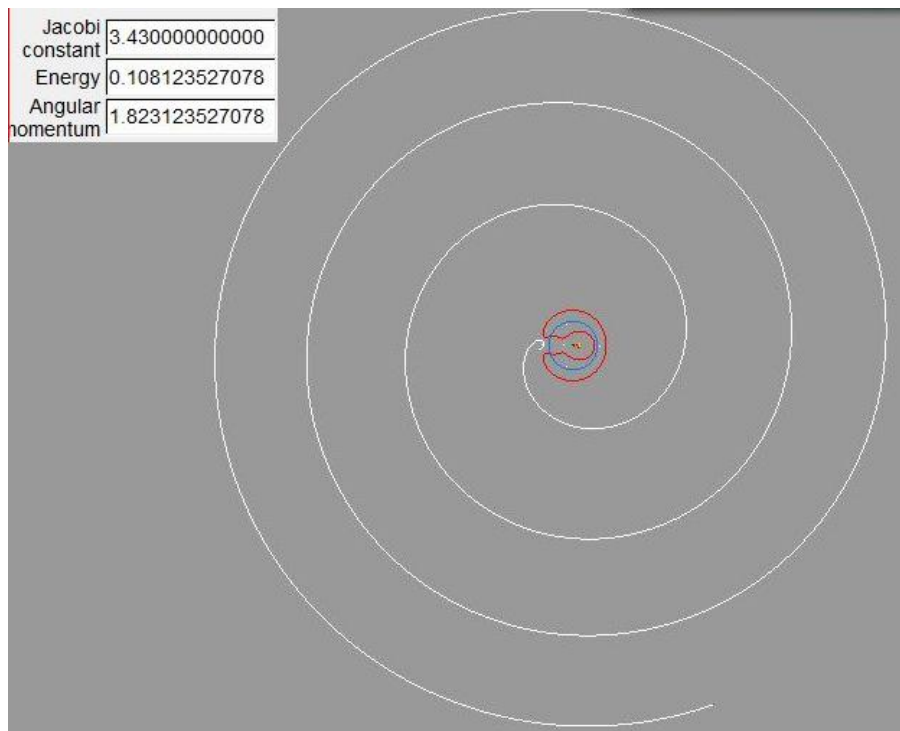


Fig. 5.2

5.1.1 Constant de Jacobi

La integral de Jacobi o constant de Jacobi es defineix per

$$C = -2H \quad (41)$$

que és dues vegades la diferència entre el moment angular sideral del baricentre i l'energia sideral

$$2(K - E) = 2(K - T - V) = C \quad (42)$$

i es manté constant al llarg de les òrbites del flux sinòdic hamiltonià.

Conseqüències de la conservació de la constant de Jacobi:

1. L'existència i l'estabilitat lineal de punts d'equilibri per als diferents valors de la constant de Jacobi.
2. Límits de zones restringides del moviment caracteritzats com corbes de velocitat zero per a diferents valors de C.
3. Les diferents regions qualitatives del moviment són descrites pels diferents valors de C.

5.2 Punts d'equilibri de Lagrange

Els punts de Lagrange o punts L són les cinc posicions en un sistema orbital on un objecte petit, només afectat per la gravetat, pot estar teòricament estacionat respecte els dos objectes més grans.

Aquests punts marquen les posicions on l'atracció gravitatoria combinada de les dues masses grans proporciona la força centrípeta necessària per rotar sincrònicament amb la menor d'elles. En altres paraules, els punts de Lagrange són les solucions estacionàries del problema dels tres cossos restringits a òrbites circulars.

Els cinc punts L es defineixen de la següent manera:

1. *El punt L_1*

El punt L_1 es troba entre les dues masses grans m_1 i m_2 en la mateixa recta que els uneix. En aquest punt es compensen les forces d'atracció dels dos cossos més grans.

2. *El punt L_2*

El punt L_2 està en la línia definida per les dues masses grans m_1 i m_2 , i més enllà de la més petita. En aquest punt l'atracció gravitatoria dels dos cossos majors compensa la força centrípeta causada per la menor.

3. *El punt L_3*

El punt L_3 està en la línia definida per les dos masses grans m_1 i m_2 , i més enllà de la més gran.

4. *El punt L_4 i L_5*

Els punts $L_{4,5}$ es troben en els vèrtexs dels triangles equilàters on la base comú és la recta que uneix a les dues masses, de manera que el punt L_4 precedeix al cos petit en un angle de 60° vist desde la massa gran, mentre que L_5 gira darrere del cos petit amb un radi més gran i un retard de 60° vist desde la massa més gran. Aquest dos punts, igual que la massa menor, no giren sobre el cos més gran sino sobre el baricentre dels dos cossos.

En la següent figura observem la posició dels punts de Lagrange

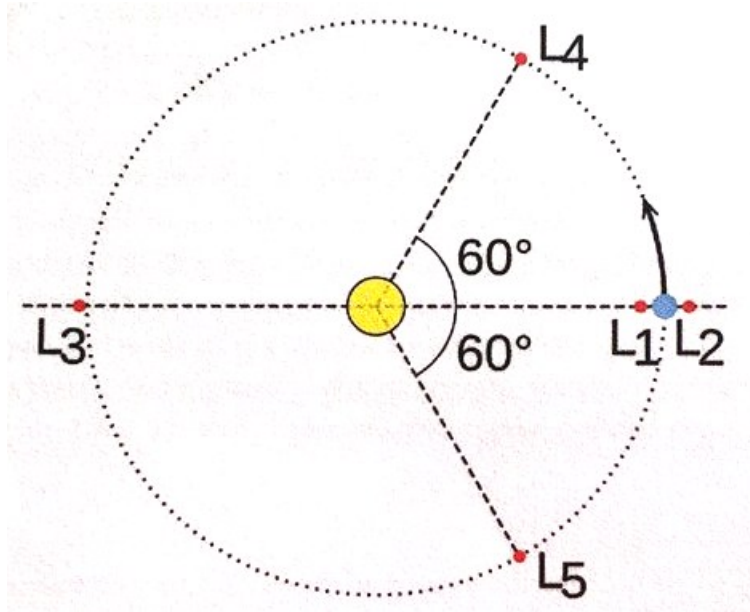


Fig. 5.3

A partir del camp vectorial, podem saber les solucions estacionàries de les equacions diferencials. Sabem que el camp hamiltonià s'esvaeix en els punts d'equilibri anomenats punts de Lagrange, que verifiquen

$$x - (1 - m) \frac{x - m}{r_1^3} - m \frac{x - m + 1}{r_2^3} = 0 \quad (43)$$

$$y - (1 - m) \frac{y}{r_1^3} - m \frac{y}{r_2^3} = 0 \quad (44)$$

Aquestes equacions d'equilibri corresponen a la condició que la força d'atracció gravitacional és contrarestatada per la força centrífuga (x, y) , degut al sistema de rotació sinòdic de la velocitat angular unitària respecte la inercial.

Amb aquestes equacions trobem tres punts d'equilibris en l'eix d'abscisses: L_1, L_2, L_3 amb equacions

$$\begin{aligned} x - (1 - m) \frac{\sigma(x-m)}{(x-m)^2} - m \frac{\sigma(x-m+1)}{(x-m+1)^2} &= 0 \\ x(x-m)^2(x-m+1)^2 - (1-m)\sigma(x-m)(x-m+1)^2 \\ - m\sigma(x-m+1)(x-m)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

on σ és la funció signe.

Canviem de variable $a = x - m$, les posicions dels punts de Lagrange són:

1. $L_1 = (a_1 + m, 0)$ si $-1 < a_1 < 0$
2. $L_2 = (a_2 + m, 0)$ si $-1 < a_2 < 0$
3. $L_3 = (a_3 + m, 0)$ si $0 < a_3$

i les equacions corresponents

1. $(a_1 + m)^2 a_1^2 (a_1 + 1)^2 + (1 - m) (a_1 + 1)^2 - m a_1^2 = 0,$
2. $(a_2 + m)^2 a_2^2 (a_2 + 1)^2 + (1 - m) (a_2 + 1)^2 + m a_2^2 = 0,$
3. $(a_3 + m)^2 a_3^2 (a_3 + 1)^3 - (1 - m) (a_3 + 1)^2 - m a_3^2 = 0$

Els dos punts d'equilibri que falten són L_4 i L_5 que formen un triangle equilàter amb els dos cossos.

4. $L_4 = \left(m - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
5. $L_5 = \left(m - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Les corresponents constant de Jacobi per als punts de Lagrange $L_2, L_3, L_{4,5}$ són:

- $C_2 = (a_2 + m)^2 - 2(a_2 + m)$
- $C_3 = (a_3 + m)^2 - 2(a_3 + m)$
- $C_{4,5} = 3 - m(1 - m)$

5.3 Regions de Hill i corbes de velocitat -zero

Escrivim ara la integral de Jacobi en termes de posicions i velocitats, substituint l'expressió del moment

$$\begin{aligned} p_x &= \dot{x} - y \\ p_y &= \dot{y} + x \end{aligned} \tag{46}$$

en la funció hamiltoniana tenim

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + V(x, y) = -\frac{C}{2} \tag{47}$$

això és

$$(x^2 + y^2) + (1 - m) \frac{2}{r_1} + m \frac{2}{r_2} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C \tag{48}$$

o també podem posar

$$(1 - m) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + m \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - m(1 - m) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C \quad (49)$$

Com són corbes de velocitat zero queda clar que \dot{x} i \dot{y} són nul·les, i per tant el moviment està restringit per les regions de Hill

$$(1 - m) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + m \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - m(1 - m) \geq C \quad (50)$$

delimitades per l'equació de les corbes de velocitat - zero

$$(1 - m) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + m \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - m(1 - m) = C \quad (51)$$

Les corbes de velocitat - zero les podem trobar a partir d'un punt inicial mitjançant la integració numèrica del sistema d'equacions diferencials en paràmetre arc s (mètode Davidenko).

Tenim l'equació

$$F(x(s), y(s)) = (1 - m) \left(r_1^2(s) + \frac{2}{r_1(s)} \right) + m \left(r_2^2(s) + \frac{2}{r_2(s)} \right) - m(1 - m) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - C = 0 \quad (52)$$

i derivant-la respecte s obtenim:

$$\begin{aligned} F_x(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} + F_y(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} &= 0 \\ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (53)$$

El sistema d'equacions diferencials que s'han d'integrar és llavors:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{F_y(x, y)}{(F_x^2 + F_y^2)(x, y)}, \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{F_x(x, y)}{(F_x^2 + F_y^2)(x, y)}, \end{aligned} \quad (54)$$

on

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 2(1 - m)(x - m) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right) + 2m(x - m + 1) \left(1 - \frac{1}{r_2^3} \right) \\ F_y(x, y) &= 2(1 - m)y \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right) + 2my \left(1 - \frac{1}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Sabem que les corbes de velocitat zero verifiquen l'equació

$$(1 - m) \left(r_1^2 + \frac{2}{r_1} \right) + m \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - m(1 - m) \geq C \quad (56)$$

on C és la Constant de Jacobi que determina les corbes de velocitat - zero.

En una primera aparició aquestes corbes són els punts L_4 i L_5 corresponents als valors $C_{45} = 3 - m(1 - m)$.

Si C es troba entre C_{45} i C_3 hi ha dos corbes tancades de velocitat zero disjundes entre elles que contenen els punts L_4 i L_5 , respectivament, on són regions prohibides i simètriques respecte l'eix d'abcisses, fins que toquen al punt L_3 i es converteixen en una sola corba i per tant una única regió.

Si C es troba entre C_3 i C_2 el resultat és una corba de velocitat zero tancada que conté els punts L_4 , L_5 , L_3 i és una única regió prohibida fins que arriba a L_2 més enllà del cos secundari.

Si C es troba entre C_2 i C_1 , aleshores hi ha dos corbes tancades de velocitat - zero, una exterior que continua creixent i permet moviments exteriors i una interior que continua la reducció i permet moviments en una regió que conté dos cossos primaris i secundaris. Quan aquesta corba interior arriba a L_1 és divideix en dos.

A partir de C_1 hi ha dos corbes de velocitat - zero internes una al voltant del cos primari i una altra al voltant del cos secundari.

6 Regulació de Levi-Civita

La regulació de Levi-Civita s'utilitza per canviar de coordenades i de temps amb la fi d'evitar la singularitat que produeixen les col·lisions.

La transformació de les coordenades de posició consisteix en la transformació de les coordenades primaricèntriques i secundaricèntriques cartesianes segons:

$$(x_k + iy_k)^2 = (\xi_k + i\eta_k)^2 \quad (k = 1, 2), \quad (57)$$

o, utilitzant les coordenades polars:

$$r_k \exp^{i\theta_k} = \rho_k^2 \exp^{2i\eta_k} \quad (k = 1, 2), \quad (58)$$

La variable independent temps t es canvia a la nova variable independent τ que compleix:

$$\frac{dt}{d\tau} = 4r_k = 4(\xi_k^2 + \eta_k^2) \quad (k = 1, 2). \quad (59)$$

Aquest capítol conté les seccions dedicades a la regularització de cada col·lisió: la col·lisió amb el cos primari i amb el cos secundari en coordenades Cartesianes, i s'expressa la funció hamiltoniana expandida i els moments que permeten escriure el sistema hamiltonià regularitzat del moviment del tercer cos.

La funció hamiltoniana expandida s'obté per a cada valor del hamiltonià $\bar{H} = -\frac{C}{2}$ i permet incorporar la transformació regularitzada al temps τ :

$$\mathbf{H} = \frac{dt}{d\tau} (H - \bar{H}) \quad (60)$$

on \bar{H} es tracta com a el moment conjugat de la variable t .

6.1 Levi -Civita regularització del cos primari

Considerarem la regulació de Levi-Civita per treure la singularitat en la col·lisió amb el cos primari en coordenades cartesianes sinòdiques.

El canvi de les coordenades Cartesianes del primaricentre per regularitzar-les és el següent:

$$x_1 + iy_1 = (\xi_1 + i\eta_1)^2 = (\xi_1^2 - \eta_1^2) + i(2\xi_1\eta_1) \quad (61)$$

que ens porta a la funció generatriu:

$$W(x_1, y_1, p_{\xi_1}, p_{\eta_1}) = \xi_1(x_1, y_1)p_{\xi_1} + \eta_1(x_1, y_1)p_{\eta_1} \quad (62)$$

i ens porta a la següent relació del moment de les coordenades cartesianes del primari amb regularització:

$$\begin{aligned}
p_{x_1} &= \frac{1}{2(\xi_1^2 + \eta_1^2)} (\xi_1 p_{\xi_1} - \eta_1 p_{\eta_1}) \\
p_{y_1} &= \frac{1}{2(\xi_1^2 + \eta_1^2)} (\eta_1 p_{\xi_1} + \xi_1 p_{\eta_1}) \\
p_{\xi_1} &= 2 (\xi_1 p_{x_1} + \eta_1 p_{y_1}) \\
p_{\eta_1} &= 2 (-\eta_1 p_{x_1} + \xi_1 p_{y_1})
\end{aligned} \tag{63}$$

i la funció hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H(\xi_1, \eta_1; p_{\xi_1}, p_{\eta_1}) &= \frac{1}{8(\xi_1^2 + \eta_1^2)} (p_{\xi_1}^2 + p_{\eta_1}^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\xi_1 p_{\eta_1} - \eta_1 p_{\xi_1}) - m \frac{1}{2(\xi_1^2 + \eta_1^2)} (\eta_1 p_{\xi_1} + \xi_1 p_{\eta_1}) \\
&\quad - (1 - m) \frac{1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)} - m \frac{1}{\left((\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 + 2(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 1 \right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{64}$$

Observació 1 *El que estem fent és que quan el cos va a col·lisionar amb el cos primari, a partir d'aquell moment fem un canvi de variables i ho mirem més lent, és a dir, que també canviem el temps t pel temps τ .*

La regularització del temps és:

$$\frac{dt}{d\tau} = 4 (\xi_1^2 + \eta_1^2) \tag{65}$$

que permet completar la regularització en la funció hamiltoniana estendida

$$\begin{aligned}
H(\xi_1, \eta_1, t; p_{\xi_1}, p_{\eta_1}, \bar{H}) &= \frac{1}{2} (p_{\xi_1}^2 + p_{\eta_1}^2) \\
&\quad - 4 (\xi_1^2 + \eta_1^2) \left(\bar{H} + \frac{1}{2} (\eta_1 p_{\xi_1} + \xi_1 p_{\eta_1}) \right) \\
&\quad - 2m (\eta_1 p_{\xi_1} + \xi_1 p_{\eta_1}) - 4(1 - m) \\
&\quad + \nu_2(\xi_1, \eta_1) = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

on el potencial, a causa del secundari centre ha estat regularitzat per $-4(1 - m)$

$$\nu_2(\xi_1, \eta_1) = -m \frac{4(\xi_1^2 + \eta_1^2)}{\left((\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 + 2(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{67}$$

La regularització de les equacions hamiltonianes respecte el temps és

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= p_{\xi_1} + 2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 - m) \eta_1 \\
\eta_1' &= p_{\eta_1} + 2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 + m) \xi_1 \\
p_{\xi_1}' &= 8\xi_1 \left(\bar{H} + \frac{1}{2} (\xi_1 p_{\eta_1} - \eta_1 p_{\xi_1}) \right) + 2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 + m) p_{\eta_1} - \frac{\partial \nu_2}{\partial \xi_1} \\
p_{\eta_1}' &= 8\eta_1 \left(\bar{H} + \frac{1}{2} (\xi_1 p_{\eta_1} - \eta_1 p_{\xi_1}) \right) - 2 (\xi_1^2 + \eta_1^2 - m) p_{\xi_1} - \frac{\partial \nu_2}{\partial \eta_1}
\end{aligned} \tag{68}$$

on ' vol dir la derivada parcial respecte i

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_2(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} &= -m \frac{8\xi_1(1+\xi_1^2-3\eta_1^2)}{\left(\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)^2+2\left(\xi_1^2-\eta_1^2\right)+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial \nu_2(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1} &= -m \frac{8\eta_1(1+3\xi_1^2-\eta_1^2)}{\left(\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)^2+2\left(\xi_1^2-\eta_1^2\right)+1\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (69)$$

6.2 Levi -Civita regularització del cos secundari

Considerarem la regulació de Levi-Civita per treure la singularitat en la col·lisió amb el cos secundari en Coordenades cartesianes sinòdiques.

El canvi de les coordenades Cartesianes del secundaricentre per regularitzar-les és el següent:

$$x_2 + iy_2 = (\xi_2 + i\eta_2)^2 = (\xi_2^2 - \eta_2^2) + i(2\xi_2\eta_2) \quad (70)$$

que es porta a a funció generatriu:

$$W(x_2, y_2, p_{\xi_2}, p_{\eta_2}) = \xi_2(x_2, y_2)p_{\xi_2} + \eta_2(x_2, y_2)p_{\eta_2} \quad (71)$$

i obtenim la següent relació del moment de les coordenades cartesianes del secundari-centre amb regularització:

$$\begin{aligned}p_{x_2} &= \frac{1}{2(\xi_2^2+\eta_2^2)} (\xi_2 p_{\xi_2} - \eta_2 p_{\eta_2}) \\ p_{y_2} &= \frac{1}{2(\xi_2^2+\eta_2^2)} (\eta_2 p_{\xi_2} + \xi_2 p_{\eta_2}) \\ p_{\xi_2} &= 2(\xi_2 p_{x_2} + \eta_2 p_{y_2}) \\ p_{\eta_2} &= 2(-\eta_2 p_{x_2} + \xi_2 p_{y_2})\end{aligned}\quad (72)$$

i la funció hamiltoniana

$$\begin{aligned}H(\xi_2, \eta_2; p_{\xi_2}, p_{\eta_2}) &= \frac{1}{8(\xi_2^2+\eta_2^2)} (p_{\xi_2}^2 + p_{\eta_2}^2) \\ &- \frac{1}{2} (\xi_2 p_{\eta_2} - \eta_2 p_{\xi_2}) \\ &- (m-1) \frac{1}{2(\xi_2^2+\eta_2^2)} (\eta_2 p_{\xi_2} + \xi_2 p_{\eta_2}) - (1-m) \frac{1}{(\xi_2^2+\eta_2^2)} \\ &- m \frac{1}{\left(\left(\xi_2^2+\eta_2^2\right)^2+2\left(\xi_2^2-\eta_2^2\right)+1\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (73)$$

Observació 2 *El que estem fent és que quan el cos va a col·lisionar amb el cos secundari, a partir d'aquell moment fem un canvi de variables i ho mirem més lent, és a dir, que també canviem el temps t pel temps τ .*

La regularització del temps és:

$$\frac{dt}{d\tau} = 4 \left(\xi_2^2 + \eta_2^2 \right) \quad (74)$$

que permet completar la regularització en la funció hamiltoniana estendida

$$\begin{aligned} H(\xi_2, \eta_2, t; p_{\xi_2}, p_{\eta_2}, \bar{H}) &= \frac{1}{2} (p_{\xi_2}^2 + p_{\eta_2}^2) - 4 (\xi_2^2 + \eta_2^2) \left(\bar{H} + \frac{1}{2} (\eta_2 p_{\xi_2} + \xi_2 p_{\eta_2}) \right) \\ -2(m-1)(\eta_2 p_{\xi_2} + \xi_2 p_{\eta_2}) - 4m + \nu_1(\xi_2, \eta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

on el potencial, a causa del primari centre ha estat regularitzat per $-4m$

$$\nu_1(\xi_2, \eta_2) = -(1-m) \frac{4(\xi_2^2 + \eta_2^2)}{\left((\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 - 2(\xi_2^2 - \eta_2^2) + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (76)$$

La regularització de les equacions hamiltonianes respecte el temps és

$$\begin{aligned} \xi_2' &= p_{\xi_2} + 2(\xi_2^2 + \eta_2^2 - m + 1)\eta_2 \\ \eta_2' &= p_{\eta_2} + 2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + m + 1)\xi_2 \\ p_{\xi_2}' &= 8\xi_2 \left(\bar{H} + \frac{1}{2}(\xi_2 p_{\eta_2} - \eta_2 p_{\xi_2}) \right) + 2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + m)p_{\eta_2} - \frac{\partial \nu_1}{\partial \xi_2} \\ p_{\eta_2}' &= 8\eta_2 \left(\bar{H} + \frac{1}{2}(\xi_2 p_{\eta_2} - \eta_2 p_{\xi_2}) \right) - 2(\xi_2^2 + \eta_2^2 - m)p_{\xi_2} - \frac{\partial \nu_1}{\partial \eta_2} \end{aligned} \quad (77)$$

on ' vol dir la derivada parcial respecte τ i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1(\xi_2, \eta_2)}{\partial \xi_2} &= -(1-m) \frac{8\xi_2(1-\xi_2^2+3\eta_2^2)}{\left((\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 - 2(\xi_2^2 - \eta_2^2) + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial \nu_1(\xi_2, \eta_2)}{\partial \eta_2} &= -(1-m) \frac{8\eta_2(1-3\xi_2^2+\eta_2^2)}{\left((\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 - 2(\xi_2^2 - \eta_2^2) + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (78)$$

7 Manual del programa

L'aplicació de la simulació del problema restringit de tres cossos té una part on trobem variables com l'energia, la velocitat, el moment angular i constants com la de Jacobi i la massa; i una altra part on podem visualitzar la situació del problema depenen de les constants. En la figura següent podem veure l'aplicació:

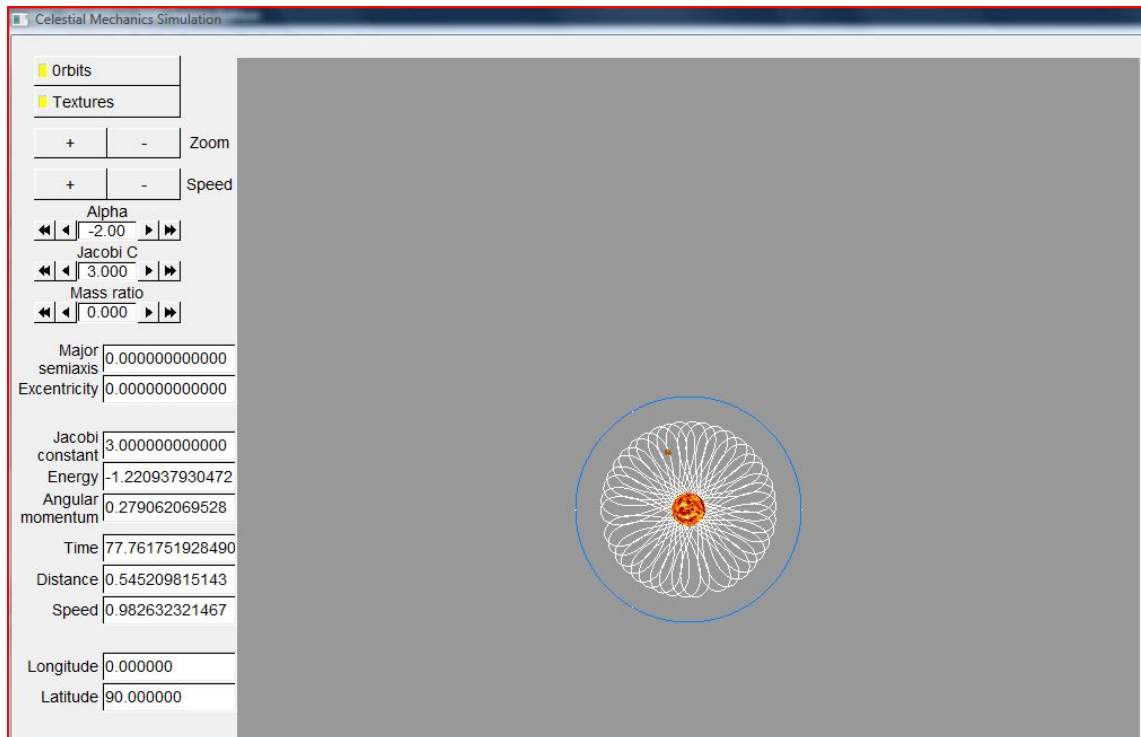


Fig. 7.1

7.1 Control de la massa

Tal i com veiem en la figura 7.1, podem moure la massa i llavors el que fa és desplaçar el centre de masses, aleshores tant els cossos com els punts d'equilibri es veuen afectats. La constant de Jacobi es pot canviar i modificarà les corbes de velocitat zero.

En les següents imatges podem observar varies situacions depenen de la massa que li donem si el valor de la constan de Jacobi és 3.

(a) Massa=0.00

En aquest cas no hi ha corbes de velocitat zero.

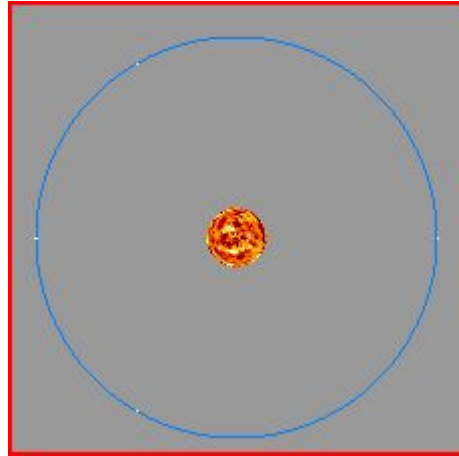


Fig. 7.2

(b) Massa=0.10

Al augmentar una mica la massa es desplaça el centre de masses i comencen a aparèixer dues regions petita al voltant del punts L_4 i L_5 .

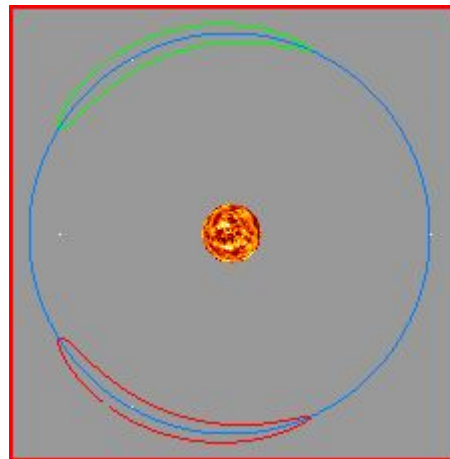


Fig. 7.3

(c) Massa=0.460

A mida que desplaçem el centre de masses les corbes de velocitat zero es fan més grans.

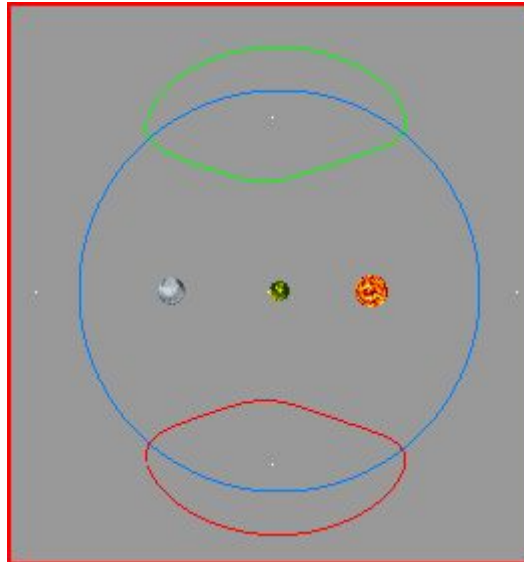


Fig. 7.4

(d) Massa=0.988

Per aquests valor només hi ha una única regió.

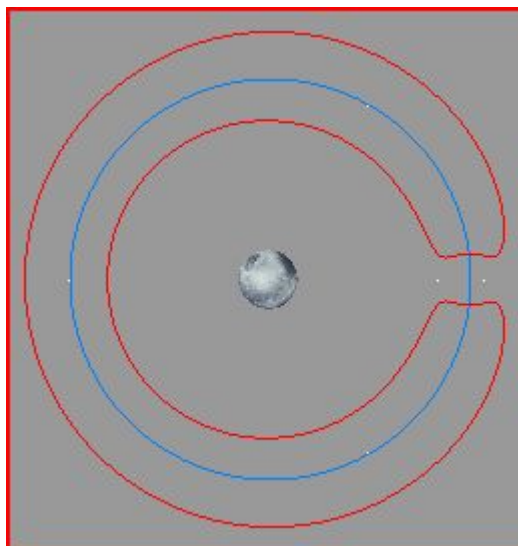


Fig. 7.5

(e) Massa=1.008

Ara tenim dues regions, on la groga conté els punts L_1 i L_2 i la blanca L_3 .

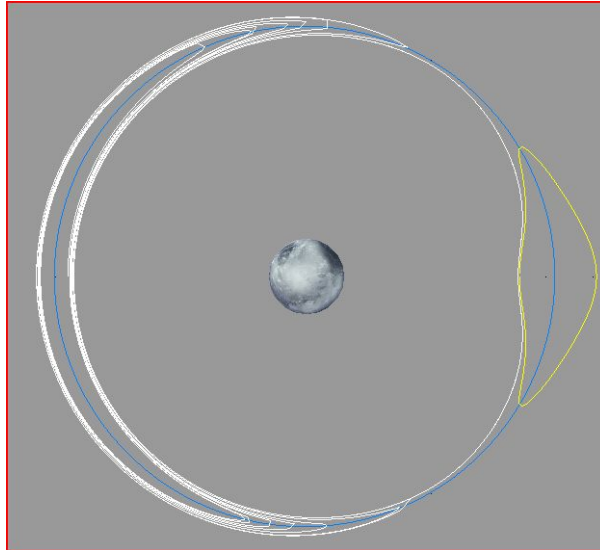


Fig. 7.6

7.2 Control de la constant de Jacobi

Com ja hem vist abans, la constant de Jacobi és l'únic paràmetre que es conserva en el problema restringit de tres cossos. Les corbes de velocitat - zero depenen d'aquesta constant. Podem observar en les següents figures com canvien les corbes de velocitat - zero segons la constant de Jacobi, per a una massa determinada.

Observem les següents figures per a una massa de 0.182 com varien segons la constant de Jacobi que li donem.

(a) $C=3.005$

En aquest cas hi han dues regions de Hill simètriques al voltant de L_4 i L_5 .

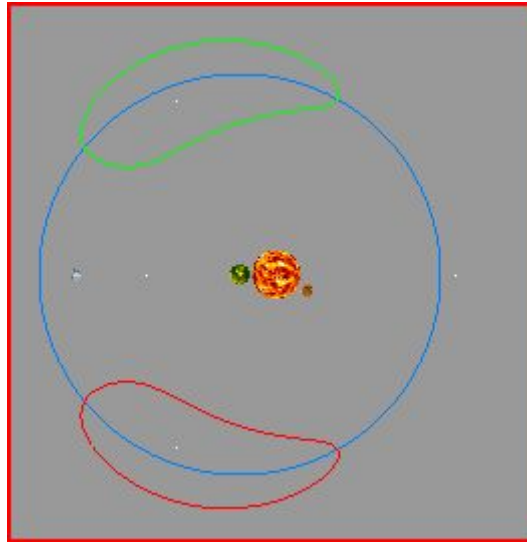


Fig. 7.7

(b) $C=3.179$

Al augmentar la C , les regions de la figura anterior van augmentant fins arribar al punt L_3 .

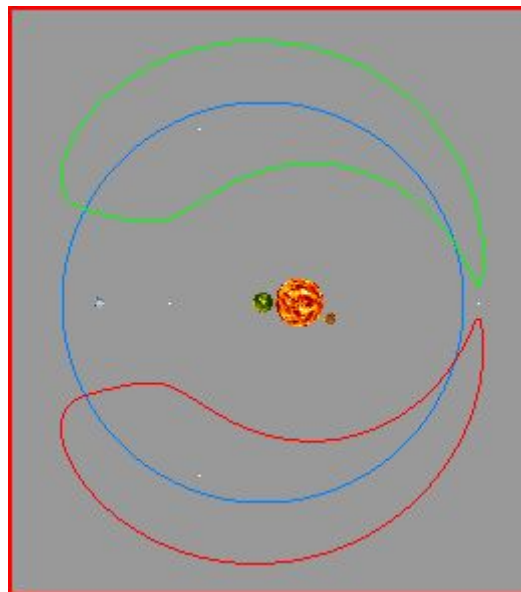


Fig. 7.8

(c) $C= 3.191$

Una vegada ja ha passat el valor de C_3 , només hi ha una sola regió que conté els dos punts d'equilibri.

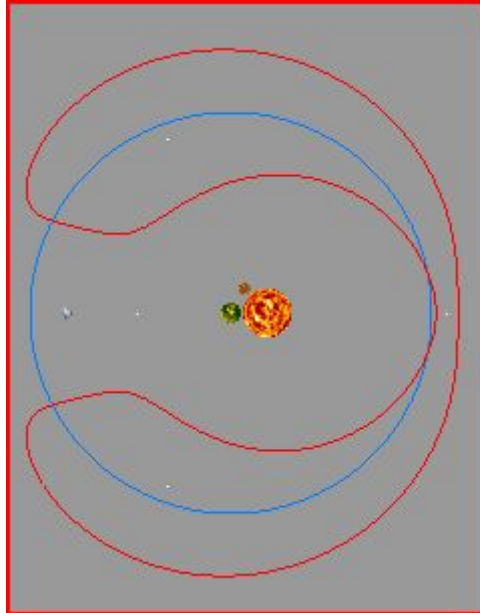


Fig. 7.9

(d) $C=3.544$

Ara les corbes de velocitat zero han arribat al punt L_2 i la corba es tanca creant un altre regió interior.

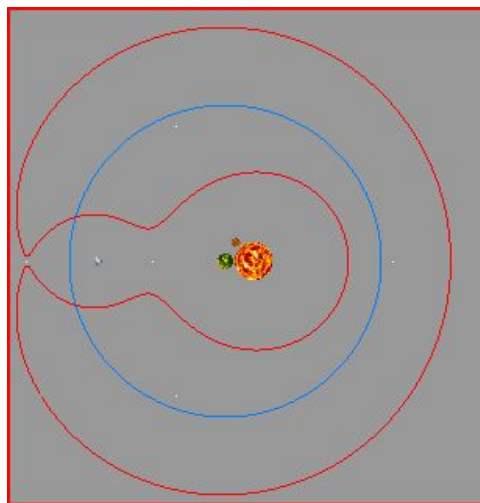
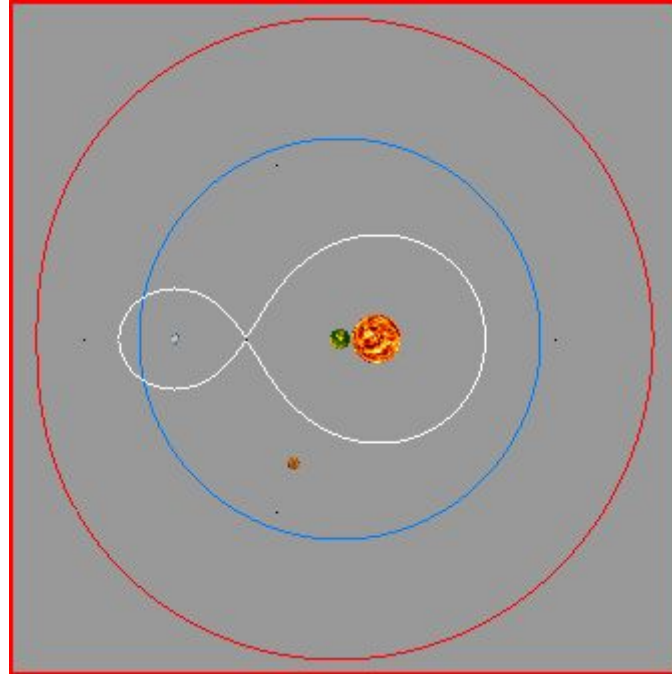


Fig. 7.10

(e) $C=3.775$

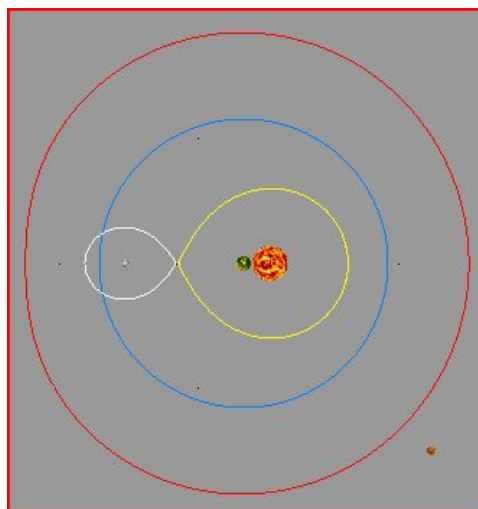
En aquesta figura observem que hi ha una corba fora i una altra dintre que toca al punt L_1 .



7.11

(f) $C= 3.776$

Per aquest valor les corbes interiors s'han separat quan han arribat al punt L_1 , i s'han separat en dos on cada una conté un dels cossos.



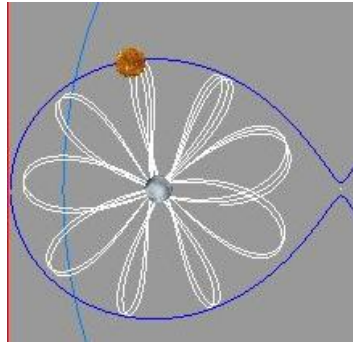
7.12

7.3 Interpretació del programa

El que fa l'algorisme és que quan li donem a un punt (x, y) de la finestra d'interacció, dona el mòdul de la velocitat i una posició per poder calcular l'òrbita del tercer cos.

Aquesta òrbita dependrà de la distància que estigui el punt inicial que s'ha donat, és a dir, que si es troba molt a prop d'alguna de les masses o de les regions de Hill, l'òrbita farà una rectificació per no xocar amb cap de les dues masses.

En la figura següent podem veure aquesta situació per $C=3.775$ i $\text{massa}=0.182$.



7.12

com observem en la següent figura el tercer cos tampoc pot entrar dintre de les regions de Hill

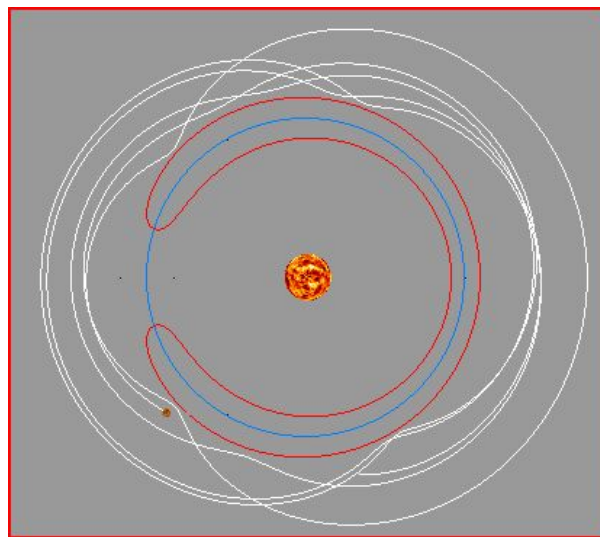


Fig.7.13

7.4 Programació

Per poder realitzar la simulació del problema restringit de tres cossos en OpenGL s'han fet diversos mòduls. Quan analitzem el problema que tenim ens adonem que no només s'ha de calcular la òrbita del cos de massa menyspreable, sinó que surten altres corbes o constants que també hem de calcular.

La idea per la simulació és integrar el moviment en un sistema de referència sinòdic i integrar-lo amb un Runge Kutta per trobar les solucions i llavors guardar aquestes solucions en un vector i després les dibuixem per obtenir l'òrbita.

El programa consta dels següents mòduls:

i. RKF.cpp

Aquest mòdul s'encarrega d'integrar les equacions diferencials dels camps vectorials i dels moviments que ens apareixen en el problema.

ii. ZVC.cpp

Aquesta funció implementa les corbes de velocitat zero explicades en l'apartat 5.

iii. CMSE.cpp

En aquesta funció el que hem fet és integrar el camp de la òrbita del cos de massa menyspreable.

iv. CMSE vis.cpp

En aquesta funció el que fem és visualitzar els cossos, les corbes i les òrbites.

v. LCREG.cpp

En aquesta funció es fa la regularització de Levi-Civita quan el cos està prop del cos primari.

vi. LCREGS.cpp

En aquesta funció es fa la regularització de Levi-Civita quan el cos està prop del cos secundari

8 Conclusions

La realització d'aquest treball que combina diverses eines importants de les matemàtiques, la física i també de la informàtica, m'ha aportat coneixements de mecànica celeste i habilitats per aplicar les matemàtiques a altres ciències.

L'estudi del treball per a fer aquesta simulació del problema restringit de tres cossos ha sigut una mica costos, perquè tant els conceptes com la manipulació de les equacions s'han d'entendre i d'implementar a la simulació, però alhora ho he disfrutat perquè he après coses noves com els punts d'equilibri de Lagrange, les corbes de velocitat zero o la regulació de Levi-Civita.

La simulació d'aquest treball és el producte al que volíem arribar on podem canviar alguns paràmetres i observar diferents situacions en les que teníem un coneixement teòric i comprobar que la simulació funciona.

Bibliografia

- [1] The Kepler Problem, Bruno Cordani
- [2] Stability and Chaos in Celestial Mechanics, Alessandra Celletti
- [3] The Three - Body Problem, Mauri Valtonen and Hannu Karttunen
- [4] Solar System Dynamics, Carl D. Murray and Stanley F. Dermott
- [5] Satellite orbits : models, methods and applications, Oliver Montenbruck, Eberhard Gill
- [6] Programación en OpenGL, Richard S. Wright and Michael Sweet
- [7] <http://navarroj.com/latex/curso.html>
- [8] <http://www.lawebdelprogramador.com>