

7451  
PROGRAMA

CORRESPONDIENTE Á LOS

Elementos de Cálculo Infinitesimal

REDACTADO POR EL

Dr. D. Lauro Clariana Ricart

*Catedrático de la expresada asignatura*

*en la Universidad de Barcelona*



BARCELONA

IMPRENTA DE FRANCISCO J. ALTÈS

CALLE DE LOS ÁNGELES, 22 Y 24

1908



BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0701777659

FA-18913

09451

# PROGRAMA

CORRESPONDIENTE Á LOS

# Elementos de Cálculo Infinitesimal

REDACTADO POR EL

Dr. D. Lauro Clariana Ricart

*Catedrático de la expresada asignatura*

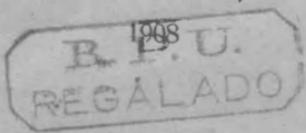
*en la Universidad de Barcelona*

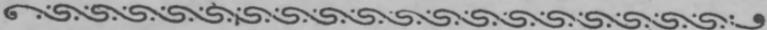


BARCELONA

IMPRENTA DE FRANCISCO J. ALTÈS

CALLE DE LOS ÁNGELES, 22 Y 24





**PROGRAMA**  
DE  
**ELEMENTOS DE CÁLCULO INFINITESIMAL**

---

**PRELIMINARES**

---

**Tema 1.º**

Conceptos fundamentales de análisis, según Cauchy

**Tema 2.º**

Generalidades acerca de los vectores y cuaternios.

**Tema 3.º**

Estudio de las funciones hiperbólicas, directas é inversas.

**Tema 4.º**

Génesis de la cantidad.—Cantidad infinitesimal.

**Tema 5.º**

Estudio de las cantidades que difieren entre sí indefinidamente poco.—Teoremas fundamentales del Cálculo Diferencial é Integral.

## **CALCULO DIFERENCIAL**

---

### **Tema 6.º**

Desarrollo de la diferencial primera en una función ordinaria.—Término principal.

### **Tema 7.º**

Diferenciales primeras de funciones hiperbólicas, directas é inversas.

### **Tema 8.º**

Desarrollo de la diferencial primera en las funciones compuestas.

### **Tema 9.º**

Diferenciales de órdenes superiores al primero en funciones ordinarias. — Determinación de leyes en ciertas clases de funciones.

### **Tema 10**

Diferenciales de órdenes superiores al primero en funciones compuestas.

### **Tema 11**

Diferenciales de un orden cualquiera en las funciones implícitas.

### **Tema 12**

Cambio de variables en las ecuaciones diferenciales.

## **Aplicaciones Analíticas del Cálculo Diferencial**

---

### **Tema 13**

Determinación de ciertas ecuaciones diferenciales como resultado de la eliminación de constantes y funciones arbitrarias.

### **Tema 14**

Determinantes funcionales de Wronski, Jacobi y Hesse.

### **Tema 15**

Monogeneidad de las funciones —Determinar las condiciones necesarias y suficientes de monogeneidad según Forsyth.

### **Tema 16**

Fórmula de Lagrange.—Funciones isotropas.

### **Tema 17**

Origen de los números de Bernoulli. — Su determinación.

### **Tema 18**

Polinomios de Legendre.—Su generalización.

## **Aplicaciones Geométricas del Cálculo Diferencial**

---

### **Tema 19**

Diferencial del área correspondiente á una curva plana. — Diferencial de un arco de curva plana.— Fórmulas generales, correspondientes á la tangente, subtangente normal y sub-normal. — Aplicación á ejes polares.

### **Tema 20**

Contacto de curvas planas.—Línea osculatriz.—Círculo osculador.—Curvatura de curvas planas.—Círculo de curvatura.—Ecuación intrínseca.—Aplicación á la circunferencia.

### **Tema 21**

Diferentes formas del radio de curvatura.—Aplicación del radio de curvatura á las cónicas.—Determinar el radio de curvatura de diferentes líneas.

### **Tema 22**

Evolutas y evolventes en las curvas planas.—Fórmulas fundamentales.—Determinación de las evolutas en algunas curvas conocidas.

### **Tema 23**

Estudio de las involutas y envolventes planas.—Puntos característicos.—Demostrar que cuando las curvas

de una misma familia pasan por puntos fijos, éstos forman parte de la envolvente.— Demostrar que la evoluta de una curva, es la envolvente de sus normales.

### **Tema 24**

Puntos singulares en las curvas planas.

### **Tema 25**

Líneas alabeadas. — Funciones que la determinan. — Ecuaciones de la tangente y del plano normal en un punto de una línea alabeada.— Diferencial de un arco.

### **Tema 26**

Plano osculador.— Ecuación correspondiente.— Aplicación á la hélice.

### **Tema 27**

Superficies curvas. — Ecuación del plano tangente.— Ecuaciones de la normal.— Ángulos de la normal con los ejes coordenados.

### **Tema 28**

Contacto entre líneas alabeadas y superficies.— Superficie envolvente de otra móvil. — Superficie de canal.— Triedro móvil.

### **Tema 29**

Curvatura de las líneas en el espacio.— Expresión del primer radio de curvatura. — Círculo osculador.— Consecuencias de los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados. — Cosenos correspondientes á los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

### **Tema 30**

Angulo de flexión ó de segunda curvatura.— Fórmula del radio de curvatura de segunda especie.

### **Tema 31**

Determinar la expresión de la superficie polar de una línea cualquiera.— Sistema de ecuaciones indispensables para poder deducir la superficie polar de una línea.

### **Tema 32**

Esfera osculatriz. — Expresión del radio de dicha esfera.

### **Tema 33**

Teoría de la curvatura en las superficies.—Radios de curvatura correspondiente á una sección oblicua ó normal.—Teorema de Meusnier.

### **Tema 34**

Lecciones principales en un punto de una superficie.—Teorema de Euler.—Consecuencias.—Puntos umbilicales.

### **Tema 35**

Cálculo de los radios de curvatura principales en un punto dado de una superficie.—Ecuación que determina la dirección de las secciones principales en un punto de una superficie.

### **Tema 36**

Indicatriz.—Consecuencias.—Líneas de curvatura situadas sobre una superficie.—Superficies resultantes.

### **Tema 37**

Superficies cilíndricas, cónicas y de revolución.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las superficies antedichas.—Superficies conoides, desarrollables y regladas en general.—Ecuaciones entre derivadas parciales de las precitadas superficies.

### **Tema 38**

Expresión en forma de matriz de las líneas de curvatura de la superficie  $f(x, y, z) = 0$ .—Líneas de máxima y mínima pendiente.

### **Tema 39**

Generalidades acerca de las congruencias de las líneas.—Congruencia rectilínea y lineal.—Superficie de la congruencia.—Puntos focales.—Planos focales.—Consecuencias.

### **Tema 40**

Generalidades acerca de los sistemas de rectas, debidos á los complejos.—Cono del complejo.—Curva del complejo en un plano.—Ecuaciones de una recta, según Plücker.—Seis coordenados de la recta.—Superficies cyclides.—Representación esférica de Gauss.—Líneas asintóticas.—Líneas geodéricas.

### **Tema 41**

Teorema de M. Bouquet, acerca de la más corta distancia entre dos rectas sucesivas de un sistema continuo en el espacio. — Probar que cuando las rectas de la serie supuesta son tangentes á una misma curva, se cumple la condición:

$$d a d q - d b d p = 0$$

Determinar la condición para que la curva sea plana.

### **Tema 42**

Estudio de los diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas.

## **CÁLCULO INTEGRAL**

---

### **Tema 43**

Conceptos generales sobre el cálculo integral. — Estudio de una ecuación diferencial con dos variables en el caso más sencillo. — Función primitiva. — Procedimientos distintos para efectuar la integración. — Integración inmediata.

### **Tema 44**

Integración por sustitución. — Observaciones acerca de los límites de la integral. — Integración por partes. — Integración geométrica. — Diferentes casos que pueden presentarse. — Estudio de la función trascendente denominada logarítmica integral.

### **Tema 45**

Integración de funciones fraccionarias algebraicas racionales después de reducidas á fracciones simples. — Estudio de las cuatro formas típicas. — Consecuencias.

### **Tema 46**

Transformar diferentes fracciones diferenciales racionales dependientes de funciones circulares directas, en otras algebraicas y racionales. — Estudiar algunos casos particulares cuya ecuación de condición puede reducirse.

### **Tema 47**

Integración de funciones irracionales. — Caso en que los radicales contengan cantidades monomías. — Integración de funciones especiales que pueden reducirse fácilmente á la forma racional. — Integración de funciones que contengan raíces cuadradas de polinomios de segundo grado.

### **Tema 48**

Importancia de las funciones circulares é hiperbólicas para resolver ciertas integrales de funciones algebraicas irracionales. — Relaciones notables entre las funciones irracionales y las curvas unicursales.

### **Tema 49**

Integrales binomias. — Desarrollo de las cuatro formas típicas. — Discusión de cada una de ellas. — Sustitución por funciones circulares é hiperbólicas en ciertos casos particulares.

### **Tema 50**

Integrales hiper-elípticas. — Integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie. — Transformación de las mismas por medio de funciones circulares. — Notaciones particulares.

### **Tema 51**

Integraciones correspondientes á funciones algebraicas en combinación de trascendentes. — Integrales de potencias correspondientes á funciones circulares é hiperbólicas.

### **Tema 52**

Integrales definidas. — Campo de la integración. — Importancia de las integrales curvilíneas. — Probar como el problema de la integración puede procurar la definición ó la determinación de nuevas funciones. — Medio para transformar los límites variables de una integral en otros fijos y determinados. — Teorema llamado de la media. — Casos particulares de integrales definidas.

### **Tema 53**

Integración por medio de series. — Principios fundamentales. — Aplicaciones ó funciones cuyas integrales se

refieren á trascendentes ordinarias. — Importancia del desarrollo en serie para integrales que se resuelven en trascendentes superiores.

### Tema 54

Determinar si la integral  $\int_a^b F(x) dx$ , tiene un valor finito y determinado cuando uno de sus límites se convierte en una cantidad indefinidamente grande. — Averiguar si la integral  $\int_a^b F(x) dx$ , tiene un valor finito y determinado cuando  $F(x)$  se transforme en una cantidad indefinidamente grande para el valor de la variable que corresponde á uno de los límites de la integral. — Caso en que la función  $F(x)$  resulte indefinidamente grande para un valor de la variable que se halle comprendido entre los límites de la integral.

### Tema 55

Determinación de integrales definidas por medio de la diferenciación é integración bajo el signo integral. — Casos diferentes que pueden considerarse al diferenciar bajo el signo integral. — Interpretación geométrica. — Principio á que debe atenderse al integrar bajo el signo integral.

### Tema 56

Integración geométrica. — Teorema relativo al valor de la integral cuando la variable independiente sigue caminos diferentes que terminan en los mismos extremos. — Consecuencias. — Sentidos de los contornos. — Notación especial. — Integral relativa al contorno elemental de un punto crítico. — Residuo de la función. — Valor de la integral de una función monódroma á lo largo de un contorno cerrado y que contiene en su interior un cierto número de puntos críticos.

### Tema 57

Integrales eulerianas de primera y segunda especie. — Transformación de las mismas por sustitución. — Propiedades. — Determinación de la curva *Gamma*.

### **Tema 58**

Integrales múltiples en general.—Reducción de dichas integrales.—Método general.—Aplicaciones.—Método de Dirichlet con aplicación al volumen del elipsoide.—Fórmula de Fourrier.

### **Tema 59**

Fórmulas de Stokes, d'Ostrogradsky y de Green.

### **Tema 60**

Aplicaciones geométricas del cálculo integral.—Cuadratura de figuras planas, según se refieran á coordenadas, cartesianas ó polares.

### **Tema 61**

Volumen de cuerpos terminados por superficies cualesquiera.—Fórmulas generales.—Procedimientos varios para la determinación de un volumen.—Aplicación al elipsoide.—Volumen de cuerpos referidos á coordenadas polares.

### **Tema 62**

Rectificación de curvas.—Fórmulas para la rectificación de líneas planas ó alebeadas referidas respectivamente á ejes cartesianos ó polares.—Aplicaciones.—Consideraciones notables en la rectificación de un arco de elipse.

### **Tema 63**

Determinación de áreas correspondientes á superficies curvas.—Aplicaciones.—Cubatura y cuadratura en el caso de superficies de revolución.—Aplicaciones.

### **Tema 64**

Integración de ecuaciones diferenciales.—Ecuaciones diferenciales ordinarias.—Ecuaciones entre derivadas parciales.—Ecuaciones entre diferenciales totales.—Probar que todo sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales entre  $x$  y  $m$  funciones  $y_1 y_2 \dots y_m$  de la primera variable, puede transformarse en otro donde no figuren más que las derivadas de primer orden.—Forma normal de un sistema simultáneo de  $m$  ecuaciones de primer orden.—Pro-

cedimiento general para deducir de un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales, una ecuación diferencial en que no entre más que  $x$  y una de las funciones — Aplicación de reglas análogas á la formación de una determinante para deducir el orden de la ecuación diferencial definitiva. — Condiciones á que deben satisfacer las integrales, además de las que corresponden á las ecuaciones diferenciales respectivas. — Aplicación á la Mecánica, respecto al movimiento de un punto.

### Tema 65

Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. — Probar que toda ecuación diferencial del orden  $m$  admite una integral que encierra  $m$  constantes arbitrarias. — Integrales particulares. — Ordenes respectivas de las ecuaciones diferenciales y de las integrales. — Regla general para conocer si una integral con  $m$  constantes, se refiere á una ecuación diferencial del orden  $m$ .

### Tema 66

Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden. — Separación de variables. — Casos en que es posible la integración. — Estudiar el caso en que la ecuación diferencial sea homogénea. — Caso en que faltando la homogeneidad por alguna transformación puede resultar la ecuación diferencial homogénea.

### Tema 67

Ecuaciones diferenciales lineales. — Estudio de la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ . Fórmula de Bernoulli para integrar la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^m.$$

Caso en que se conozca una integral particular de

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R.$$

### Tema 68

Ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera. — Consideraciones generales. — Casos en que la ecuación diferencial no contenga á las variables.

Ecuaciones diferenciales de M. Lagrange y de M. Clairaut dadas por las formas siguientes:

$$y = xF(p) + \varphi(p) \qquad y = px + \varphi(p)$$

### Tema 69

Condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad en la expresión diferencial:  $Mdx + Ndy$ .—Determinación de la fórmula integral.—Condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad en la expresión diferencial:  $Mdx + Ndy + Pdz$ .—Determinación de la fórmula integral.

### Tema 70

Estudio del factor que transforma en integrable el primer miembro de la ecuación diferencial:  $Mdx + Ndy = 0$ .—Determinar dicho factor para cuando la ecuación sea homogénea — Transformaciones infinitesimales.— Problema de las trayectorias en general.— Trayectorias ortogonales.

### Tema 71

Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden.—Soluciones singulares deducidas de la integral general.—Significación de dicha integral.—Propiedad del factor integrable en esta clase de integrales.—Método de Lagrange para la solución singular de una ecuación diferencial de primer orden.

### Tema 72

Integración de ecuaciones diferenciales de un orden superior al primero.—Reducción de la integral múltiple á otras simples.—Ecuación diferencial en que entran dos derivadas consecutivas de un orden cualquiera ó que se diferencien en dos unidades.—Casos particulares de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse á un orden inferior.

### Tema 73

Integración de ecuaciones lineales de un orden cualquiera —Caso en que el segundo miembro sea igual á cero.—Integración de la ecuación lineal completa.—Casos particulares que pueden ocurrir.

### **Tema 74**

Integración de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sin término independiente de la variable.—Método de Euler.—Ecuación modular.—Estudiar los diferentes casos que pueden presentarse según sean las raíces desiguales, iguales ó imaginarias.

### **Tema 75**

Ecuaciones lineales con coeficientes variables que pueden ser referidas al caso de coeficientes constantes.—Casos particulares en que puede desaparecer el segundo miembro de una ecuación diferencial á coeficientes constantes.

### **Tema 76**

Integración por medio de integrales definidas.—Método de Laplace.—Modo de obtener la integral general después que se hayan hallado las integrales particulares.

### **Tema 77**

Integración de ecuaciones diferenciales simultáneas.—Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden entre tres variables.—Aplicación á las formas normales.—Casos particulares que pueden ocurrir.

### **Tema 78**

Método de D'Alambert para la integración de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden en el supuesto de considerar un sistema de dos ecuaciones con tres variables, bajo la forma normal.—Estudiar el caso para cuando los coeficientes sean constantes.

### **Tema 79**

Integración de ecuaciones diferenciales por medio de series.—Empleo de la serie de Mac-Laurin y de Taylor.—Casos en que no puede aplicarse la serie de Mac-Laurin.—Dada una integral bajo forma de serie, deducir su ecuación diferencial correspondiente.

### **Tema 80**

Tipo general de la ecuación de Ricatti.—Transformación de la ecuación propia de Ricatti.

### Tema 81

Nuevas formas de series para la integración de ecuaciones diferenciales. — Ecuación de Gauss. — Modo de prolongar analíticamente las funciones. — Integrales regulares. — Teorema de Fuchs. — Ecuación de Bessel.

### Tema 82

Ecuaciones entre derivadas parciales. Caso en que la ecuación diferencial se refiere á una sola variable. — Ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero bajo condiciones análogas á las del caso anterior. — Caso general de integración de una ecuación entre derivadas parciales de primer orden y de primer grado, dependiente de tres ó cuatro variables.

### Tema 83

Ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden. — Importancia de la función:  $V(x, y, z, a, b) = 0$ . — Integrales completa, singular y general según Lagrange. — Estudio de Lagrange acerca de las ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden. — Importancia de la serie de igualdades siguientes:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$$

### Tema 84

Integración del sistema de  $m$  ecuaciones entre derivadas parciales de primer orden, conteniendo  $n$  variables independientes. — Método de Jacobi.

### Tema 85

Ecuación de Laplace, de Monge y d'Ampère.

### Tema 86

Ecuaciones á las diferenciales totales de la forma

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

Condición necesaria y suficiente para que esta ecuación sea integrable. — Caso general.

### Tema 87

Cálculo aproximado de las integrales definidas.— Fórmulas de Poncelet y Simpson.—Idea general sobre las de Euler y método de interpolación y Gauss.

### Tema 88

Procedimientos gráficos para medir un espacio superficial encerrado por una curva dada plana.—Planímetro de Amsler.—Determinación de la fórmula

$$S = (a^2 + ab \cos \beta + b^2) \pi$$

Modificación de la fórmula general.—Casos particulares que pueden ocurrir.

### Tema 89

Integración gráfica.—Propiedades importantes —Métodos generales de integración gráfica.—Determinación de la ordenada y abscisa media.—Importancia de dichas construcciones gráficas para la resolución de varios problemas pertenecientes á la Mecánica.

### Tema 90

Funciones elípticas.—Procedimiento de Liouville para determinar las fórmulas fundamentales de las funciones elípticas correspondientes á la suma ó diferencia de dos argumentos.—Derivadas de  $sn.u$ ,  $cn.u$  y  $dn.u$ .

### Tema 91

Determinar la fórmula que pone en relación la función  $pu$  de Weierstrass con las funciones elípticas.—Ecuación importante entre la función  $pu$  y su derivada.—Consecuencias.

### Tema 92

Cálculo de las variaciones.—Consideraciones filosóficas de Lagrange acerca del cálculo de las variaciones.—Fórmulas generales.—Aplicación á las líneas geodésicas.





