Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Més enllà de la Geometria Euclidiana: L'Espai Hiperbòlic

Albert Beardo Ricol

Director:
Vicenç Navarro

Departament d'Àlgebra i Geometria

Barcelona, 28 de gener de 2015

Aquest treball no hagués estat possible sense la guia i coneixement del professor Vicenç Navarro. Aprecio realment les possibilitats i reptes que m'ha brindat aquest projecte i agraeixo de tot cor el suport rebut.

També vull donar les gràcies als meus pares, el Salvador Beardo i la Rosa Ricol, per estar incondicionalment al meu costat i per haver-me donat la possibilitat d'estudiar i arribar a ser capaç de dur a terme aquest treball.

Finalment, vull agrair a l'Angela Beardo l'interès i els bons consells sobre la redacció.

Introducció

Euclides, vora el 300aC, va escriure els Elements, obra cèlebre on va plasmar de forma brillant la seva concepció de la geometria plana a partir d'una sèrie de definicions de termes geomètrics, cinc nocions lògiques i els següents cinc postulats:

1. Entre dos punts qualsevol es pot traçar una línea recta.
2. Una línea recta finita es pot perllongar infinitament.
3. Es pot traçar un cercle amb un centre i un radi qualsevol.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Si una línea recta talla dues rectes de manera que en un mateix costat els angles interiors sumen menys que dos angles rectes, aleshores les dues rectes, al extendre-les indefinidament, es trobaran en el costat considerat.

Els primers quatre postulats tenen clarament una naturalesa axiomàtica ja que són fàcilment comprensibles i reflexen la nostra comprensió intuitiva de l'espai que ens envolta. En canvi, el cinquè postulat sembla no ser prou evident per ser acceptat sense una demostració. De fet, durant segles es va considerar que es podia derivar dels quatre primers.

Carl Friedrich Gauss, al segle XIX, va ser el primer en demostrar que efectivament el cinquè postulat és independent de la resta, i alhora va fer un descobriment trascendental: El cinquè postulat restringeix la geometria a l'univers pla, sense curvatura, i modificar-lo dóna lloc a noves geometries consistents que descriuen altres universos possibles amb altres curvatures, les anomenades geometries *no-euclidianes*. Malauradament no va arribar a publicar aquests resultats. Uns anys després, de forma independent, Nikolai Lobachevsky i János Bolyai van redescobrir les geometries no-euclidianes. Es poden consultar els papers històrics on aquestes idees es publiquen per primer cop: *On the principles of geometry*, Lobachevsky (1829) i *The absolute science of space*, Bolyai (1832).

Per altra banda, les eines de la geometria moderna desenvolupades per Behrnard Riemann i pel mateix Gauss entre d'altres, es valen de l'anàlisi diferencial per descriure l'espai d'una manera menys axiomàtica i més universal, de manera que les diferents geometries possibles han emergit de forma natural perfectament classificades i s'han pogut aplicar a teories físiques de profundes implicacions com la Relativitat General d'Einstein.

Un dels objectius principals d'aquest treball és mostrar com la geometria moderna, la Riemanniana, ha permès classificar els diferents espais possibles en termes de la seva curvatura i establir-ne les dualitats. Aquest desenvolupament està contingut al primer capítol, on es demostren els resultats principals que resolen el problema. Com veurem, imposant que la curvatura sigui constant, donarem lloc fundamentalment a tres espais possibles: l'euclidi (pla), l'esfèric (curvat positivament) i l'-hiperbòlic (curvat negativament). Els dos primers casos els descriurem breument i també mostrarem com es pot recórre a les isometries de l'espai per identificar les varietats que conté.

El resultat més sorprenent que obtindrem, sens dubte, és l'aparició de l'espai hiperbòlic, que és totalment consistent per si sol i presenta clares dualitats amb els altres dos. A més, reflecteix la geometria de l'espai-temps segons la Teoria de la Relativitat General, és a dir, és l'adequat per capturar les propietats mètriques de l'Univers. Tot i així, no és possible concebre'l de forma intuitiva i la seva naturalesa és elusiva. Aquesta és la motivació de la segona part del treball que recullen el segon i el tercer capítol. L'objectiu és familiaritzar el lector amb aquest espai per una dimensió arbitrària a través de diferents models que disminueixen el nivell d'abstracció que presenta.

Així doncs, en el segon capítol es presenten els diferents models de forma constructiva, fent ús de les eines de la geometria Riemanniana. En el tercer i darrer capítol es mostren les diferents transformacions isomètriques de l'espai hiperbòlic que, com veurem, permeten estudiar les seves invariàncies i distingir-ne les varietats.

Amb afany de presentar un text auto-contingut, s'ha el.laborat un apèndix on es desenvolupen ordenadament totes les idees essencials de la geometria Riemanniana que s'utilitzen durant el treball. Aquest capítol extra també recull algunes apreciacions que motiven els objectius del treball.

El treball s'ha el.laborat a partir de diverses fonts amb la intenció de minimitzar la quantitat de formalisme i resultats necessaris per assolir els objectius. Per facilitar l'aprofundiment dels continguts per part del lector, a part de les cites, al principi de cada capítol s'indica quines fonts es poden seguir de forma paral.lela al text.

Introduction

Euclides, around 300 B.C., wrote The Elements, famous work where he brilliantly reflected his conception of plane geometry based on a list of definitions of geometric terms, five logical notions and the following five postulates:

1. A straight line may be drawn joining any two points.
2. A finite straight line may be extended indefinitely in a straight line.
3. A circle may be drawn with any center and any radius.
4. All right angles are equal.
5. If a straight line intersects two straight lines in such a way that the sum of the inner angles on one side is less than two right angles, then the two lines inevitably must intersect each other on that side if extended far enough.

The first four postulates clearly have an axiomatic nature, since they are easy to conceive and reflect our intuitive understanding of space around us. However, the fifth postulate seems to be not enough self-evident to be accepted without a proof. In fact, for over two thousand years it was believed that the fifth postulate could be derived from the other four.

Carl Friedrich Gauss, in the nineteenth century, was the first to demonstrate that indeed the fifth postulate is independent of the others, and he also made a transcendental discovery: the fifth postulate restricts geometry to a flat universe, without curvature, and by modifying it one obtain new consistent geometries that describe other possible universes with other curvatures, which are called the *non-euclidian geometries*. Unfortunately, Gauss never published this results. Years later, non-euclidian geometries were rediscovered independently by Nikolai Lobachevsky and János Bolyai. The historical papers, where these ideas were published for the first time, can be consulted: *On the principles of geometry*, Lobachevsky (1829) and *The absolute science of space*, Bolyai (1832).

Moreover, the modern geometric tools developed by Behrnard Riemann and Gauss himself among others, make use of the differential analysis in order to describe the space in a less axiomatic and more universal way, so that the different possible geometries have emerged naturally and perfectly classified and have became useful to develop physical theories with profound implications as the Theory of General Relativity of Einstein.

The main goal of this work is to show how modern geometry, the Riemannian, has allowed to classify the different spaces in terms of their curvatures and to establish dualities between them. This development is carried out in the first chapter, where we demonstrate the fundamental results that solve the problem. As we shall see, by imposing that the curvature is constant, we reach to three possible spaces: the euclidian one (non curved), the spherical one (positively curved) and the hyperbolic one (negatively curved). The first two cases are briefly described in the first chapter.

Additionally, we show how the isometries of the space can be used to identify the manifolds that contains.

The most surprising result that we obtain, without any doubt, is the existence of the hyperbolic space, which is totally consistent by itself and presents clear dualities with the other two. Furthermore, it reflects the space-time geometry according to the Theory of General Relativity. Hence, it is the right one to capture the metrical properties of the Universe. However, the hyperbolic space can not be intuitively conceived and has an elusive nature. This is the motivation of the second part of the work that is contained in the second and third chapters. The aim is to familiarize the reader with this space for an arbitrary dimension through different models that reduce the level of abstraction that it presents.

Therefore, the different models are presented in a constructive way in the second chapter by using the tools of the Riemannian geometry. In the third chapter, the different isometric transformations of the hyperbolic space are shown, allowing the study of its invariances and its manifolds.

In order to present a self-contained text, we include an appendix where all the essential ideas of Riemannian geometry that we use in the work are developed. This extra chapter also contains some appreciations that motivate the objectives of the work.

Several sources of information have been used with the intention of optimizing the amount of formalism and results presented. In order to facilitate the deepening of the contents by the reader, at the beginning of each chapter we indicate the different sources that can be followed in parallel with the text.

1 Espais de Curvatura Constant

Introducció

Aquest primer capítol és la resolució moderna del problema de la independència del cinquè postulat d'Euclides. Al mateix temps, és una motivació a l'estudi de l'espai hiperbòlic que durem a terme en els capítols posteriors. Veurem la rellevància que té aquest espai en la geometria Riemanniana i com apareix al classificar els espais de curvatura constant, que estan relacionats amb la idea de geometria no-euclidiana. Els resultats que obtindrem justifiquen l'enfocament que prenen els darrers capítols del treball.

Usem el formalisme habitual de la geometria Riemanniana. Totes les definicions i resultats previs necessaris per desenvolupar aquest capítol es poden trobar a l'apèndix del treball, on es presenten les propietats essencials de les varietats Riemannianes que són bàsicament locals, és a dir que atenen al comportament de les varietats en entorns de punts. Per estudiar els espais de curvatura constant cal canviar el punt de vista i mostrar propietats globals, que atenen al comportament de la varietat com un tot, i veure com estan fortament relacionades amb les locals.

La primera secció correspòn a [2], capítol 7. És una extensió de l'estudi de les varietats Riemannianes de l'apèndix a un nivell més global en el qual podrem mostrar els resultats crucials del capítol. En la segona secció, extreta de [2], secció 8.1, es mostra com es pot relacionar la mètrica amb la curvatura tot brindant una eina que necessitarem per avançar en el tractament. En la tercera secció es classifiquen els espais de curvatura constant i es justifica que en capítols posteriors poguem utilitzar la teoria de grups per estudiar l'espai hiperbòlic. És el resultat més rellevant del capítol i correspòn a [2], secció 8.4. Finalment, en la darrera secció, es mostren com exemples l'espai euclidià i l'esfèric. Per el.laborar aquests exemples s'ha seguit [1], capítols 1 i 2.

Varietats Completes. Teoremes de Hopf-Rinow i Hadamard.

Ens restringirem a l'estudi de les varietats Riemannianes completes M, on les geodèsiques estan definides per tot valor de la longitud d'arc. Equivalentment, $\forall p \in M$, el mapa exponencial exp_p està definit a tot T_pM. Això implica que les varietats no tenen forats o vores i en aquestes condicions podrem estudiar-les com un tot.

El resultat principal que mostrarem és el Teorema de Hopf-Rinow que afirma que entre dos punts qualsevols d'una varietat completa hi ha una geodèsica que els uneix minimitzant la distància. Aquest resultat ens permetrà demostrar el teorema de Hadamard que és el primer gran exemple de connexió entre les propietats locals i les globals: Donada una varietat M^n completa, simplement connexa i amb curvatura seccional $K \leq 0$ (condició local), existeix un difeomorfisme entre M i $\mathbb{R}^n$ (forta restricció global).

Observació 1.1. Assumim que les varietats Riemannianes són connexes (la varietat no pot ser descrita com una unió disjunta d'oberts) i són simplement connexes (entre dos punts qualsevol de la varietat hi ha una corba diferenciable dins la varietat que els uneix). Aquesta condició és l'equivalent modern al primer postulat d'Euclides.

En primer lloc, anem a veure que les varietats completes no són subvarietats d'altres varietats més grans.

Definició 1.1. *Una varietat Riemanniana M és extensible si existeix una altra varietat Riemanniana M' tal que M és isomètrica a un obert de M'. Aleshores M és una subvarietat de M'. En cas contrari M és no extensible.*

La família de varietats no extensibles és molt gran, la condició es feble. Per això considerem una definició més restrictiva.

Definició 1.2. *Una varietat Riemanniana M és geodèsicament completa si $\forall p \in M$, el mapa exponencial exp_p està definit $\forall v \in T_pM$, i equivalentment, tota geodèsica $\gamma(t)$ des de p està definida $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Proposició 1.1. *Si M és completa, llavors M és no extensible.*

Demostració:
Veurem el contrarecíproc. Suposem que $M \subset M'$ és isomètrica a un obert de M' (és extensible). Considerem la vora ∂M de M, tenim que $\partial M \cap M' \neq \emptyset$ ja que M' és connexa. Sigui $p \in \partial M$ i sigui $U' \subset M'$ un entorn normal de p a M'. Sigui $q \in U' \cap M$ i sigui $\tilde{\gamma}(t)$ una geodèsica a M' tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}(1) = q$.
Llavors $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$ on $|t| < \delta$ és una geodèsica de M tal que $\gamma(0) = q$. Aquesta geodèsica no està definida per algun $t \leq 1$, llavors M no pot ser completa.

□

La proposició en el sentit invers és falsa, així doncs les varietats completes són una subfamília de les varietats no extensibles.

Trobem de nou aquí una relació amb els Elements d'Euclides, imposar que una varietat sigui completa és imposar el segon postulat d'Euclides per una varietat Riemanniana en general.

Per continuar, ens cal introduir de forma precisa la noció de distància a les varietats Riemannianes M.

Necessitem el concepte de *corba diferenciable a troços* que es defineix com una aplicació $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ tal que existeix una partició $a = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < t_k = b$ del tancat $[a, b]$ on les restriccions $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$, per $i = 0, ..., k-1$, són diferenciables.

Notem que dos punts en una varietat connexa es poden unir sempre per corbes diferenciables a troços i que la longitud de la corba a troços és la suma de la longitud dels *segments* (corbes diferenciables restringides als intervals de la partició).

Definició 1.3. *Siguin $p, q \in M$.*
La distància entre els punts $d(p,q)$ es defineix com l'ínfim de les longituds de les corbes diferenciables a troços entre p i q.

Una varietat Riemanniana M amb la distància d és un espai mètric.

Proposició 1.2. *Es compleix:*

1. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$,
2. $d(p,q) = d(q,p)$,
3. $d(p,q) \geq 0$, *i* $d(p,q) = 0$ *si i només si* $p = q$

on $p, q, r \in M$.

Demostració:
Les tres propietats són conseqüència de la definició de l'ínfim. L'únic que cal demostrar és que si $d(p,q) = 0$, llavors $p = q$. Suposem que no es compleix i ho demostrarem per reducció al absurd. Sigui la bola normal $B_r(p)$ que no conté q (existeix ja que $p \neq q$). Com que $d(p,q) = 0$, ha d'existir una corba c de longitud menor que $r > 0$ unint els dos punts, però el segment de c dins la bola té longitud major que r ja que $q \notin B_r(p)$, per tant hem arribat a una contradicció.

□

Degut a al proposició 1.2, si $p_0 \in M$, la funció $f : M \to \mathbb{R}$ on $f(p) = d(p, p_0)$ és contínua. A més, si existeix la geodèsica γ que minimitza la distància entre dos punts qualsevol no necessàriament propers p i q (situació que en general no es dóna), llavors $d(p,q) = l(\gamma)$.

Cal notar que les isometries d'una varietat sobre si mateixa preserven la distància.

Observació 1.2. En el text les varietats completes són geodèsicament completes. Cal no confondre amb els espais mètrics complets tot i que com veurem són propietats equivalents. Els espais mètrics són complets si tota successió de Cauchy hi convergeix.

Ara estem en condicions d'enunciar el Teorema de Hopf-Rinow.

Teorema 1.1. *(Hopf-Rinow)*
Sigui M un espai mètric amb la noció de distància d i sigui $p \in M$.

Les propietats (a), (b), (c), (d), (e) són equivalents i impliquen la propietat (f).

(a) exp_p està definit a tot T_pM.

(b) Els subconjunts de M tancats i acotats són compactes.

(c) M és un espai mètric complet.

(d) M és geodèsicament complet.

(e) Existeix una seqüència $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n \subset M$ de subespais de M on $\cup_n K_n = M$, tal que si $q_n \notin K_n$ $\forall n$, llavors $d(p, q_n) \to \infty$.

(f) Per tot $q \in M$ existeix una geodèsica γ de p a q tal que $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demostració:

$(a) \Rightarrow (f)$

Sigui $d(p, q) = r$ i sigui $B_\delta(p)$ la bola normal a p amb $S_\delta(p) = S$ la seva vora. Sigui $x_0 \in S$ el punt tal que la funció contínua $d(q, x)$, $x \in S$, es minimitza. Llavors $x_0 = exp_p \delta v$, on $v \in T_pM$ i $|v| = 1$.

Prenem γ la geodèsica tal que $\gamma(s) = \exp_p sv$. Aleshores, com a continuació veurem, $\gamma(r) = q$.

Considerem l'equació

$$d(\gamma(s), q) = r - s \tag{1.1}$$

i sigui $A = \{s \in [0, r]; (1.1) \text{ es compleix}\}$.

Notem que $s = 0 \in A$, per tant $A \neq \emptyset$ i que A és un tancat de $[0, r]$.

Sigui $s_0 \in A$. Veurem que si $r > s_0$, llavors $\exists \delta' > 0$ prou petit tal que $s_0 + \delta' \in A$. Això implica que el suprem de A és r, i al ser A tancat, $r \in A$. Per tant, tal i com volíem veure, $\gamma(r) = q$.

Manca veure que $s_0 + \delta' \in A$.
Sigui $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ la bola normal a $\gamma(s_0)$ amb S' la seva vora. Sigui $x'_0 \in S'$ el punt tal que la funció $d(q, x')$, $x' \in S'$ es minimitza. N'hi ha prou en mostrar que $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$. De fet, $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$ implica que

$$r - s_0 = \delta' + d(x'_0, q) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), q) \tag{1.2}$$

ja que $d(\gamma(s_0), q) = \delta' + min\{d(x, q)\} = \delta' + d(x'_0, q)$ i $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$.

Notem que degut a la desigualtat triangular i a (1.2),

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$$

Per altra banda, la corba c que uneix p amb x'_0 de manera que entre p i $\gamma(s_0)$ segueix la geodèsica γ i entre $\gamma(s_0)$ i x'_0 segueix la geodèsica radial té longitud $s_0 + \delta'$. Així que, com que $s_0 + \delta'$ és una cota inferior de la distància entre p i x'_0 i la longitud d'una corba que uneix els punts fixa una cota superior, $d(p, x'_0) = s_0 + \delta'$. Com que la corba c minimitza la distància, és una geodèsica que podem entendre com una extensió de γ. Per tant $\gamma(s_0 + \delta') = x'_0$ que és el que volíem mostrar per veure que $s_0 + \delta' \in A$.

$(a) \Rightarrow (b)$

Sigui $A \subset M$ tancat i acotat. Considerem B una bola de centre p amb la distància d tal que $A \subset B$. Per (f), existeix la bola $B_r(0) \subset T_pM$ tal que $B \subset exp_p\overline{B_r(0)}$. La imatge continua d'un compacte és compacte, per tant $exp_p\overline{B_r(0)}$ és compacte. Llavors A és compacte ja que és un tancat contingut en un compacte.

$(b) \Rightarrow (c)$
Un conjunt $\{p_n\}$ on els $p_i \in M$ formen una successió de Cauchy és acotat. Per tant, per (b) té clausura compacte. Llavors $\{p_n\}$ conté una subseqüència convergent i com que és de Cauchy, convergeix.

$(c) \Rightarrow (d)$
Ho veurem per reducció al absurd. Suposem que M no és geodèsicament completa. Aleshores hi ha alguna geodèsica normalitzada $\gamma(s)$ que no està definida per $s \geq s_0 \in \mathbb{R}$.
Sigui $\{s_n\}$ una successió convergent a s_0 on $s_i < s_0$. Si prenem $\epsilon > 0$, existeix un índex i_0 tal que per $i, j > i_0$ tenim que $|s_i - s_j| < \epsilon$. Se'n segueix que

$$d(\gamma(s_i), \gamma(s_j)) \leq |s_i - s_j| < \epsilon$$

i per tant la successió $\{\gamma(s_n)\}$ és de Cauchy.
Suposem ara que M és un espai mètric complet amb d, per tant $\{\gamma(s_n)\} \to p_0 \in M$.
Sigui (W, d) un entorn totalment normal de p_0. Prenem i_1 tal que si $i, j > i_1$, llavors $|s_i - s_j| < \delta$ i $\gamma(s_i), \gamma(s_j) \in W$. Aleshores existeix una única geodèsica g de longitud menor a δ unint $\gamma(i)$ i $\gamma(j)$. Clarament $\gamma = g$ allà on γ està definida. Com que $exp_{(s_i)}$ és un difeomorfisme a $B_\delta(0)$ i $exp_{\gamma(s_i)}(B_\delta(0)) \supset W$, g extén γ més enllà de s_0 i hem arribat a una contradicció.

$(d) \Rightarrow (a)$
Si les geodèsiques $\gamma(t)$ estan definides $\forall t \in \mathbb{R}$ aleshores clarament els mapes exponencials a qualsevol punt estan definits a tot l'espai tangent.

$(b) \Leftrightarrow (e)$
Topològicament són equivalents les dues propietats.

□

Degut al teorema anterior, si M és compacte llavors també és completa. A més, una subvarietat tancada M' d'una varietat completa M és completa. En particular, les varietats euclidianes són completes i per tant les seves subvarietats tancades també ho són.

Com aplicació del teorema de Hopf-Rinow podem demostrar el següent fet global.

Teorema 1.2. *(Hadamard)*
Sigui M una varietat Riemanniana completa de dimensió n, simplement connexa, amb curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, $\forall p \in M$ i $\forall \sigma \subset T_pM$.

Llavors existeix un difeomorfisme entre M i $\mathbb{R}^n$. Concretament $exp_p : T_pM \to M$ és un difeomorfisme.

Demostració:
Necessitem els dos resultats següents que són d'interès per si sols. Les demostracions dels mateixos es poden trobar a [2], secció 7.3.

1. Sigui M una varietat Riemanniana completa amb $K(p,\sigma) \leq 0$, $\forall p \in M$ i $\forall \sigma \subset T_pM$, llavors el mapa exponencial $exp_p : T_pM \to M$ és un difeomorfisme local.

2. Sigui M una varietat Riemanniana completa, sigui N una varietat Riemanniana i sigui $f : M \to N$ un difeomorfisme local tal que: $\forall p \in M$ i $\forall v \in T_pM$ tenim que $|df_p(v)| \geq |v|$.
Aleshores f és una *aplicació recobridora*: $\forall p \in N$, $\exists$ un entorn obert U de p tal que $f^{-1}(U)$ és una unió disjunta d'oberts de M.

Ara ja podem demostrar el teorema. Com que M és completa, $exp_p : T_pM \to M$ està definida $\forall p \in M$. Pel resultat 1, exp_p és un difeomorfisme local. Aleshores podem introduir una mètrica $<,>$ adequada a T_pM de manera que exp_p sigui una isometria local a p. Pel Teorema de Hopf-Rinow ($(a) \Rightarrow (d)$), M amb tal mètrica $<,>$ ha de ser una varietat Riemanniana geodèsicament completa i les geodèsiques que passen per l'origen són línees rectes. Pel resultat 2, exp_p és una aplicació recobridora. Llavors com que M és simplement connexa, exp_p és un difeomorfisme.

$\square$

Determinació de la mètrica mitjançant la curvatura. Teorema de Cartan.

En aquesta secció mostrem el Teorema de Cartan que és un resultat local també necessari per classificar globalment les varietats Riemannianes més senzilles, les de curvatura seccional constant. Veurem com el concepte de mètrica, fundamental en la geometria Riemanniana, es pot determinar a través de la curvatura.

Ens cal certa notació per presentar el teorema de forma clara. Siguin M i $\tilde{M}$ varietats Riemannianes de dimensió n i siguin $p \in M$ i $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Prenem una isometria lineal $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$.

Sigui $V \subset M$ un entorn normal de p tal que $exp_{\tilde{p}}$ està definit a $i \circ exp_p^{-1}(V)$. Definim l'aplicació $f : V \to \tilde{M}$ de manera que, per $q \in V$,

$$f(q) = exp_{\tilde{p}} \circ i \circ exp_p^{-1}(q)$$

Existeix una única geodèsica normalitzada $\gamma : [0,t] \to M$ per cada $q \in V$ on $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$. Denotem P_t el transport paral.lel per γ de $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$ i denotem $\tilde{P}_t$ el transport paral.lel per la geodèsica normalitzada $\tilde{\gamma} : [0,t] \to \tilde{M}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ i $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$.

Definim $\phi_t : T_qM \to T_{f(q)}\tilde{M}$ de manera que, per $v \in T_qM$,

$$\phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v)$$

Finalment denotem R i $\tilde{R}$ les curvatures de M i $\tilde{M}$ respectivament.

Teorema 1.3. *(Cartan)*
Amb la notació anterior, si $\forall q \in V$ *i* $\forall x, y, u, v \in T_qM$ *es compleix que*

$$< R(x,y)u, v >=< \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) >$$

aleshores $f : V \to f(V) \subset \tilde{M}$ *és una isometria local. A més,* $df_p = i$.

Demostració:
Sigui $q \in V$ i sigui $\gamma : [0,l] \to M$ la geodèsica normalitzada amb $\gamma(0) = p, \gamma(l) = p$. Sigui $v \in T_qM$ i $J(t)$ un camp de Jacobi sobre γ tal que $J(0) = 0$ i $J(l) = v$.

Prenem $e_1, ..., e_n = \gamma'(0)$ una base ortonormal de T_pM i sigui $e_i(t)$, $i = 1, ..., n$, el transport paral.lel de e_i a través de γ.

Escrivim el camp de Jacobi en la base presa: $J(t) = \sum_i y_i(t)e_i(t)$. Llavors

$$\frac{D^2J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t)e_i(t)$$

i per altra banda

$$R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j < R(\gamma', J)\gamma', e_j > e_j = \sum_{ij} y_i < R(\gamma', e_i)\gamma', e_j > e_j$$

Aleshores, per l'equació de Jacobi (0.16), el camp J ha de complir per $j = 1, ..., n$:

$$y_j'' + \sum_i < R(e_n, e_i)e_n, e_j > y_i = 0$$

Sigui ara $\tilde{\gamma} : [0,l] \to \tilde{M}$ la geodèsica normalitzada tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ i $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Prenem $\tilde{J}(t)$ el camp sobre $\tilde{\gamma}$ de manera que $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$, per $t \in [0,l]$.

Sigui $\tilde{e}_j = \phi_t(e_j(t))$, com que ϕ_t és lineal, podem escriure $\tilde{J}(t) = \sum_i y_i(t)\tilde{e}_i$.

Per hipòtesis del teorema, $< R(e_n, e_i)e_n, e_j >=< \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j >$. Podem reescriure l'equació de Jacobi per $j = 1, ..., n$,

$$y_j'' + \sum_i < \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j > y_i = 0$$

$\tilde{J}$ és un camp de Jacobi ja que compleix l'equació (0.16) i està definit sobre $\tilde{\gamma}$ amb $\tilde{J}(0) = 0$. El transport paral.lel és una isometria, per tant $|\tilde{J}(l)| = |J(l)|$.

Només ens manca veure que $\tilde{J}(l) = df_q(v) = df_q(J(l))$.

Com que $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$, tenim que $\tilde{J}'(0) = i(J'(0))$. Per altra banda $J(t)$ i $\tilde{J}(t)$ són camps de Jacobi que s'anul.len per $t = 0$. Aquests camps ([2], secció 5.2) es poden expressar com

$$J(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$$

$$\tilde{J}(t) = (dexp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\tilde{J}'(0))$$

Aleshores, tal i com volíem mostrar

$$\tilde{J}(l) = (dexp_{\tilde{p}})_{l\tilde{\gamma}'(0)} li(\tilde{J}'(0)) = (dexp_{\tilde{p}})_{l\tilde{\gamma}'(0)} \circ i \circ ((dexp_p)_{l\gamma'(0)})^{-1}(J(l)) = df_q(J(l))$$

□

Notem que en les condicions del teorema, si exp_p i $exp_{\tilde{p}}$ són difeomorfismes llavors f és una isometria definida $\forall p \in M$.

Aquest teorema implica que la mètrica es pot determinar localment en termes de la curvatura. Se'n segueixen els següents dos corol.laris que descriuen propietats dels espais de curvatura constant.

Corol·lari 1.1. *Siguin M i $\tilde{M}$ espais de dimensió n amb la mateixa curvatura constant i sigui $p \in M$ i $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Prenem bases ortonormals qualsevols $\{e_j\} \in T_pM$ i $\{\tilde{e}_j\} \in T_p\tilde{M}$, $j = 1, ..., n$.*

Llavors existeix un entorn $V \subset M$ de p, un entorn $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ de $\tilde{p}$ i una isometria $f : V \to \tilde{V}$ tal que $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$.

Demostració:
Prenem la isometria i del teorema 1.3 de manera que $i(e_j) = \tilde{e}_j$ per $j = 1, ..., n$. La condició del teorema sobre la curvatura aleshores es compleix. Així doncs el corol.lari es segueix de la implicació del teorema. □

Corol·lari 1.2. *Sigui M un espai de dimensió n i curvatura constant i siguin $p, q \in M$. Prenem bases ortonormals $\{e_j\} \in T_pM$ i $\{\tilde{f}_j\} \in T_q\tilde{M}$, $j = 1, ..., n$.*

Llavors existeix un entorn U de p, un entorn V de q i una isometria $g : U \to V$ tal que $dg_p(e_j) = f_j$.

Demostració:
És una aplicació del corol.lari 1.1 on l'aplicació es defineix d'un espai M sobre si mateix.

Observació 1.3. Els difeomorfismes $f : M \to \tilde{M}$ que preserven la curvatura en el sentit del teorema 1.3: $< R(X,Y)Z, T >_p = < \tilde{R}(df_p(X), df_p(Y))df_p(Z), df_p(T) >_{f(p)}$, $\forall p \in M$ i $\forall X, Y, Z, T \in T_pM$ no necessàriament són isometries.

Classificació dels espais de curvatura constant.

Les *formes espacials* són les varietats completes amb curvatura seccional K constant. En aquesta secció demostrarem el resultat més rellevant del capítol que ens permet classificar-les: Tota forma espacial és isomètrica a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ $(K = 0)$, a l'espai esfèric S^n $(K > 0)$ o a l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}^n$ $(K < 0)$. És senzill demostrar que si multipliquem una mètrica per una constant positiva c, aleshores la curvatura seccional associada es multiplica per $\frac{1}{c}$. Per aquest motiu podem associar als tres espais les curvatures K=0, K=1 i K=-1 respectivament.

Gràcies a aquest teorema de classificació, el problema de identificar totes les varietats completes de curvatura constant es redueix a estudiar certs subgrups del grup d'isometries de $\mathbb{R}^n$, S^n i $\mathbb{H}^n$. Introduirem també notació i algunes definicions que ens seran útils en aquest sentit més endavant, quan ens centrem en l'estudi de $\mathbb{H}^n$.

Observació 1.4. La noció d'espai de curvatura K s'ha d'entendre com un espai mètric complet recobridor de totes les formes espacials que tenen la mateixa curvatura seccional constant K. Es veurà en detall en la demostració del teorema de classificació.

Ens cal aquest resultat previ que té interès per si sol.

Proposició 1.3. *Siguin $f_i : M \to N$, $i = 1, 2$, dues isometries locals de la varietat Riemanniana connexa M a la varietat Riemanniana N.*

Si $\exists p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ i $(df_1)_p = (df_2)_p$, llavors $f_1 = f_2$.

Demostració:
Sigui V un entorn normal de p tal que les restriccions $f_1|_V$ i $f_2|_V$ són difeomorfismes i sigui $\phi = f_1^{-1} \circ f_2 : V \to V$. Aleshores $\phi(p) = p$ i $d\phi_p$ és la identitat. Prenem $q \in V$, existeix un únic $v \in T_pM$ amb $exp_p(v) = q$. Se'n seguueix que $\phi(q) = q$ i per tant $f_1 = f_2$ a V. Com que M és connexa, tot punt $r \in M$ es pot unir amb p per la corva $\alpha : [0, 1] \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ i $\alpha(1) = r$.

Sigui
$$A = \{t \in [0, 1];\ f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t))\ \ i\ \ (df_1)_{\alpha(t)} = (df_2)_{\alpha(t)}\}$$
Pel raonament anterior, sup$A \neq 0$. Si sup$A \neq 1$ repetim el raonament pel punt $\alpha(t_0)$ i arribem a una contradicció. Per tant, sup$A = 1$ i aleshores $f_1(r) = f_2(r),\ \forall r \in M$.

□

Ara estem en condicions de demostrar el teorema de classificació.

Teorema 1.4. *(Classificació de les formes espacials.)*
Sigui M^n una varietat Riemanniana completa amb curvatura seccional constant K.

El recobriment universal $\tilde{M}$ de M, amb la mètrica induïda, és isomètric a:

a) $\mathbb{H}^n$, *si* $K = -1$

b) $\mathbb{R}^n$, *si* $K = 0$

c) S^n, *si* $K = 1$

Demostració:
$\tilde{M}$ és una varietat Riemanniana completa, simplement connexa i amb curvatura constant K. Considerem en primer lloc els casos (a) i (b) i denotem amb $\triangle$ tant $\mathbb{H}^n$ com $\mathbb{R}^n$.

Siguin $p \in \triangle$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ i sigui $i : T_p\triangle \to T_p\tilde{M}$ una isometria lineal. Considerem

$$f = exp_{\tilde{p}} \circ i \circ exp_p^{-1} : \triangle \to \tilde{M}$$

L'aplicació f està ben definida ja que $\triangle$ i $\tilde{M}$ són completes amb curvatura seccional no positiva. Pel teorema de Cartan 1.3, f és una isometria local. Degut al resultat 2 que s'utilitza en la demostració del teorema de Hadamard 1.2, f és un difeomorfisme. Llavors, per la definició d'isometria 0.9, hi ha una isometria entre $\triangle$ i $\tilde{M}$ i per tant (a) i (b) han quedat demostrats.

Anem a demostrar el cas (c). Siguin anàlogament els punts $p \in S^n$ i $\tilde{p} \in \tilde{M}$ i la isometria lineal $i : T_pS^n \to T_p\tilde{M}$. Sigui $q \in S^n$ el punt antipodal de p i considerem l'aplicació

$$f = exp_{\tilde{p}} \circ i \circ exp_p^{-1} : S^n - \{q\} \to \tilde{M}$$

De nou, pel teorema de Cartan 1.3, f és una isometria local. Cal veure que la funció es pot definir bé.

Escollim un punt $p' \in S^n$ tal que $p' \neq p$ i $p' \neq q$. Considerem $\tilde{p}' = f(p')$, $i' = df_{p'}$ i q' l'antipodal de p' i sigui

$$f' = exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ exp_{p'}^{-1} : S^n - \{q'\} \to \tilde{M}$$

Notem que $S^n - (\{q\} \cup \{q'\}) = W$ és connex i $p' \in W$.

Se'n segueix doncs de la proposició 1.3 que $f = f'$ a W. Conseqüentment, podem definir $g : S^n \to \tilde{M}$ tal que

$$g(r) = \begin{cases} f(r), & \text{si } r \in S^n - \{q\} \\ \\ f'(r), & \text{si } r \in S^n - \{q'\} \end{cases}$$

L'aplicació g és una isometria local i per tant és un difeomorfisme local. Per la compacitat de S^n, g és una aplicació recobridora. Com que $\tilde{M}$ és simplement connexa, g és un difeomorfisme. Llavors g és una isometria.

$\square$

És il.lustratiu relacionar el teorema anterior amb la Introducció del treball i la secció *Geodèsiques i Curvatura* de l'apèndix. Els espais esfèric i hiperbòlic són els dos casos de la geometria *no-euclidiana* mencionada. Ambdós espais no compleixen el cinquè postulat d'Euclides. Més concretament, a l'espai esfèric els triangles formats per geodèsiques sumen angles majors que 180° i a l'espai hiperbòlic sumen angles menors que 180°. Així doncs, el cinquè postulat d'Euclides és independent de la resta i, al modificar-lo, segons si la suma dels angles de triangles geodèsics és major, menor o igual a 180°, ens restringim a un dels tres casos d'espai de curvatura constant que hem trobat.

Aquests espais juguen un rol important en la geometria Riemanniana gràcies precisament a aquesta relació amb la geometria no-euclidiana. Aquestes geometries es defineixen sobre varietats Riemannianes amb un grup d'isometries transitives que satisfan l'*Axioma de Lliure Mobilitat*: Sigui $p, \tilde{p} \in M$, siguin γ_1, γ_2 geodèsiques que comencen a p formant un angle α i siguin $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}$ geodèsiques que comencen a $\tilde{p}$ formant un angle α. Aleshores existeix $g \in G$, tal que $g(p) = \tilde{p}$, $g(\gamma_1) = \tilde{\gamma_1}$ i $g(\gamma_2) = \tilde{\gamma_2}$.

L'axioma de lliure mobilitat és el postulat general que satisfan les geometries no-euclidianes i, intuitivament, imposa que hi hagin prous isometries locals per poder sobreposar dos triangles qualsevols d'una mateixa varietat i comprovar si són congruents. Aquesta condició implica clarament que la curvatura seccional sigui constant i és per això que les formes espacials són tant rellevants, perquè atenen a l'estudi de geometries no-euclidianes, que sorgeixen de la primera gran revolució de la geometria després d'Euclides.

Tal i com havíem avançat, el teorema 1.4 simplifica la determinació exhaustiva de les formes espacials a un problema de la teoria de grups. Per mostrar aquest resultat ens cal introduir les següents definicions, que retrobarem al capítol 3.

Definició 1.4. *Un grup G actua (per l'esquerra) sobre un conjunt M si existeix l'aplicació de $G \times M$ a M denotada $G \times M \ni (g, x) \to gx \in M$ tal que*

$$1 \cdot x = x$$

$$(gh)x = h(gx)$$

$\forall x \in M$ i $\forall g, h \in G$, on 1 és la identitat de G.

La òrbita d'un punt $x \in M$ és el conjunt $Gx = \{gx : g \in G\}$.

Diem que G *actua lliurement (sense punts fixos)* sobre M si $gx = x$ implica que $g = 1$. L'acció de G s'anomena *transitiva* si $Gx = M$ i es diu que *actua de manera totalment discontínua* si $\forall x \in M$, existeix un entorn U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ excepte per un nombre finit de $g \in G$.

El conjunt de totes les òrbites es denota com M/G. Notem que hi ha una projecció natural $\pi : M \to M/G$ donada per $\pi(x) = Gx$.

En el context de la geometria Riemanniana, els grups G són grups d'isometries de la varietat M que es poden caracteritzar tal com veurem en els exemples de la següent secció i en el capítol 2 per l'espai hiperbòlic. Al capítol 3 aprofundirem en l'estudi d'aquests grups.

Proposició 1.4. *Sigui M una forma espacial de curvatura K.*

M és isomètrica a $\tilde{M}/\tau$, on $\tilde{M}$ és el recobriment universal de M (S^n, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$) i τ és un subgrup del grup d'isometries de $\tilde{M}$ que hi actua de manera totalment discontínua amb la mètrica induïda per $\pi : \tilde{M} \to \tilde{M}/\tau$.

Demostració:
Considerem el recobriment universal $p : \tilde{M} \to M$, i dotem $\tilde{M}$ de la mètrica induïda per p (aquella en la qual p és una isometria local). Sigui τ el grup de transformacions recobridores del universal p. Llavors τ és un subgrup del grup d'isometries de $\tilde{M}$ i hi actua de forma totalment discontínua. Així doncs podem associar a $\tilde{M}/\tau$ la mètrica induïda per p.

El recobriment p és regular, o sigui que donats $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \tilde{M}$, llavors $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ si i només si $\tau\tilde{x} = \tau\tilde{y}$ que és equivalent a $\pi(x) = \pi(y)$. Les classes d'equivalència donades per p i π a $\tilde{M}$ són per tant les mateixes i indueixen una bijecció $\eta : M \to \tilde{M}/\tau$ de manera que $\pi = \eta \circ p$. Com que π i p són isometries locals η també, i al ser una bijecció, és la isometria entre M i $\tilde{M}/\tau$ que buscàvem.

□

La proposició 1.4 és el resultat que ens assegura que determinant tots els subgrups del grup d'isometries que actuen de manera totalment discontínua, podem determinar totes les formes espacials de S^n, de $\mathbb{H}^n$ o de $\mathbb{R}^n$.

Observació 1.5. La determinació d'aquests subgrups és un problema complicat. El problema esfèric ($\tilde{M} = S^n$) està sol.lucionat a [4]. Al capítol 3 s'estudien els subgrups del grup d'isometries de $\mathbb{H}^n$ que és un dels objectius d'aquest treball.

Espais euclidià i esfèric.

Amb afany de mostrar exemples concrets i aclaridors de les idees contingudes en l'apèndix i el primer capítol, presentem aquí les característiques principals dels espais euclidià i esfèric. Primer presentarem l'euclidi, i com veurem, hi recorrerem per definir l'esfèric.

El tercer i darrer cas d'espai de curvatura constant, l'hiperbòlic, no l'introduïm encara ja que l'estudiarem en profunditat en els capítols posteriors. Tot i així, les analogies que hi trobarem amb els espais presentats aquí i les seves diferències són il.lustratives de cara a la presa de contacte amb l'espai hiperbòlic que és el de més abstracte comprensió.

L'espai euclidià $\mathbb{R}^n = E^n$ és el més intuitiu i s'utilitza de referència alhora de construir sistemes de coordenades tal i com es pot veure a l'apèndix. De fet, les definicions següents són els prototips que inspiren les definicions generals de la geometria Riemanniana. Trivialment, els punts s'identifiquen amb vectors de $\mathbb{R}^n$ i els seus espais tangents són alhora l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$.

La mètrica associada es defineix com $g_{ij}(x_1, ...x_2) = \delta_{ij}$. Així doncs, siguin els vectors $u = (u_1, ..., u_n)$, $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, el *producte intern de la mètrica euclidea* es defineix com

$$< u, v >= u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \tag{1.3}$$

Donat un vector v en una varietat qualsevol V, es defineix la seva *norma euclídea* com $|v| =< v, v >^{1/2}$

Recordem la desigualtat de Cauchy: $| < x, y > | \leq |x|\ |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on la igualtat es compleix si els vectors són linealment dependents. Se'n segueix que hi ha un únic real $\theta(x, y)$ tal que $x \cdot y = |x|\ |y| \cos\theta(x, y)$. Aquest real $\theta(x, y)$ s'anomena *angle euclidià entre x i y.*

La *distància euclidea* d_E entre dos punts $x, y \in E^n$ és

$$d_E(x, y) = |x - y| \tag{1.4}$$

Ara caracteritzarem el grup d'isometries de E^n (de l'euclidi sobre si mateix). Les aplicacions $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ són *translacions* si són de la forma $\phi(x) = a + x$ on $a \in \mathbb{R}^n$ i són *transfomacions ortogonals* si $\phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Donada una base es pot associar a una transformació ortogonal la seva matriu ortogonal A de manera que $\phi(x) = Ax$.

Proposició 1.5. *L'aplicació $\phi : E^n \to E^n$ és una isometria si i només si, $\forall x \in E^n$, és de la forma $\phi(x) = a + Ax$, on $a = \phi(0) \in \mathbb{R}^n$ és la imatge de l'origen i A és una matriu ortogonal.*

Demostració:
Suposem que ϕ és una isometria, o sigui que preserva les distàncies. $A = \phi - \phi(0)$ també preserva les distàncies i $A(0) = 0$. Llavors A preserva les normes amb el producte intern euclidià ja que $|Ax| = |A(x) - A(0)| = |x - 0| = |x|$. Aleshores

$$2Ax \cdot Ay = |Ax|^2 + |Ay|^2 - |Ax - Ay|^2 = |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2x \cdot y$$

per tant A és ortogonal i és tal que $\phi(x) = \phi(0) + Ax$.

Recíprocament, si ϕ és de la forma donada, aleshores és una transformació ortogonal seguida d'una translació. La composició d'isometries és una isometria. Manca veure que la translació és una isometria (ho és ja que és una aplicació bijectiva que preserva les distàncies i per tant preserva el producte intern) i que la transformació ortogonal també (ho és perquè transforma les bases ortonormals de qualsevol espai tangent en bases ortonormals).

□

L'espai euclidià és *homogeni*, ja que per tot parell de punts $x, y \in E^n$ hi ha una isometria ϕ de E^n tal que $\phi(x) = y$, que és una translació.

Finalment presentarem formalment les geodèsiques de E^n que són les rectes de l'espai.

Proposició 1.6. *Siguin $x, y \in E^n$ i sigui $\gamma : [a, b] \to E^n$ tal que $\gamma(a) = x$ i $\gamma(b) = y$. La corba γ és una geodèsica normalitzada si i només si satisfà l'equació*

$$\gamma(t) = x + (t - a)\frac{(y - x)}{|y - x|}$$

o equivalentment el seu camp de velocitats $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ és constant de norma 1.

Demostració:
Suposem que γ és una geodèsica normalitzada i fixem $l = b - a$. Definim la corva $\beta : [0, l] \to E^n$ tal que $\beta(s) = \gamma(a+s) - x$. Aleshores β és una geodèsica normalitzada amb $\beta(0) = 0$ i $|\beta(s)| = s$, $\forall s \in [0, l]$.

Expandim l'equació anterior i obtenim $|\beta(s) - \beta(l)|^2 = (s - l)^2$. Se'n segueix que $\beta(s) \cdot \beta(l) = sl = |\beta(s)||\beta(l)|$. Llavors, per la desigualtat de Cauchy, $\beta(s)$ i $\beta(l)$ són linealment dependents. Així doncs $\exists k \geq 0$ tal que $\beta(s) = k\beta(l)$. Operant les normes, tenim que $k = s/l$.

Sigui $t = a + s$, amb tot

$$\gamma(t) - x = \beta(t - a) = (t - a)\frac{(y - x)}{|y - z|}$$

tal i com volíem mostrar.

Clarament γ és la sol.lució de l'equació diferencial $\gamma' = \frac{(y-x)}{|y-x|}$, o sigui que $|\gamma'| = 1$.

En el sentit recíproc, tenim que γ' és constant i aleshores $\gamma'(t) = \gamma'(a)$. Integrem aquesta equació i obtenim $\gamma(t) - \gamma(a) = (t - a)\gamma'(a)$. Així doncs, $\forall s, t \in [a, b]$, es compleix que $|\gamma(t) - \gamma(s)| = |(t - s)\gamma'(0)| = |t - s|$, i per tant γ és una geodèsica normalitzada.

□

De forma trivial podem comprovar que la velocitat de les geodèsiques trobades té derivada covariant 0. Diferenciem la corba geodèsica per obtenir la seva velocitat $\gamma'(t) = \frac{(y-x)}{|y-x|}$. En l'espai Euclidi, per com són les components de la mètrica, els símbols de Christofel són nuls i llavors la derivada covariant coincideix amb la usual (veure expressions (0.11) i (0.12)). La velocitat és constant $\forall t \in \mathbb{R}$, per tant la seva derivada, que coincideix amb la covariant, és 0.

Per veure que la curvatura seccional és 0 cal notar que els coeficients de la curvatura són tots nuls si els símbols de Christoffel són nuls (veure expressió (0.14)). Aleshores la curvatura seccional és nul.la també ja que està definida amb la curvatura segons (0.15).

L'espai esfèric és un bon exemple de forma espacial no trivial. El model estàndard per descriure'l és l'esfera de radi unitat S^n continguda en $\mathbb{R}^{n+1}$ definida com:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

La mètrica associada, amb la qual es defineix S^n, és la mateixa que l'euclídea a $\mathbb{R}^{n+1}$ (amb el producte intern segons (1.3)). La distància esfèrica també coincideix amb l'euclidea (1.4) però es redefineix de manera intrínseca a S^n sense requerir l'entorn euclidi.

Siguin $x, y \in S^n$ i sigui $\theta(x, y)$ l'angle euclidi entre x i y. La *distància esfèrica* d_S entre els punts x, y és

$$d_S(x, y) = \theta(x, y) \tag{1.5}$$

Notem que $0 \leq d_s(x, y) \leq \pi$ i $d_s(x, y) = \pi$ si i només si $y = -x$ (cas en el qual anomanem que els punts són *antipodals*).

Caracteritzem el grup d'isometries de S^n (de l'esfèric en ell mateix).

Proposició 1.7. *Tota transformació ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$ es restringeix a una isometria de S^n, i tota isometria de S^n s'extén a una única transformació orotogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostració:
Les aplicacions $\phi : S^n \to S^n$ són isometries si preserven la mètrica euclídea pels punts de S^n. Com hem vist, les transformacions ortogonals són isometries, per tant al restringir-les a S^n són isometries de l'esfèric.

Recíprocament, la matriu ortogonal que transforma els punts de S^n transforma ortogonalment tots els punts de $\mathbb{R}^{n+1}$. Per tant la isometria a l'esfèric es pot extendre a l'euclidi augmentant una dimensió.

□

Per acabar presentarem les geodèsiques de l'espai esfèric. Ens calen algunes definicions prèvies.

Els *cercles màxims* de S^n són les interseccions de S^n amb un subespai vectorial bidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notem que un cercle màxim està definit unívocament per dos punts diferents i linealment independents de S^n. Si són linealment dependents és que són antipodals. Per $n > 1$ hi ha un continu de cercles màxims contenint x i $-x$. A més, tot cercle màxim que conté un punt també conté el seu antipodal.

Tres punts $x, y, z \in S^n$ són *esfèricament colineals* si i només si hi ha un cercle màxim contenint x, y, z. Es pot demostrar fàcilment que si $\theta(x, y) + \theta(y, z) = \theta(x, z)$, aleshores x, y, z són esfèricament colineals.

Proposició 1.8. *Sigui $\gamma : [a, b] \to S^n$ una corba tal que $b - a < \pi$.*

γ és una geodèsica normalitzada si i només si $\exists x, y \in S^n$ vectors ortogonals tals que γ satisfà l'equació

$$\gamma(t) = (\cos(t - a))x + (\sin(t - a))y$$

o equivalentment γ compleix l'equació diferencial $\gamma'' + \gamma = 0$.

Demostració:
Sigui A una transformació ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Tenim que $(A\gamma)' = A\gamma'$. Llavors l'equació diferencial $\gamma'' + \gamma = 0$ es satisfà només si $A\gamma$ la satisfà. Per tant podem sotmetre γ a les transformacions ortogonals que volguem.

Suposem que γ és una geodèsica normalitzada. Sigui $t \in [a, b]$. Aleshores

$$\theta(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a = (t - a) + (b - t) = \theta(\gamma(a), \gamma(t)) + \theta(\gamma(t), \gamma(b))$$

Així doncs $\gamma(a)$, $\gamma(t)$ i $\gamma(b)$ són esfèricament colineals. Com que $\theta(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a < \pi$, els punts $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ no són antipodals i per tant defineixen un únic cercle màxim S en S^n. La imatge de γ està continguda en S^n.

Assumim per simplicitat que n=1 i apliquem una transformació ortogonal de manera que $\gamma(a) = e_1$ el primer vector d'una base ortonormal. Llavors

$$e_1 \cdot \gamma(t) = \gamma(a) \cdot \gamma(t) = \cos\theta(\gamma(a), \gamma(t)) = \cos(t-a)$$

Per tant $e_2 \cdot \gamma(t) = \pm\sin(t-a)$ i com que γ és contínua i $b-a<\pi$, no hi ha canvi de signe $\forall t$. Així doncs podem assumir que

$$\gamma(t) = (\cos(t-a))e_1 + (\sin(t-a)) \pm e_2$$

tal i com volíem mostrar.

Equivalentment les geodèsiques normalitzades γ compleixen l'equació diferencial.

Veiem ara el recíproc. Suposem que existeixen $x, y \in S^n$ tals que

$$\gamma(t) = (\cos(t-a))x + (\sin(t-a))y$$

Siguin s i t tals que $a \leq s \leq t \leq b$. Aleshores

$$\cos\theta(\gamma(s), \gamma(t)) = \gamma(s)\cdot\gamma(t) = \cos(s-a)\cos(t-a) + \sin(s-a)\sin(t-a) = \cos(t-s)$$

Com que $t-s<\pi$, tenim que $\theta(\gamma(s), \gamma(t)) = t-s$. Llavors γ és una geodèsica normalitzada.

$\square$

De la proposició 1.8 es segueix directament que una funció $\lambda : \mathbb{R} \to S^n$ defineix una geodèsica a S^n si i només si existeixen vectors ortogonals $x, y \in S^n$ tals que $\lambda(t) = (\cos t)x + (\sin t)y$.

Així doncs, les geodèsiques γ de S^n són els seus cercles màxims. Podem comprovar que la derivada covariant de la velocitat γ' és 0. En tot punt $\gamma(t) \in S^n$, per definició, la derivada covariant de la velocitat és nul.la si i només si la derivada usual de la velocitat és perpendicular a $T_{\gamma(t)}S^n$. Calculem $\gamma'(t) = -(\sin(t-a))x + (\cos(t-a))y$ i la derivada usual de la velocitat $\gamma''(t) = -(\cos(t-a))x - (\sin(t-a))y$. Fixat un punt $\gamma(t_0)$, les velocitats $\eta'(t)$ a $\gamma(t_0)$ de totes les geodèsiques $\eta(t)$ que hi passen ($\exists t_\eta$ tal que $\eta(t_\eta) = \gamma(t_0)$), que formen l'espai tangent, són clarament perpendiculars a $\gamma''(t)$ (a S^2 és intuïtiu i el resultat es pot extrapolar a S^n). Per tant la derivada covariant és nul.la.

Manca veure que la curvatura seccional és positiva. Cal recórrer a les inmersions isomètriques entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ i a la segona forma fundamental associada (observació 0.7). Una demostració es pot trobar a [2], exemple 2.8 del capítol 6.

Observació 1.6. Un altre model de l'espai de curvatura positiu il.lustratiu és l'espai el.líptic ([1], secció 2.2).

2 Espai Hiperbòlic

Introducció

La intenció principal d'aquest capítol és presentar una visió el més intuitiva possible de la geometria de l'espai hiperbòlic n-dimensional $\mathbb{H}^n$. Aquest espai, tal i com ens ha aparegut en el teorema de classifiació, es caracteritza per la curvatura negativa. Per concebre'l reduint el nivell d'abstracció, podem definir-lo encabit en l'espai euclidi escollint una mètrica adequada. Hi ha diverses maneres equivalents de ferho que evidencien unes propietats o unes altres. Obtenim així els models de l'espai hiperbòlic. L'objectiu del capítol és familiaritzar el lector amb aquests models.

En la primera secció farem una breu descripció en dos dimensions dels quatre models més rellevants. Amb afany de donar consistència al text, pel model del semi-espai superior calcularem la curvatura seccional per una dimensió arbitrària n. En la següent secció aprofundirem en el model de l'hiperboloide que generalitzarem a n dimensions seguint [1], capítol 3. En la darrera secció, corresponent a [1], capítol 4, presentarem les eines de la geometria inversiva, que es defineixen partint de l'espai euclidià. Com veurem, ens seran útils per estudiar les invariàncies de l'espai hiperbòlic. A més, ens permetran generalitzar amb rigor els models conforme i del semi-espai superior i veure la forma que hi prenen les isometries.

Models del pla hiperbòlic.

L'espai hiperbòlic té una naturalesa abstracte i poc intuitiva. Per aquest motiu en aquesta secció comencem introduint els quatre models que representen l'espai hiperbòlic només en dos dimensions. Els models són equivalents, descriuen un espai bidimensional de curvatura seccional constant negativa, però cada un posa en relleu propietats diferents per comparació amb l'espai euclidià.

Per no extendre'ns excessivament, aquí només descriurem rigurosament un dels models, el del semi-pla superior. El generalitzarem per una dimensió arbitrària n i veurem com efectivament la curvatura seccional és negativa.

Els models, per simplicitat, es construeixen recorrent a l'espai euclidià, però no hi ha cap varietat completa bidimensional de curvatura constant negativa continguda a $\mathbb{R}^3$. Conseqüentment els models distorsionen les distàncies euclidianes i no són representacions fidedignes del pla hiperbòlic. Així doncs, cal considerar mètriques no euclidianes com veurem a la secció següent pel model de l'hiperboloide amb l'espai lorentzià.

Per raons històriques comencem amb el *disc projectiu.* Aquest model, tal i com va demostrar Beltrami amb eines de la geometria diferencial, està definit completament en termes de la geometria del pla euclidià i, per tant, és consistent si el pla euclidià ho és. Així doncs, la construcció d'aquest model va ser la primera demostració de que el cinquè postulat d'Euclides és independent de la resta, perqué podem construir noves geometries amb curvatures no nul.les (les anomenades *no-euclidianes*) que compleixen tots els axiomes d'Euclides excepte el cinquè.

Els punts del disc projectiu són els punts dins d'un cercle fixat en el pla euclidià que s'anomena *cercle de l'infinit.* La representació de les geodèsiques del plà hiperbòlic al model projectiu estan contingudes en els segments de recta oberts amb els extrems sobre el cercle de l'infinit. Dues geodèsiques són paral.leles entre si sinó es tallen dins del cercle de l'infinit. Notem doncs que al pla euclidià, donada una geodèsica γ (que és una recta) i un punt $p \notin L$, hi ha una sola geodèsica paral.lela a γ que passi per p i, en canvi, en el disc projectiu n'hi ha infinites (veure figura 3.1).

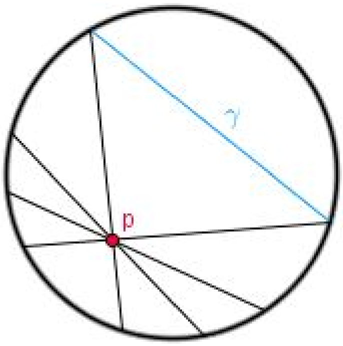

Figura 3.1. Paral.leles a la geodèsica γ que passen pel punt p en el disc projectiu.

Aquest model té l'aventatge que les geodèsiques es representen amb rectes com en el pla euclidià però els angles no coincideixen amb els angles euclidians. Il.lustrem-ho veient com es representen els angles rectes. Sigui γ una geodèsica que no és un diàmetre i sigui p la intersecció de les tangents al cercle de l'infinit que passen pels extrems de γ. Les geodèsiques η tals que al extendre-les fora del disc passen per p formen un angle recte en el punt de tall amb la geodèsica γ (veure figura 3.2).

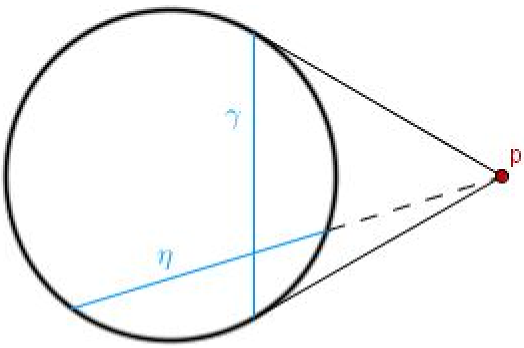

Figura 3.2. En el disc projectiu, les geodèsiques γ i η són perpendiculars, formen un angle recte.

Procedim a mencionar un altre model que més endavant generalitzarem mitjançant la geometria inversiva: el *disc conforme* B^2. Els punts d'aquest model estan també dins d'un cercle fixat en el plà euclidià però els angles coincideixen amb els angles euclidians. Les geodèsiques estan contingudes en els diàmetres oberts del cercle o bé en els segments d'arc circular d'extrems perpendiculars al cercle. Aquest model també distorsiona les distàncies a mesura que ens allunyem del centre. L'artista *Maurits Cornelis Escher* és l'autor d'unes representacions molt il.lustratives del disc conforme, també conegut com el plà de Poincaré.

Tant el disc projectiu com el disc conforme presenten simetria rotacional respecte els centres dels respectius cercles.

Disposem també del model de l'*hiperboloide* H^2. Els punts $p = (x, y, z)$ del model són la fulla positiva $(x > 0)$ de l'hiperboloide d'$\mathbb{R}^3$ definit per $x^2 - y^2 - z^2 = 1$. Les geodèsiques estan contingudes en les branques de les hiperboles obtingudes intersectant l'hiperboloide amb un pla euclidià que passa per l'origen. Les nocions d'angle i distància coincideixen amb les de l'espai Lorentzià tridimensional. Aquest model amb la mètrica lorentziana és el que utilitzarem en la següent secció per descriure en profunditat l'espai hiperbòlic.

Finalment tenim el model del *semi-plà superior* que denotem U^2. Els punts d'aquest model són els nombres complexos per sobre de l'eix real del plà complex. Les geodèsiques estan contingudes en les rectes ortogonals a l'eix real o bé en els semicercles centrats a l'eix real (veure figura 3.3). Aquest model presenta simetria translacional enlloc de rotacional. Concretament les aplicacions de la forma $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$ són les isometries. Les translacions euclidianes en són un exemple. A causa d'aquesta simetria, el model presenta una gran distorció de les distàncies a mesura que ens allunyem de l'eix real.

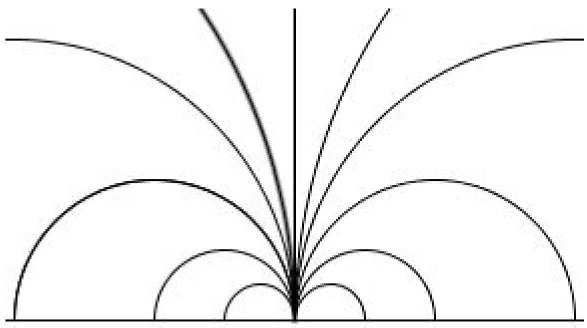

Figura 3.3. Representació de geodèsiques en el model del semi-pla superior U^2.

Anem a veure la generalització del semi-pla superior a una dimensió n amb detall. Definim $U^n = \{(x_1, ..., x_n) \in E^n; x_n > 0\}$. Introduïm la mètrica

$$g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2} \tag{2.1}$$

Notem que U^n és simplement connexa.

A continuació comprovarem que la curvatura seccional és constant i val -1.

Per facilitar el càlcul considerem la definició general següent: Siguin dues mètriques $<,>$ i $<<,>>$ d'una varietat diferenciable M. Són *conformes* si existeix una funció diferenciable i definida positiva $f: M \to \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in M$ i $\forall u, v \in T_pM$

$$< u, v >_p = f(p) << u, v >>_p$$

Per exemple la mètrica de U^2 és conforme amb la mètrica del pla euclidià.

Considerem a U^n la mètrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2}$ on F és una funció diferenciable i definida positiva de U^n. Considerem la matriu inversa de la mètrica $g^{ij} = F^2\delta_{ij}$ i imposem $\log F = f$. En aquestes condicions, denotant $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$, tenim que

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik}\frac{2}{F^3}\frac{\partial F}{\partial x_j} = -2\frac{\delta_{ik}}{F^2}f_j$$

Calculem els símbols de Christoffel utilitzant l'expressió (0.11):

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m}g_{ij}\}g^{mk} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_m \{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\}F^2 = -\delta_{jk}f_i - \delta_{ki}f_j + \delta_{ij}f_k$$

Se'n segueix que si els tres índex i, j, k són diferents llavors $\Gamma^k_{ij} = 0$. A més, si dos índex coincideixen, tenim que $\Gamma^i_{ij} = -f_j$, $\Gamma^j_{ii} = f_j$, $\Gamma^j_{ij} = -f_i$. Si els tres índex coincideixen $\Gamma^i_{ii} = -f_i$

Ara calculem els coeficients de la curvatura.
Denotem $R_{ijks} =< R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s} >= \sum_l R^l_{ijk}g_{ls}$. Usant l'expressió (0.14) obtenim:

$$R_{ijij} = \sum_l R^l_{iji}g_{lj} = R^j_{iji}g_{jj} = R^j_{iji}\frac{1}{F^2} =$$

$$= \frac{1}{F^2}\{\sum_l \Gamma^l_{ii}\Gamma^j_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{ji}\Gamma^j_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^j_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^j_{ji}\}$$

Ara denotem $\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^j_{ii} = \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = f_{jj}$ i $\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^j_{ji} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = -f_{ii}$. Obtenim que

$$F^2R_{ijij} = -\sum_{l,\ l\neq i,\ l\neq j} f_lf_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} = -\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}$$

Notem que si els quatre índex són diferents $R_{ijkl} = 0$ i si tres índex són diferents tenim que $R^i_{ijk} = -f_kf_j - f_{kj}$, $R^j_{ijk} = f_if_k + f_{ki}$, $R^k_{ijk} = 0$.

Finalment, la curvatura seccional (0.15) respecte el pla generat per $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ (que són ortogonals) és

$$K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij}F^4 = (-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj})F^2$$

Ara particularitzem el cas de la mètrica (2.1) on $F^2 = x_n^2$. Llavors $f = \log x_n$. En aquest cas,

- Si $i \neq n$ i $j \neq n$,

$$K_{ij} = (-\frac{1}{x_n^2})x_n^2 = -1$$

- Si $i = n$ i $j \neq n$,

$$K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn})F^2 = (-\frac{1}{x_n^2})x_n^2 = -1$$

- Si $i \neq j$ i $j = n$ obtenim de nou que $K_{in} = -1$.

Es pot demostrar que la curvatura seccional és constant $K(p,\sigma) = K_0$ si i només si $\forall \sigma \subset T_pM$, tenim que $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$ per $i \neq j$ i $R_{ijkl} = 0$ en els altres casos. És la situació que hem trobat i per tant la curvatura seccional de U^n és constant igual a -1 tal com volíem demostrar.

Observem que les transformacions que involucren només les variables $x_1, ..., x_{n-1}$ no modifiquen la mètrica (2.1). Amb aquest resultat és inmediat comprovar que les geodèsiques de U^n són les rectes perpendiculars a l'hiperplà $x_n = 0$ o bé els cercles sobre plans perpendiculars a $x_n = 0$.

Veiem-ho explícitament per U^2. Considerem el segment de l'eix imaginari $\gamma : [a,b] \to U^2$, $a > 0$, definit com $\gamma(t) = (0,t)$. Tot segment $c : [a,b] \to U^2$ definit com $c(t) = (x(t), y(t))$ tal que $c(a) = (0,a)$ i $c(b) = (0,b)$ té longitud major que γ.

$$l(c) = \int_a^b |\frac{dc}{dt}|dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\frac{dt}{y} \geq \int_a^b |\frac{dy}{dt}|\frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = l(\gamma)$$

Per tant γ minimitza la longitud de les corves entre $(0,a)$ i $(0,b)$. Així doncs, en un espai complet com U^2, és una geodèsica.

Considerem ara les isometries de U^2. Prenem $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$ on $z \in \mathbb{C}$. Aquestes transformacions envien l'eix imaginari positiu a semicerles centrats a l'eix real o a rectes verticals. Aquestes corbes són geodèsiques també de U^2 ja que les isometries no canvien la distància entre punts i envien les geodèsiques a geodèsiques. De fet són totes les geodèsiques de U^2 ja que $\forall p \in U^2$ i en tota direcció de T_pU^2 hi ha una geodèsica de la forma considerada (i són úniques).

Hiperboloide H^n.

En aquesta secció generalitzarem el model de l'hiperboloide per una dimensió arbitrària n tot introduint el producte Lorentzià, que dóna lloc a una nova mètrica.

Definició 2.1. *Siguin els vectors* $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

El producte intern Lorentzià entre x i y és el nombre real definit com:

$$x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \tag{2.2}$$

Denotem per $||x|| = (x \circ x)^{1/2} = (-x_1^2 + |\bar{x}|^2)^{1/2}$ la *norma lorentziana*, on $\bar{x} = (x_2, ..., x_n)$ i la norma $|\ |$ és l'euclídea. Notem que en general pren valors complexos.

L'espai $\mathbb{R}^n$ amb el producte lorentzià es coneix com l'*espai lorentzià n-dimensional* i es denota $\mathbb{R}^{1,n-1}$. En relativitat espacial s'utilitza aquest espai amb 4 dimensions, on les tres últimes s'identifiquen amb l'espai i la primera amb el temps. El conjunt de vectors $x \in \mathbb{R}^4$ tals que $||x|| = 0$ formen l'anomenat *con de llum*. També es defineixen els vectors *temporals* (norma imaginària) i els vectors *espacials* (norma real). El signe de la primera component dels vectors determina si són *positius* o *negatius*. Aquestes definicions donen lloc a interpretacions físiques rellevants.

Les funcions $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tals que $\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ s'anomenen *transformacions Lorentz* i tenen també una importància capdal en molts camps de la física. Se'ls hi associa una matriu A de manera que $\phi(x) = Ax$. Es diu que són *transformacions positives* si deixen invariant el signe de la primera component dels vectors temporals positius. El grup de transformacions positives de $\mathbb{R}^n$ (amb l'operació composició) es denota $PO(1, n-1)$.

Mostrem ara una propietat del producte lorentzià anàloga a la desigualtat de Cauchy del producte escalar que ens serà útil per definir una noció d'angle.

Proposició 2.1. *Siguin $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos vectors temporals tals que x_1 i y_1 tenen el mateix signe (els dos són positius o els dos són negatius).*
Aleshores $x \circ y \leq ||x||\ ||y||$ i la igualtat es dóna si i només si x i y són linealment dependents.

Demostració:
És fàcilment demostrable que les transformacions Lorentzianes positives són transitives sobre el conjunt de vectors temporals. Així doncs, existeix la transformació lorentziana amb matriu A associada tal que $Ax = te_1$. Podem substiruir x i y per Ax i Ay respectivament, ja que les transformacions lorentzianes conserven el producte. Llavors estem en condicions d'assumir que $x = x_1 e_1$. Aleshores

$$||x||^2 ||y||^2 = -x_1^2(-y_1^2 + |\bar{y}|^2) = x_1^2 y_1^2 - x_1^2 |\bar{y}|^2 \leq x_1^2 y_1^2 = (x \circ y)^2$$

La igualtat es compleix si $\bar{y} = 0$, o sigui si $y = y_1 e_1$. Com que $x \circ y = -x_1 y_1 < 0$, tenim que $x \circ y \leq ||x||\ ||y||$ amb igualtat si i només si x i y són linealment dependents.

□

De la proposició anterior se'n segueix que, donats dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^n$ temporals amb x_1 i y_1 del mateix signe, hi ha un únic nombre real positiu $\eta(x, y)$ tal que

$$x \circ y = ||x||\ ||y|| \cosh \eta(x, y) \tag{2.3}$$

L'*angle lorentzià temporal* entre x i y es defineix com $\eta(x, y)$ amb l'expressió (3.3). Notem que $\eta(x, y) = 0$ si i només si x i y són proporcionals per un escalar positiu.

Definim ara el model estàndard per descriure l'espai hiperbòlic n-dimensional. Considerem els punts de l'esfera de radi imaginari 1 continguda en l'espai Lorentzià de $n + 1$ dimensions:

$$F^n = \{x \in \mathbb{R}^{1,n} : ||x||^2 = -1\}$$

Notem que F^n no és connexa. Podem diferenciar les fulles positiva i negativa on els vectors tenen la primera component positiva o negativa respectivament. Per tant descartem els punts de la fulla negativa. Així obtenim el model de l'hiperboloide H^n de l'espai hiperbòlic que és la fulla positiva de F^n, on tots els punts s'identifiquen amb vectors temporals i positius.

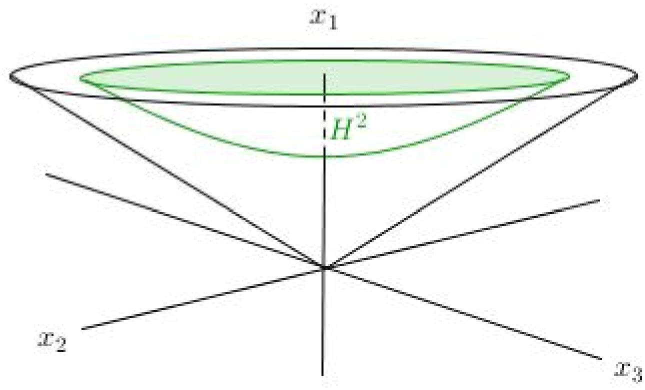

Figura 3.4. Model de l'hiperboloide bidimensional H^2 dins del con de llum.

Observació 2.1. L'equació que satisfan els vectors de H^n és $x_1^2 - |\bar{x}|^2 = 1$ amb $x_1 > 0$. Per $n = 2$ els punts s'identifiquen amb vectors de $\mathbb{R}^{1,2}$ i obtenim el pla hiperbòlic en el model de l'hiperboloide presentat a la secció anterior que correspòn a la figura 3.4.

Ara podem dotar l'espai d'una noció de distància.

Definició 2.2. *Siguin $x, y \in H^n$ i sigui $\eta(x, y)$ l'angle lorentzià temporal entre ells. La distància hiperbòlica entre x i y és*

$$d_H(x, y) = \eta(x, y) \tag{2.4}$$

De (2.3) se'n segueix que $\cosh d_H(x, y) = -x \circ y$. Aquesta definició és congruent amb la definició general de distància 1.3 per la mètrica Lorentziana, o sigui minimitza la longitud de les corbes entre x i y.

Les isometries de H^n a ell mateix formen el grup $I(H^n)$. Anem a caracteritzar-les.

Proposició 2.2. *Tota transformació Lorentz positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$ es restringeix a alguna isometria de H^n, i tota isometria de H^n s'extén unívocament a una transformació Lorentz positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostració:
La funció $\phi : H^n \to H^n$ és una isometria si i només si preserva el producte lorentzià. Per tant, una transformació Lorentziana positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$ restringida a H^n és una isometria.

Recíprocament, suposem que $\phi : H^n \to H^n$ és una isometria. Assumim que ϕ deixa fix el vector e_1 d'una certa base. Siguin $\phi_1, ..., \phi_{n+1}$ les components de ϕ en la base donada. Llavors

$$\phi_1(x) = -\phi(x) \circ e_1 = -\phi(x) \circ \phi(e_1) = -x \circ e_1 = x_1$$

Per tant $\phi(x) = (x_1, \phi_2(x), ..., \phi_{n+1}(x))$.

Sigui $f : H^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \bar{x}$ on recordem que $\bar{x} = (x_2, ..., x_{n+1})$. Tenim que f és una bijecció. Definim $\bar{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de manera que

$$\bar{\phi}(u) = (\phi_2(f^{-1}(u)), \dots, \phi_{n+1}(f^{-1}(u)))$$

Notem que $\bar{\phi}(\bar{x}) = \overline{\phi(x)} \quad \forall x \in H^n$. Com que $\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y$, es compleix que

$$-x_1y_1 + \bar{\phi}(\bar{x}) \cdot \bar{\phi}(\bar{y}) = -x_1y_1 + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Aleshores $\bar{\phi}(\bar{x}) \cdot \bar{\phi}(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ i llavors $\bar{\phi}$ és una transformació ortogonal. Li podem associar una matriu A de dimensió $n \times n$ tal que $Au = \bar{\phi}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$. Sigui la matriu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & A & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Tenim que $\tilde{A}$ és una transformació Lorentz positiva i $\tilde{A}x = \phi(x)$. Per tant $\tilde{A}$ és transitiva. Si prenem ϕ una isometria arbitrària de H^n llavors existeix $B \in PO(1, N)$ tal que $B\phi(e_1) = e_1$. Com que $B\phi$ s'extén a una transformació de Lorentz positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$, llavors ϕ també.

Anem a veure la unicitat. Suposem que C i D són a $PO(1, n)$ i s'extenen a ϕ. Llavors $D^{-1}C$ fixa tots els punts de H^n. Com que H^n no està contingut en cap subespai vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$, tenim que $D^{-1}C$ fixa tot $\mathbb{R}^{n+1}$. Per tant $C = D$.

□

Corol·lari 2.1. *El grup $I(H^n)$ és isomòrfic a $PO(1, n)$.*

Per acabar estudiem formalment les geodèsiques de H^n.

Definim una *recta hiperbòlica de* H^n com la intersecció de H^n amb un subespai bidimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ generat per dos vectors temporals. Dos punts diferents $x, y \in H^n$ donen lloc al subespai $V(x, y) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de vectors temporals i defineixen la recta hiperbòlica $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$ que és l'única que els conté. Observem que $L(x, y)$ és una branca de la hiperbòla.

Tres punts $x, y, z \in H^n$ són *hiperbòlicament colinears* si existeix una recta hiperbòlica L tal que $x, y, z \in L$. En aquest cas $\eta(x, y) + \eta(y, z) = \eta(x, z)$.

Dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ són *ortonormals Lorentz* si i només si $||x||^2 = -1$, $||y||^2 = -1$ i $x \circ y = 0$.

Proposició 2.3. *Sigui* $\gamma : [a,b] \to H^n$.
La corva γ *és una geodèsica normalitzada si i només si* $\exists x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ *vectors ortonormals Lorentz tal que es satisfà l'equació:*

$$\gamma(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$$

o equivalentment γ *compleix l'equació diferencial* $\gamma'' - \gamma = 0$.

Demostració:
Sigui A una transformació Lorentz de $\mathbb{R}^{n+1}$. Tenim que $(A\gamma)' = A\gamma'$. Conseqüentment, γ satisfà l'equació diferencial si i només $A\gamma$ ho fa. Llavors γ és lliure sota transformacions Lorentz. Soposem que γ és una geodèsica normalitzada. Sigui $t \in [a,b]$. Aleshores

$$\eta(\gamma(a), \gamma(b)) = b - a = (t-a) + (b-t) = \eta(\gamma(a), \gamma(t)) + \eta(\gamma(t), \gamma(b))$$

Llavors $\gamma(a), \gamma(t), \gamma(b)$ són hiperbòlicament colinears i per tant la imatge de γ està continguda en una recta hiperbòlica L de H^n.

Per simplicitat de notació, assumim $n = 1$. Aplicant una transformació Lorentz de la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

podem transformar $\gamma(a)$ a e_1, i per tant podem prendre $\gamma(a) = e_1$. Aleshores

$$e_1 \cdot \gamma(t) = -\gamma(a) \circ \gamma(t) = \cosh \eta(\gamma(a), \gamma(t)) = \cosh(t-a)$$

Així doncs $e_2 \cdot \gamma(t) = \pm \sinh(t-a)$. La corva γ és contínua, o sigui que no hi ha canvi de signe per cap t. Podem assumir llavors de forma general que

$$\gamma(t) = (\cosh(t-a))e_1 + (\sinh(t-a))(\pm e_2)$$

tal com volíem demostrar.

Ara ho veurem en el sentit recíproc. Soposem que existeixen dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ ortonormals Lorentz tals que

$$\gamma(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$$

Siguin s i t tals que $a \leq s \leq t \leq b$, tenim que

$$\cosh \eta(\gamma(s), \gamma(t)) = -\gamma(s) \circ \gamma(t) =$$

$$= \cosh(s-a)\cosh(t-a) - \sinh(s-a)\sinh(t-a) = \cosh(t-s)$$

O sigui que $\eta(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s$ i per tant γ és una geodèsica normalitzada.

□

Aleshores una funció $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ defineix una geodèsica si i només si $\exists x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ vectors ortonormals Lorentz tals que $\lambda(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)y$, ja que aquestes corves compleixen l'equació diferencial de les geodèsiques de la proposició 2.3.

Notem que l'expressió de $\lambda(t)$ es correspòn amb la definició de recta hiperbòlica. Així doncs, podem afirmar que les geodèsiques de l'espai hiperbòlic en el model de l'hiperboloide són les seves rectes hiperbòliques.

Geometria inversiva.

En aquesta secció estudiarem el grup de transformacions inversives de l'espai euclidià E^n que està generat per les reflexions sobre hiperplans o les inversions sobre esferes. Com mostrarem, aquest grup és isomòrfic al grup d'isometries de l'espai hiperbòlic. Manipulant aquestes transformacions veurem les invariàncies d'aquest espai. Així, posarem en relleu la seva naturalesa analitzant com respòn sota isometries que podrem descriure intuitivament recorrent a l'espai euclidi.

Les eines que desenvoluparem ens permetran, partint del model de l'hiperboloide, presentar el model conforme i el del semi-espai superior per n dimensions i la forma que hi prenen les isometries.

Observació 2.2. D'acord amb els nostres objectius, ens estalviem les demostracions de certes propietats que anirem enunciant durant tota la secció. La gran majoria de resultats es poden trobar a [1], capítol 4.

En primer lloc definim les transformacions inversives.

Sigui $t \in \mathbb{R}$ i sigui a un vector unitari de $\mathbb{R}^n$. Considerem l'*hiperplà* de l'espai euclidi $P(a,t) = \{x \in E^n : a \cdot x = t\}$. Notem que els punts $x \in P(a,t)$ satisfan l'equació $a \cdot (x - ta) = 0$.

Definició 2.3. *La reflexió $\rho : E^n \to E^n$ sobre l'hiperplà $P(a,t)$ es defineix de manera que*

$$\rho(x) = x + sa$$

on $s \in \mathbb{R}$ tal que $x + \frac{1}{2}sa \in P(a,t)$.

Se'n segueix de la definició la fórmula explícita

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a \tag{2.5}$$

Notem que ρ és una isometria de E^n i que deixa fixos els punts de l'hiperplà $P(a,t)$. A més, $\rho^2(x) = x \quad \forall x \in E^n$. Les isometries de E^n són composicions de com a màxim $n+1$ reflexions sobre hiperplans.

Sigui un real $r > 0$ i sigui $a \in \mathbb{R}^n$. Considerem l'*esfera de radi r centrada en a* de l'espai euclidi $S(a,r) = \{x \in E^n : |x - a| = r\}$.

Definició 2.4. *La inversió $\sigma : E^n \to E^n$ sobre l'esfera $S(a,r)$ es defineix de manera que*

$$\sigma(x) = a + s(x - a)$$

on $s > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $|\sigma(x) - a||x - a| = r^2$.

Se'n segueix la fórmula explícita

$$\sigma(x) = a + (\frac{r}{|x - a|})^2(x - a) \tag{2.6}$$

Notem que σ deixa fixos els punts de l'esfera $S(a,r)$ i que $\sigma^2(x) = x$ si $x \neq a$. La figura 3.5 aclareix la definició.

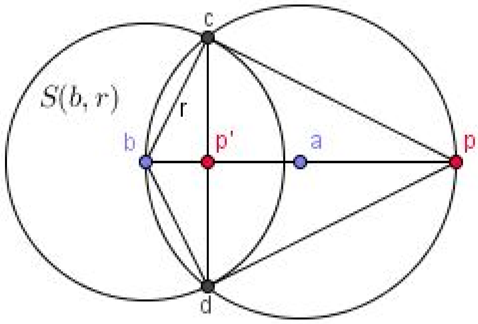

Figura 3.5. Construcció gràfica de la imatge $p' = \sigma(p)$ d'un punt p a l'aplicar una inversió sobre l'esfera $S(b, r)$. Notem que $p = \sigma(p')$.

Definició 2.5. *Sigui $U \subset E^n$ obert i sigui $\phi : U \to E^n$ una aplicació diferenciable. L'aplicació ϕ és conforme si i només si existeix la funció factor d'escala $k : U \to \mathbb{R}_+$ tal que $k(x)^{-1}\phi'(x)$ és una transformació ortogonal $\forall x \in U$.*

Les aplicacions conformes preserven els angles entre les corbes diferenciables a U. Tant les reflexions respecte plans com les inversions respecte esferes són conformes i, a més, canvien l'orientació.

A continuació definim la projecció estereogràfica i la transformació de Möbius que ens permetran estudiar les invariàncies de l'espai hiperbòlic i caracteritzar-ne les isometries segons el model que considerem.

Identifiquem E^n amb $E^n \times \{0\} \subset E^{n+1}$. La *projecció estereogràfica* $\pi : E^n \to S^n - \{e_{n+1}\}$ envia el punts $x \in E^n$ al punt d'intersecció entre S^n i la recta que uneix x amb e_{n+1}. Degut a que aquestes rectes sempre existeixen, formalment $\exists s \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x) = x + s(e_{n+1} - x)$. Com que S^n té radi 1, $|\pi(x)|^2 = 1$ i per tant $s = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}$. Amb tot, obtenim la fórmula explícita

$$\pi(x) = (\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}) \tag{2.7}$$

La projecció estereogràfica és una bijecció. Té una interpretació geomètrica rellevant en termes de la geometria inversiva: Sigui σ la inversió sobre l'esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ de E^{n+1}. De l'expressió (2.6), veiem que pels punts $x \in E^n$ la inversió sobre l'esfera $\sigma(x)$ coincideix amb la projecció estereogràfica $\pi(x)$. Així doncs, la restricció de σ a E^n és la projecció estereogràfica.

Com que σ^2 és la identitat, es pot calcular la inversa de π. Obtenim

$$\pi^{-1}(y) = (\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, ..., \frac{y_n}{1 - y_{n+1}})$$

Sigui ∞ un punt que no pertany a E^{n+1}, denotem $\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$. Extenem π a la bijecció $\hat{\pi} : \hat{E}^n \to S^n$ de manera que $\hat{\pi}(\infty) = e_{n+1}$. Dotem $\hat{E}^n$ de noció de distància mitjançant l'expressió $d(x, y) = |\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)|$. Aquesta distància s'anomena *cordal.*

Per definició, $\hat{\pi}$ és una isometria de $\hat{E}^n$ amb la distància cordal a S^n amb la distància esfèrica. Així doncs els dos espais són equivalents topològicament. $\hat{E}^n$ és compacte i s'anomena *compactificació amb un punt* de E^n.

Considerem en $\hat{E}^n$ l'*hiperplà extès* $\hat{P}(a,t) = P(a,t) \cup \{\infty\}$. Notem que $\hat{P}(a,t) \subset \hat{E}^n$ és homeomòrfic a S^{n-1}. Les *esferes* Σ *de* $\hat{E}^n$ es defineixen o bé com $\hat{P}(a,t)$ o bé com $S(a,r)$ ja que topològicament són definicions equivalents.

Donada una reflexió ρ de E^n sobre un hiperplà $P(a,t)$, podem definir la seva extensió $\hat{\rho} : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ fixant $\hat{\rho}(\infty) = \infty$. L'aplicació $\hat{\rho}$ s'anomena *reflexió de* $\hat{E}^n$ *sobre l'hiperplà extès* $\hat{P}(a,t)$.

Anàlogament, donada una inversió σ de E^n sobre una esfera $S(a,r)$, definim la seva extensió $\hat{\sigma} : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ fixant $\hat{\sigma}(a) = \infty$ i $\hat{\sigma}(\infty) = a$. L'aplicació $\hat{\sigma}$ s'anomena *inversió de* $\hat{E}^n$ *sobre l'esfera* $\Sigma = S(a,r)$.

Es pot demostrar que tota reflexió de $\hat{E}^n$ sobre un hiperplà extès $\hat{P}(a,t)$ és un homeomorfisme i que tota inversió de $\hat{E}^n$ sobre una esfera Σ també és un homeomorfisme.

Definició 2.6. *Una transformació de Möbius de* $\hat{E}^n$ *és una composició finita de inversions de* $\hat{E}^n$ *sobre esferes.*

Denotem $M(\hat{E}^n)$ el grup de transformacions de Möbius amb l'operació composició. Tota isometria de E^n s'extén unívocament a una transformació de Möbius. Per tant, les isometries de l'espai euclidi $I(E^n)$ són un subgrup de $M(\hat{E}^n)$.

Les transformacions de Möbius que deixen fixa una esfera $S(a,r)$ són necessàriament la inversió respecte $S(a,r)$ o bé la identitat.

Sigui $u, v, x, y \in \hat{E}^n$ tals que $u \neq v$ i $x \neq y$. La *raó doble* dels punts és el nombre real

$$[u,v,x,y] = \frac{d(u,x)d(v,y)}{d(u,v)d(x,y)}$$

Les funcions $\phi : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ són transformacions de Möbius si i només si conserven les raons dobles.

Ara ens disposem a mostrar explícitament quins subgrups de transformacions de Möbius deixen invariant l'espai hiperbòlic pels diferents models.

Identificant E^{n-1} amb $E^{n-1} \times \{0\} \subset E^n$, un punt $x \in E^{n-1}$ es correspòn amb un punt $\tilde{x} = (x, 0) \in E^n$. Sigui ϕ una transformació de Möbius de $\hat{E}^{n-1}$. Cal que extenguem ϕ a una transformació de Möbius $\tilde{\phi}$ de $\hat{E}^n$. Si ϕ és una reflexió de $\hat{E}^{n-1}$ sobre $\hat{P}(a,t)$, llavors $\tilde{\phi}$ és una reflexió de $\hat{E}^n$ sobre $\hat{P}(\tilde{a},t)$. Si ϕ és una inversió de $\hat{E}^{n-1}$ sobre $S(a,r)$, llavors $\tilde{\phi}$ és una inversió de $\hat{E}^n$ sobre $S(\tilde{a},r)$. En tots dos casos $\tilde{\phi}(x,0) = (\phi(x), 0) \ \ \forall x \in E^{n-1}$.

Així doncs $\tilde{\phi}$ és una extensió de ϕ que deixa $\hat{E}^{n-1}$ invariant. En particular, $\tilde{\phi}$ deixa invariant el conjunt $U^n = \{(x_1, ..., x_n) \in E^n : x_n > 0\}$ que són els punts del model del semi-espai superior.

Assumim ara que ϕ és una transformació de Möbius arbitrària de $\hat{E}^{n-1}$. És doncs una composició de inversions $\phi = \sigma_1 \cdots \sigma_m$. La transformació $\tilde{\phi} = \tilde{\sigma}_1 \cdots \tilde{\sigma}_m$, és una extensió de ϕ i deixa U^n invariant. Considerem $\tilde{\phi}_1$ i $\tilde{\phi}_2$ dues extensions tals de ϕ. Aleshores $\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2$ deixa fix tots els punts de $\hat{E}^{n-1}$ i deixa invariant U^n. Llavors $\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2^{-1}$ és la identitat i per tant $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$. Amb tot, $\tilde{\phi}$ depèn unícament de ϕ independentment de la descomposició $\phi = \sigma_1 \cdots \sigma_m$. L'aplicació $\tilde{\phi}$ s'anomena *extensió de Poincaré.*

Proposició 2.4. *Una transformació de Möbius deixa invariant U^n si i només si ϕ és l'extensió de Poincaré d'una transformació de Möbius de $\hat{E}^{n-1}$.*

Demostració:
Sigui ϕ una transformació de Möbius de $\hat{E}^n$ que deixa invariant U^n. Com que ϕ és un homeomorfisme, també deixa invariant la vora de U^n. Per tant ϕ es restringeix a un homeomorfisme $\bar{\phi}$ de $\hat{E}^{n-1}$. Així com ϕ preserva les raons dobles a $\hat{E}^n$, tenim que $\bar{\phi}$ preserva les raons dobles a $\hat{E}^{n-1}$ i aleshores també és una transformació de Möbius. Considerem $\tilde{\bar{\phi}}$ l'extensió de Poincaré de $\bar{\phi}$. Llavors $\tilde{\bar{\phi}}\phi^{-1}$ fixa tots els punts de $\hat{E}^{n-1}$ i deixa U^n invariant, per tant és la identitat i finalment $\phi = \tilde{\bar{\phi}}$.

□

Les transformacions de Möbius que deixen invariant U^n s'anomenen *transformacions de Möbius del model del semi-espai superior U^n*. Formen un grup que denotem $M(U^n)$ i que és un subgrup de $M(\hat{E}^n)$. Notem que $M(U^n)$ és isomòrfic a $M(\hat{E}^{n-1})$.

Dues esferes $\Sigma = \hat{P}(a, r)$ i $\Sigma' = \hat{P}(b, s)$ de $\hat{E}^n$ són *ortogonals* si i només si intersequen a E^n de manera que en els punts d'intersecció les respectives direccions normals són ortogonals. Cal notar que si en un punt intersequen ortogonalment, són ortogonals. En aquest cas, necessàriament a i b són ortogonals.

Proposició 2.5. *Tota transformació $\Phi \in M(U^n)$ és una composició de inversions de $\hat{E}^n$ sobre esferes ortogonals a $\hat{E}^{n-1}$.*

Demostració:
Sigui $\Phi \in M(U^n)$. Aleshores Φ és l'extensió de Poincaré $\tilde{\phi}$ de la transformació de Möbius ϕ de $\hat{E}^{n-1}$. L'aplicació ϕ és la composició $\sigma_1 \cdots \sigma_m$ de inversions de $\hat{E}^{n-1}$ sobre esferes. L'extensió de Poincaré de la inversió σ_i és la inversió de $\hat{E}^n$ sobre una esfera ortogonal a $\hat{E}^{n-1}$. Com que $\hat{\phi} = \hat{\sigma}_1 \cdots \hat{\sigma}_m$, tenim que Φ és una composició de inversions de $\hat{E}^n$ sobre esferes ortogonals a $\hat{E}^{n-1}$.

□

Proposició 2.6. *Una inversió σ de $\hat{E}^n$ sobre una esfera Σ deixa invariant U^n si i només si $\hat{E}^{n-1}$ i Σ són ortogonals.*

Demostració:
Sigui el cas $\Sigma = \hat{P}(a, t)$ o el cas $\Sigma = S(a, r)$, on $a = (a_1, ..., a_n)$. Llavors $\hat{E}^{n-1}$ i Σ

seran ortogonals si i només si $a_n = 0$. Sigui $x \in E^n$ i sigui $y = \sigma(x)$. Aleshores, per $y \neq \infty$, tenim que

$$y_n = \begin{cases} x_n + 2(t - a \cdot x)a_n, & \text{si } \Sigma = \hat{P}(a,t) \\ (\frac{r}{|x-a|})^2 x_n + (1 - (\frac{r}{|x-a|})^2)a_n, & \text{si } \Sigma = S(a,r) \end{cases}$$

Assumim que $a_n = 0$ i que $x_n > 0$. Llavors $x \neq a$ i per tant y és finit i $y_n > 0$. Amb tot, σ deixa U^n invariant.

Recíprocament, soposem que σ deixa U^n invariant. Llavors σ deixa $\hat{E}^{n-1}$ invariant. La reflexió sobre $\hat{E}^{n-1}$ envia U^n a $-U^n$, per tant podem assumir que $\Sigma \neq \hat{E}^{n-1}$. Sigui $x \in \hat{E}^{n-1} - \Sigma$ i sigui $y \neq \infty$. Llavors $x_n = 0 = y_n$. Com que $x \notin \Sigma$, el coeficient de a_n no és nul en l'expressió de y_n. Per tant $a_n = 0$.

□

Estudiem ara un altre subgrup de $M(\hat{E}^n)$: les transformacions de Möbius de la bola oberta unitat de dimensió n, que representa l'espai hiperbòlic en el model conforme.

Considerem σ la inversió de $\hat{E}^n$ sobre l'esfera $S(e_n, \sqrt{2})$. De l'expressió (2.6), tenim que

$$\sigma(x) = e_n + \frac{2(x - e_n)}{|x - e_n|^2}$$

Per tant,

$$|\sigma(x)|^2 = 1 + \frac{4x_n}{|x - e_n|^2}$$

Això implica que σ envia el semi-espai superior canviat de signe $-U^n$ a la *bola oberta unitat* de dimensió n definida com

$$B^n = \{x \in E^n : |x| < 1\}$$

Com que σ és un homeomorfisme de $\hat{E}^n$, envia unívocament cada component de $\hat{E}^n - \hat{E}^{n-1}$ a una component de $\hat{E}^n - S^{n-1}$. En particular σ envia homeomòrficament $-U^n$ a B^n i viceversa.

Sigui ρ la reflexió de $\hat{E}^n$ sobre $\hat{E}^{n-1}$ i definim $\eta = \sigma\rho$. Tenim que η és un homeomorfisme de U^n a B^n. La transformació de Möbius η s'anomena *transformació estàndard* de U^n a B^n.

Per altra banda, anomenem *transformacions de Möbius de l'esfera* S^n a les aplicacions $\Phi : S^n \to S^n$ tals que $\pi^{-1}\Phi\pi$ és una transformació de Möbius de $\hat{E}^n$ on $\pi : \hat{E}^n \to S^n$ és la projecció estereogràfica. Aquestes transformacions formen un grup amb la composició que denotem $M(S^n)$. Notem que l'aplicació que envia Φ a $\pi\Phi\pi^{-1}$ és un isomorfisme de $M(\hat{E}^n)$ a $M(S^n)$.

Sigui ϕ una transformació de Möbius de S^{n-1}. L'extensió de Poincaré de ϕ és una transformació de Möbius $\tilde{\phi}$ de $\hat{E}^n$ definida com $\tilde{\phi} = \eta\tilde{\Phi}\eta^{-1}$, on $\tilde{\Phi}$ és la extensió de Poincaré de $\Phi = \pi^{-1}\phi\pi$ i η és la transfomració estàndard de U^n a B^n. La transformació $\tilde{\phi}$ extén ϕ, deixa invariant B^n i és única.

Proposició 2.7. *Una transformació de Möbius ϕ de $\hat{E}^n$ deixa invariant la bola oberta unitat B^n si i només si ϕ és l'extensió de Poincaré d'una transformació de Möbius de S^{n-1}.*

Demostració:
És una conseqüència directa de la proposició 2.4. □

Les transformacions de Möbius de $\hat{E}^n$ que deixen invariant B^n s'anomenen *transformacions de Möbius de la bola oberta unitat B^n*. Formen un grup que denotem $M(B^n)$ i que és un subgrup de $M(\hat{E}^n)$. Notem que $M(B^n)$ és isomòrfic a $M(S^{n-1})$.

Proposició 2.8. *Tota transformació $\Phi \in M(B^n)$ és una composició finita de inversions de $\hat{E}^n$ sobre esferes ortogonals a S^{n-1}.*

Demostració:
És conseqüència de la proposició 2.5. □

Proposició 2.9. *Una inversió σ de $\hat{E}^n$ sobre l'esfera Σ deixa B^n invariant si i només si S^{n-1} i Σ són ortogonals.*

Demostració:
Sigui η la transformació estàndard de U^n a B^n. Definim $\Sigma' = \eta^{-1}(\Sigma)$ que també és una esfera de $\hat{E}^n$ i $\sigma' = \eta^{-1}\sigma\eta$ que és la inversió de Σ'. L'aplicació η envia U^n bijectivament a B^n, per tant σ deixa B^n invariant si i només si σ' deixa U^n invariant. Per la proposició 2.6 això passa si i només si $\hat{E}^{n-1}$ i Σ' són ortogonals. L'aplicació η és conforme i per tant preserva els angles. Així doncs $\hat{E}^{n-1}$ i Σ' són ortogonals si i només si S^{n-1} i Σ són ortogonals.

□

És el moment indicat per presentar el model conforme per n dimensions.

En primer lloc redefinim l'espai lorentzià n-dimensional per simplificar els càlculs. A partir d'aquí el denotarem $\mathbb{R}^{n,1}$ i el producte lorentzià a $\mathbb{R}^{n+1}$ el redefinim com

$$x \circ y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$$

El model de l'hiperboloide H^n presentat a la secció anterior es pot construir anàlogament amb aquesta nova definició del producte invertint l'ordre de les coordenades. Tots els resultats que hem vist segueixen sent vàlids i el grup de transformacions de Lorentz positives es denota $PO(n,1)$.

Identifiquem $\mathbb{R}^n$ amb $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. La projecció estereogràfica ζ de la bola oberta unitat B^n a H^n es defineix projectant $x \in B^n$ al punt $\zeta(x)$ que és la intersecció entre H^n i la recta que uneix x i $-e_{n+1}$. Tal com hem obtingut l'expressió (2.7), arribem aquí a la fórmula explícita:

$$\zeta(x) = (\frac{2x_1}{1-|x|^2}, ..., \frac{2x_n}{1-|x|^2}, \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2})$$

L'aplicació ζ és una bijecció. Existeix la seva inversa

$$\zeta^{-1}(y) = (\frac{y_1}{1+y_{n+1}}, ..., \frac{y_n}{1+y_{n+1}})$$

Amb la projecció estereogràfica podem dotar B^n d'una noció de distància d_B:

$$d_B(x,y) = d_H(\zeta(x), \zeta(y))$$

on $x, y \in B^n$ i d_H és la distància del model de l'hiperboloide (2.4). Aquesta distància s'anomena *distància de Poincaré de* B^n. L'espai mètric B^n amb la distància d_B és el model conforme de l'espai hiperbòlic n-dimensional. Tenim la següent forma explícita de la distància de Poincaré de B^n:

$$\cosh d_B(x,y) = 1 + \frac{2|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} \tag{2.8}$$

Observació 2.3. Hem definit la noció de distància de forma recorrent per simplicitat. Rigurosament, l'elecció d'una mètrica implica la noció de distància tal com està definida a 2.3, ja que les longituds de les corves es mesuren amb la mètrica. En aquest cas, la mètrica $g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{(1-\frac{1}{4}|x|^2)^2}$ dóna lloc a la distància d_B

Anem a veure quina forma prenen les isometries en aquest model.

Proposició 2.10. *Tota transformació de Möbius de B^n es restringeix a una isometria del model conforme, i tota isometria del model conforme s'extén unívocament a una transformació de Möbius de B^n.*

Demostració:
Sigui ϕ una transformació de Möbius de B^n i siguin $x, y \in B^n$. Operant amb l'expressió (2.6), obtenim que

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 = \frac{r^4|x-y|^2}{|x-a|^2|y-a|^2}$$

Clarament ϕ és una transformació ortogonal. Gràcies a la proposició 2.9, podem assumir que ϕ és una inversió sobre l'esfera $S(a,r)$ ortogonal a S^{n-1}, de manera que $r^2 = |a|^2 - 1$. Amb tot, arribem al següent resultat:

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{(1-|\phi(x)|^2)(1-|\phi(y)|^2)} = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

De l'expressió de la distància (2.8), usant el resultat anterior, veiem que efectivament les transformacions de Möbius de B^n es restringeixen a una isometria de B^n.

Anem a veure el recírpoc. Sigui una isometria $\phi : B^n \to B^n$. Definim $\Phi : B^n \to B^n$ com $\Phi(x) = \tau_{\phi(0)}^{-1}\phi(x)$ on $\tau_{\phi(0)}$ és la *translació hiperbòlica de B^n* sobre $\phi(0)$, que en termes de $\phi(0)$ pren la següent forma:

$$\tau_{\phi(0)}(x) = \frac{(1-|\phi(0)|^2)x + (|x|^2 + 2x\cdot\phi(0) + 1)\phi(0)}{|\phi(0)|^2|x|^2 + 2x\cdot\phi(0) + 1}$$

La translació hiperbòlica és la composició de dues reflexions sobre hiperplans ortogonals a la recta $(-\phi(0)/|\phi(0)|, \phi(0)/|\phi(0)|)$, i per tant la podem entendre com una translació al llarg d'aquesta recta.

Tenim que $\Phi(0) = 0$. Degut a la primera part del teorema, llavors, Φ és una isometria de B^n.

Sigui $x, y \in B^n$. De la relació $d_B(\Phi(x), 0) = d_B(x, 0)$ i de l'expressió (2.8) obtenim que

$$\frac{|\Phi(x)|^2}{1-|\Phi(x)|^2} = \frac{|x|^2}{1-|x|^2}$$

Aleshores, $|\Phi(x)| = |x|$. De la mateixa manera, tenim que

$$\frac{|\Phi(x)-\Phi(y)|^2}{(1-|\Phi(x)|^2)(1-|\Phi(y)|^2)} = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

Amb tot, $|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y|$ i per tant Φ preserva la distància euclidiana a B^n. Se'n segueix que Φ envia cada radi de B^n a un radi de B^n. Així doncs, podem extendre Φ a una funció $\bar{\Phi} : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ tal que $\Phi([0, x)) = [0, \bar{\Phi}(x)) \quad \forall x \in S^{n-1}$.

Notem que $\bar{\Phi}$ és contínua ja que $\bar{\Phi}(x) = 2\Phi(x/2) \quad \forall x \in \bar{B}^n$. Per tant $\bar{\Phi}$ també preserva les distàncies euclidianes, o sigui que preserva els productes interns a $\bar{B}^n$. Aleshores $\bar{\Phi}$ és la restricció d'una transformació ortogonal A de E^n. Llavors $\tau_{\phi(0)}A$ extén ϕ. A més és la única extensió de ϕ que és una transformació de Möbius , ja que un altre transformació de Möbius extensió de ϕ coincideix amb $\tau_{\phi(0)}A$ a $\bar{B}^n$ i per tant és la mateixa.

□

Corol·lari 2.2. *El grup d'isometries del model conforme que denotem $I(B^n)$ és isomòrfic al grup $M(B^n)$.*

Ara estudiarem anàlogament el model del semi-espai superior U^n.

Sigui η la transformació estàndard de U^n a B^n. Tal com hem vist, $\eta = \sigma\rho$ on ρ és la reflexió de $\hat{E}^n$ sobre l'hiperplà E^{n-1} i σ és la inversió de $\hat{E}^n$ sobre l'esfera $S(e_n, \sqrt{2})$. Dotem al model U^n de la distància d_U:

$$d_U(x, y) = d_B(\eta(x), \eta(y))$$

on $x, y \in U^n$. Aquesta distància s'anomena *distància de Poincaré de U^n*. L'espai mètric U^n amb la distància d_U és el model del semi-espai superior de l'espai hiperbòlic n-dimensional. Tenim la següent forma explícita de la distància de Poincaré de U^n:

$$\cosh d_U(x, y) = 1 + \frac{|x-y|^2}{2x_n y_n} \tag{2.9}$$

Observació 2.4. Hem definit la noció de distància de U^n també de forma recorrent. Anàlogament al model conforme, aquesta definició es segueix de la mètrica (2.1) que hem associat a U^n en la primera secció.

Finalment anem a veure com són les isometries en aquest model.

Proposició 2.11. *Tota transformació de Möbius de U^n es restringeix a una isometria del model U^n, i tota isometria de U^n s'extén unívocament a una transformació de Möbius de U^n.*

Demostració:
Aquest resultat és una conseqüència directa de la proposició 2.10.

□

Corol·lari 2.3. *El grup d'isometries del model del semi-espai superior que denotem $I(U^n)$ és isomòrfic al grup $M(U^n)$.*

Observació 2.5. Classificació de les transformacions de Möbius.
Sigui $\phi \in M(B^n)$. Notem que envia la bola tancada $\bar{B}^n$ a ella mateixa. Degut al *Teorema del punt fix de Brouwer*, ϕ té un punt fix en $\bar{B}^n$.

La transformació ϕ s'anomena:

1. *el.líptica* si ϕ fixa un punt de B^n.
2. *parabòlica* si ϕ no fixa cap punt de B^n i fixa un únic punt de S^{n-1}.
3. *hiperbòlica* si ϕ no fixa cap punt de B^n i fixa dos punts de S^{n-1}.

Es defineixen anàlogament en el model U^n reemplaçant S^{n-1} per $\hat{E}^{n-1}$. Hi ha certs resultats destacables que enunciem a continuació. Les corresponents demostracions es poden trobar a [1], secció 4.7. La definició de conjugació es troba a l'observació 3.4.

Una transformació $\phi \in M(B^n)$ és el.líptica si i només si ϕ és conjugada en $M(B^n)$ amb una transformació ortogonal de E^n.

Una transformació $\phi \in M(U^n)$ és parabòlica si i només si ϕ és conjugada en $M(U^n)$ amb l'extensió de Poincaré d'una isometria ψ de E^{n-1} amb un sol punt fix. La isometria és de la forma $\psi(x) = a + Ax$, on $a \neq 0$ i A és una matriu ortogonal tal que $Aa = a$.

Una transformació $\phi \in M(U^n)$ és hiperbòlica si i només si és conjugada en $M(U^n)$ a l'extensió de Poincaré d'una transformació ψ de E^{n-1} de la forma $\psi(x) = kAx$ on $k > 1$ i A és una transformació ortogonal de E^{n-1}.

3 Isometries de l'Espai Hiperbòlic

Introducció

En aquest capítol es desenvolupen les eines per caracteritzar les isometries de l'espai hiperbòlic com a grups topològics en els diferents models, tot mostrant com són explícitament. També s'estudien els subgrups d'isometries i s'estableix formalment la relació general entre aquest estudi i la determinació de les formes espacials dels espais mètrics de curvatura constant. Finalment, concluint així la descripció de l'espai hiperbòlic, es mostren les propietats dels diferents subgrups d'isometries hiperbòliques. S'ha seguit principalment el llibre *Foundations of Hyperbolic Manifolds* de l'autor *John G. Ratcliffe*, de manera que la notació i definicions coincideixen completament amb les del capítol anterior.

En la primera i segona secció es recullen les idees algebraiques i topològiques bàsiques per començar el nostre desenvolupament i es mostra com es descriuen els conjunts d'isometries trobats en el capítol anterior per cada model. En la tercera secció es consideren certs subgrups d'isometries i s'estableix la relació general entre aquests subgrups i les formes espacials. Finalment, a l'última secció es mostra de forma explícita com es poden caracteritzar els subgrups mencionats pel cas hiperbòlic. L'estructura del text s'ha el.laborat a partir de [1], capítol 5.

Teoria de grups topològics

En aquesta secció introduirem el formalisme necessari per estudiar l'estructura topològica del grup d'isometries de l'espai hiperbòlic.

Per disposar d'exemples de les definicions principals considerem primer l'*espai complex* $\mathbb{C}^n$ format per vectors $z = (z_1, ..., z_n)$ de components complexes. Siguin $z, w \in \mathbb{C}^n$, definim el *producte intern hermític* entre z i w com

$$z * w = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$$

on la barra denota la conjugació complexa. La *norma hermítica* de $z \in \mathbb{C}^n$ és el nombre real $|z| = (z * z)^{\frac{1}{2}} = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Cal no confondre-la amb la norma euclídea tot i l'abús de notació.

La noció de distància a $\mathbb{C}^n$ és $d_C(z, w) = |z - w|$. L'espai complex amb la distància d_C formen un espai mètric.

Considerem l'aplicació $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\phi(z_1, ..., z_n) = (\text{Re}(z_1), \text{Im}(z_1), ..., \text{Re}(z_n), \text{Im}(z_n))$$

Notem que $\phi(z) \cdot \phi(w) = \text{Re}(z * w)$. Així doncs conserva el producte intern i per tant és una isometria. Per això d_C rep el nom de *distància euclídea de* $\mathbb{C}^n$.

Observació 3.1. A tot espai mètric M se li pot associar una *topologia mètrica* donada per la col.lecció d'oberts de la forma $N(S, r) = \cup\{B(s, r) : s \in S\}$ tal que

$S \subset M$ i $B(a,r) = \{m \in M : d(a,m) < r\}$ on $r > 0$, $a \in M$ i d és la noció de distància de l'espai. Per tant un espai mètric també és un espai topològic.

Per altra banda, si dotem un espai mètric d'una operació auto-continguda en l'espai, aleshores també és un grup.

Definició 3.1. *Un grup topològic és un grup G que alhora és un espai topològic tal que, per $g, h \in G$, la multiplicació $(g,h) \to gh$ i la inversió $g \to g^{-1}$ són funcions contínues a G.*

Tenim els següents exemples familiars de grups topològics: l'espai $\mathbb{R}^n$ amb l'operació de suma de vectors, l'espai complex $\mathbb{C}^n$ amb la suma de vectors, els nombres reals postius $\mathbb{R}_+$ amb la multiplicació, el cercle unitat S^1 al plà complex amb la multiplicació complexa o bé els complexos no nuls $\mathbb{C}^*$ amb la multiplicació complexa.

Un altre exemple de grup topològic és el *grup lineal general* $GL(n,\mathbb{C})$ format per les matrius complexes invertibles $n \times n$ amb la multiplicació de matrius. Siguin $A, B \in GL(n,\mathbb{C})$, la norma associada és $|A| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ i la distància entre A i B és $d(A,B) = |A - B|$.

Notem que qualsevol subgrup H d'un grup topològic G és un grup topològic amb la topologia induïda.

Així doncs, els següents subgrups de $GL(n,\mathbb{C})$ també són grups topològics: el grup lineal especial $SL(n,\mathbb{C})$ format per les matrius de determinant 1, el grup $GL(n,\mathbb{R})$ format per les matrius reals invertibles, el grup $SL(n,\mathbb{R})$ format per les matrius reals de determinant 1, el grup ortogonal $O(n)$ format per les matrius ortogonals, el grup especial ortogonal $SO(n)$, el grup de transformacions de Lorentz $O(1,n-1)$ o bé el grup de transformacions positives de Lorentz $PO(1,n-1)$.

Definició 3.2. *Dos grups topològics G i H són topològicament isomorfs si i només si hi ha un isomorfisme $\phi : G \to H$ que també és un homeomorfisme.*

Per exemple els espais $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^{2n}$ són grups topològicament isomorfs.

Anem a estudiar ara els quocients entre grups topològics.

En primer lloc cal notar que, sigui G un grup topològic i siguin $g, h \in G$, les aplicacions $g \to hg$ i $g \to gh$ són contínues i tenen inverses contínues, per tant són homeomorfismes.

Definició 3.3. *Siguin G i H grups topològics tals que $hg \in G$, $\forall g \in G$ i $\forall h \in H$. L'espai quocient G/H està format pels conjunts $\{Hg\}$ on $g \in G$ amb la topologia quocient.*

Notem que, en les condicions de la definició anterior, en general H pot ser un subgrup de G. Com veurem a la secció següent, si G és un espai mètric finitament compacte, els grups d'isometries de G són grups topològics. Aleshores H també pot ser un subgrup del grup d'isometries de G. Llavors els conjunts $\{Hg\}$ s'anomenen òrbites de $g \in G$. Aquest és el cas particular que ja vem introduir per enunciar la proposició 1.4.

Considerem l'*aplicació quocient* $\pi : G \to G/H$ tal que $\pi(g) = gH$. Sigui U un obert de G, $\pi(U)$ és obert de G/H si i només si $\pi^{-1}(\pi(U))$ és obert de G. Tenim que $\pi^{-1}(\pi(U)) = HU = \cup_{h \in H} hU$. Aleshores $\pi^{-1}(\pi(U))$ és obert perquè els conjunts hU es defineixen aplicant homeomòrficament l'element $h \in H$ sobre l'obert $U \subset G$. Per tant π és una aplicació oberta.

Un *subgrup normal* N d'un grup topològic G és tal que $\forall n \in N$ i $\forall g \in G$, tenim que $gng^{-1} \in N$.

Proposició 3.1. *Sigui N un subgrup normal del grup topològic G. Aleshores G/N, amb la topologia quocient, és un grup topològic.*

Demostració:
Sigui $\pi : G \to G/N$ l'aplicació quocient. Notem que l'aplicació $gN \to g^{-1}N$ és contínua. Considerem l'aplicació $\pi \times \pi : G \times G \to G/N \times G/N$. Com que π és una aplicació oberta, $\pi \times \pi$ també. Considerem ara l'aplicació $\Pi : G/N \times G/N \to G/N$ tal que $\Pi(gN, hN) = ghN$. Per construcció Π és equivalent a π. Amb tot, la multiplicació ha de ser una operació contínua a G/N.

□

De la proposició 3.1 se'n segueixen alguns exemples més de grups topològics: el grup projectiu lineal general $PGL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})/N$ on N és el subgrup normal $\{kI\}$ per $k \in \mathbb{C}^*$ o el grup projectiu especial lineal $PSL(n, \mathbb{C}) = SL(n, \mathbb{C})/N$ on N és el subgrup normal $\{wI\}$ per $w \in \mathbb{C}$ arrel enèsima de la unitat. I denota el subgrup amb l'element neutre.

Grup topològic d'isometries de $\mathbb{H}^n$

Ara demostrarem que els grups d'isometries de $\mathbb{H}^n$ que vem estudiar al capítol anterior són efectivament grups topològics i veurem com són les topologies que hi associem explícitament. Ens calen alguns resultats generals.

Sigui M un espai mètric amb noció de distància d. De forma general denotem $I(M)$ el seu grup d'isometries. Sobre $I(M)$ podem prendre-hi la *topologia d'oberts compactes* heredada de l'espai $C(M, M)$ d'aplicacions de M en ell mateix. Els oberts d'aquesta topologia es generen amb els conjunts $V(K, U)$ que contenen totes les funcions $f \in C(M, M)$ tals que $f(K) \subset U$, on K és un compacte de M i U és un obert de M.

Proposició 3.2. *Una seqüència d'isometries $\{\phi_i\}$ d'un espai mètric M convergeix en $I(M)$ a una isometria ϕ si i només si $\{\phi_i(p)\}$ convergeix a $\phi(p)$ $\forall p \in M$.*

Demostració:
Una propietat bàsica de la topologia d'oberts compactes de $C(M, M)$ és que $\phi_i \to$

ϕ si i només si $\{\phi_i\}$ convergeix uniformament a ϕ en conjunts compactes. Això implica que per cada compacte $K \subset M$ i per $\epsilon > 0$, hi ha un enter k tal que $d(\phi_i(x), \phi(x)) < \epsilon$ per $i \leq k$ i $\forall x \in K$. Notem que els punts $p \in M$ són conjunts compactes, per tant, si $\phi_i \to \phi$ llavors $\phi_i(p) \to \phi(p) \quad \forall p \in M$.

El recíproc el veurem per reducció al absurd. Sigui $K \subset M$ un compacte i sigui $\epsilon > 0$. Suposem que $\phi_i(p) \to \phi(p)$ per cada $p \in M$ i suposem també que $\{\phi_i\}$ no convergeix uniformament a K. Per tant tenim una subseqüència $\{\phi_{i_j}\}$ de $\{\phi_i\}$ i una seqüència $\{x_j\}$ de punts de K tal que $d(\phi_{i_j}(x_j), \phi(x_j)) \geq \epsilon$ per cada j.

Com que K és compacte podem assumir que $\{x_j\}$ convergeix a un punt $x \in K$. Prenem doncs un j prou gran com perquè $d(x_j, x) < \epsilon/4$ i $d(\phi_{i_j}, \phi(x)) < \epsilon/2$. Hem arribat a una contradicció:

$$d(\phi_{i_j}(x_j), \phi(x_j)) \leq d(\phi_{i_j}(x_j), \phi_{i_j}(x)) + d(\phi_{i_j}(x), \phi(x)) + d(\phi(x), \phi(x_j)) =$$

$$= 2d(x_j, x) + d(\phi_{i_j}(x), \phi(x)) < \epsilon$$

Aleshores ϕ_i convergeix uniformament a ϕ en K i per tant $\phi_i \to \phi$.

□

Definició 3.4. *Un espai mètric M és finitament compacte si i només si totes les boles tancades són compactes, és a dir, si i només si $C(a, r) = \{p \in M : d(a, p) \leq r\}$ és compacte $\forall a \in M$ i per $r > 0$.*

Teorema 3.1. *(Grups topològics d'isometries)*
Si un espai mètric M és finitament compacte, aleshores $I(M)$ és un grup topològic.

Demostració:
Una altra propietat bàsica de la topologia d'oberts compactes és que, siguin $\phi, \psi \in C(M, M)$, l'aplicació composició $(\phi, \psi) \to \phi\psi$ és contínua si M és localment compacte. Un espai mètric compacte i finit com $C(M, M)$ té bases contables i per tant $I(M) \subset C(M, M)$ també.

Amb tot, podem provar que l'aplicació inversió $\phi \to \phi^{-1}$ és contínua. Soposem que $\phi_i \to \phi$ en $I(M)$. Llavors $\phi_i(p) \to \phi(p) \ \ \forall p \in M$. Sigui $\epsilon > 0$, sigui $p \in M$ i sigui $q = \phi^{-1}(p)$. Hi ha un enter k tal que, per $i \geq k$, tenim que $d(\phi_i(q), \phi(q)) < \epsilon$. Així doncs, per $i \geq k$, es compleix que

$$d(\phi_i^{-1}(p), \phi^{-1}(p)) = d(p, \phi_i\phi^{-1}(p)) = d(\phi\phi^{-1}(p), \phi_i\phi^{-1}(p)) =$$

$$= d(\phi\phi^{-1}(p), \phi_i\phi^{-1}(p)) = d(\phi(y), \phi_i(y)) < \epsilon$$

Aleshores $\phi_i^{-1}(p) \to \phi^{-1}(p)$. Per la proposició 3.2, tenim que $\phi_i^{-1} \to \phi^{-1}$. Per tant l'aplicació inversió és contínua i $I(M)$ és un grup topològic.

□

Ara estem en condicions d'estudiar les isometries de l'espai hiperbòlic com a grups topològics pels diferents models que vem estudiar al capítol anterior.

Proposició 3.3. *L'aplicació restringida $\rho : PO(n,1) \to I(H^n)$ és un isomorfisme de grups topològics.*

Demostració:
Ja vem veure amb la proposició 2.2 i el corol.lari 2.1 que ρ és un isomorfisme.

Manca veure que ρ és un homeomorfisme. Suposem que $A_i \to A$ en $PO(n,1)$. Llavors $A_i x \to Ax \ \ \forall x \in H^n$. Per la proposició 4.2, $A_i \to A$ en $I(H^n)$.

Recíprocament , suposem que $A_i \to A$ en $I(H^n)$. Llavors $A_i e_{n+1} \to Ae_{n+1}$.
Per cada $j = 1, ..., n$, el vector $v_j = e_j + \sqrt{2}e_{n+1}$ s'identifica amb un punt de H^n. Per tant $A_i v_j \to Av_j$ per cada $j = 1, ..., n$. Així doncs,

$$A_i e_j + \sqrt{2}A_i e_{n+1} \to Ae_j + \sqrt{2}Ae_{n+1}$$

Se'n segueix que $A_i e_j \to Ae_j$ per cada $j = 1, ..., n$. Aleshores $A_i \to A$ en $PO(n,1)$. Així doncs, ρ és un homeomorfisme.

□

A continuació veurem l'estructura de grup topològic que prenen les transformacions de Möbius.

Degut a l'extensió de Poincaré, les transformacions de Möbius de B^n estan completament determinades per com actuen sobre la vora $\partial B^n = S^{n-1}$. Així doncs, la topologia de S^{n-1} dóna lloc de forma natural a una topologia del grup $M(B^n)$ que és la topologia mètrica definida per la distància

$$D_B(\phi, \psi) = \sup_{x \in S^{n-1}} |\phi(x) - \psi(x)| \tag{3.1}$$

on $|\ |$ és la norma euclidiana. Aquesta topologia coincideix amb la topologia d'oberts compactes heredada de l'espai $C(S^{n-1}, S^{n-1})$.

Proposició 3.4. *El grup $M(B^n)$ amb la topologia mètrica definida per D_B és un grup topològic.*

Demostració:
Siguin $\phi, \phi_0, \psi, \psi_0 \in M(B^n)$. Es pot demostrar que existeix una constant positiva $k(\phi)$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \geq k(\phi)|x - y| \ \ \forall x, y \in S^{n-1}$. Com que ψ es restringeix a una bijecció de S^{n-1}, tenim que $D_B(\phi\psi, \phi_0\psi) = D_B(\phi, \phi_0)$. Per tant

$$D_B(\phi\psi, \phi_0\psi_0) \leq D_B(\phi\psi, \phi_0\psi_0) + D_B(\phi_0\psi, \phi_0\psi_0) \leq D_B(\phi, \phi_0) + k(\phi_0)D_B(\psi, \psi_0)$$

Això implica que l'aplicació composició $(\phi, \psi) \to \phi\psi$ és contínua a (ϕ_0, ψ_0). De manera similar, l'aplicació $\phi \to \phi^{-1}$ també és contínua a ϕ_0.

□

Sigui η la transformació estàndard entre U^n i B^n. Llavors η indueix un isomorfisme $\eta_* : M(U^n) \to M(B^n)$ definit de manera que $\eta_*(\phi) = \eta\phi\eta^{-1}$. La restricció de η a $\hat{E}^{n-1}$ és la projecció estereogràfica $\pi : \hat{E}^{n-1} \to S^{n-1}$.

Sigui d la distància cordal a $\hat{E}^{n-1}$. Definim una noció de distància D_U a $M(U^n)$ tal que

$$D_U(\phi, \psi) = \sup_{x \in \hat{E}^{n-1}} d(\phi(x), \psi(x)) \tag{3.2}$$

Aleshores,

$$D_U(\phi, \psi) = \sup_{x \in \hat{E}^{n-1}} |\pi\phi(x) - \pi\psi(x)| = \sup_{y \in S^{n-1}} |\pi\phi\pi^{-1}(y) - \pi\psi\pi^{-1}(y)| =$$

$$= D_B(\eta\phi\eta^{-1}, \eta\phi\eta^{-1}) = D_B(\eta_*(\phi), \eta_*(\psi))$$

Així doncs l'aplicació $\eta_* : M(U^n) \to M(B^n)$ és una isometria d'espais mètrics.

Proposició 3.5. *El grup $M(U^n)$ amb la topologia mètrica definida per D_U és un grup topològic.*

Demostració:
Es segueix de la proposició 3.4 i de l'existència de la isometria η_* entre els espais mètrics $M(U^n)$ i $M(B^n)$ amb les respectives nocions de distància.

□

Observació 3.2. Fent ús de translacions hiperbòliques es poden establir homeomorfismes entre $B^n \times O(n)$ i $I(B^n)$ ([1], secció 5.2).

Proposició 3.6. *L'aplicació restringida $\rho : M(B^n) \to I(B^n)$ és un isomorfisme de grups topològics.*

Demostració:
Vem veure amb la proposició 2.10 i el corol.lari 2.2 que ρ és un isomorfisme. Existeixen homeomorfismes $\Phi : B^n \times O(n) \to M(B^n)$ i $\Psi : B^n \times O(n) \to I(B^n)$ (observació 19) tals que $\rho = \Psi\Phi^{-1}$ i per tant tenim que ρ també és un homeomorfisme.

□

Proposició 3.7. *L'aplicació restringida $\rho : M(U^n) \to I(U^n)$ és un isomorfisme de grups topològics.*

Demostració:
Es segueix directament de la proposició 3.6.

□

Subgrups discrets

En aquesta secció presentem el formalisme que ens permetrà estudiar els subgrups d'isometries hiperbòliques i fem notar les connexions d'aquest estudi amb la determinació de les formes espacials de $\mathbb{H}^n$.

Sigui G un grup actuant sobre un conjunt X (definició 1.4) i sigui $x \in X$.

El subgrup $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ de G s'anomena *estabilitzador de x en G*.

Recordem que els subconjunts $Gx = \{gx : g \in G\}$ de G s'anomenen òrbites de x.

Definim la funció $\phi : G/G_x \to Gx$ de manera que $\phi(gG_x) = gx$. Notem que ϕ és una bijecció. Per tant l'índex de G_x a G és la cardinalitat de la òrbita Gx.

Definició 3.5. *Un grup discret és un grup topològic τ tal que tots els seus punts són oberts.*

La noció de grup discret és crucial pel nostre desenvolupament. Tot grup es pot fer discret de manera trivial prenent la topologia discreta. Els casos no trivials que ens interessen són els subgrups discrets de grups continus com $\mathbb{R}^n$ o els grups d'isometries [8]. Per exemple els enters $\mathbb{Z}$ formen un subgrup discret de $\mathbb{R}$.

En el cas que el grup discret τ sigui un espai mètric, tot subgrup discret de τ és també un tancat de τ. Per altra banda, τ és discret si i només si tota seqüència convergent $\{g_n\}$ d'elements de τ és eventualment constant.

Proposició 3.8. *Un subgrup τ de $U(n)$ és discret si i només si τ és finit.*

Demostració:
Si τ és finit aleshores és obviament discret.
Recíprocament, suposem que τ és discret. Tot subgrup discret d'un espai mètric és tancat, per tant en particular τ és tancat. Llavors, com que $U(n)$ és compacte, τ és compacte. Finalment, un compacte tal que tots els seus elements són oberts ha de ser necessàriament finit.

□

El nostre interès es centra en els subgrups G que actuen de manera totalment discontínua sobre espais mètrics, ja que la proposició 1.4 ens afirma que els espais quocients $\mathbb{H}^n/G$ són isomorfs a les formes espacials contingudes a $\mathbb{H}^n$. Així doncs, és oportú recuperar i posar en relleu la definició de subgrup discontinu i relacionar-la amb la noció de subgrup discret.

Definició 3.6. *Un grup G actua de manera totalment discontínua en un espai topològic X si $\forall x \in G$, existeix un entorn compacte U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ excepte per un nombre finit de $g \in G$.*

Un grup G d'homeomorfismes sobre un espai topològic X és discontinu si hi actua de manera totalment discontínua.

Proposició 3.9. *Sigui τ un grup d'isometries de l'espai mètric X. Llavors τ és discontinu si i només si es compleix:*

1. *Cada subgrup estabilitzador de τ és finit.*
2. *Tota òrbita generada per τ és un subconjunt discret i tancat de X.*

Demostració:
Si τ és discontinu, els estabilitzadors de τ són finits ja que $\{x\}$ es compacte per $x \in X$ i per tant G_x és finit. Per altra banda, les seves òrbites són subconjunts discrets i tancats de X degut a que la col.lecció de conjunts formats per un sol punt de Gx és *localment finita*, és a dir tot punt de Gx interseca amb un nombre finit de conjunts de la col.lecció. Es pot demostrar que aquest fet implica que tot subconjunt de Gx és un tancat de X. En particular Gx és un subconjunt tancat i discret de X.

Veurem el recíproc per reducció al absurd. Soposem que τ no és discontinu i que satisfà *1* i *2*. Aleshores hi ha un compacte $K \subset X$ i una seqüència infinita $\{g_i\}$ d'elements de τ diferents tal que K i g_iK es sobreposen. Podem assumir doncs que per cada i, existeix un punt $x_i \in K$ tal que g_ix_i és a K. Com que K és compacte, la seqüència $\{x_i\}$ té un punt límit $x \in K$ on convergeix. De la mateixa manera podem assumir que $\{g_ix_i\}$ convergeix a un punt $y \in K$. Notem que

$$d(g_ix, y) \leq d(g_ix, g_ix : i) + d(g_ix_i, y)$$

Per tant $\{g_ix\}$ convergeix a y.
Per cada i, existeix un nombre finit de j tals que $g_ix = g_jx$ degut a *1*. Per tant, hi ha una subseqüència infinita de $\{g_ix\}$ de termes diferents que convergeix a y. Això contradiu *2* i per tant hem arribat a una contradicció.

□

Observació 3.3. El resultat 3.9 s'ha afegit per consistència amb el formalisme introduït ja que es relaciona directament amb la proposició 1.4: Si X és un espai mètric de curvatura constant com $\mathbb{H}^n$ i τ és un grup d'isometries discontinu, les òrbites generades per τ formen un conjunt isomorf a alguna forma espacial de X. Equivalentment, els subconjunts discrets i tancats de X generats per τ són isomorfs als punts d'alguna forma espacial de M.

Proposició 3.10. *Sigui X un espai mètric finitament compacte. El grup τ d'isometries de X és discret si i només si és discontinu.*

Demostració:
Suposem que τ és discontinu. Sigui $x \in X$, llavors, degut a la proposició 3.8, la òrbita τx és discreta i l'estabilitzador τ_x és finit.
Sigui $\epsilon_x : \tau \to \tau_x$ l'aplicació que envia els elements de τ a la corresponent òrbita de x. Notem que ϵ_x és contínua. Aleshores, el conjunt $\epsilon_x^{-1}(x) = \tau_x$ és un obert en τ. Per tant l'aplicació identitat I de X és un obert de τ.

Considerem ara $g \in \tau$. La operació per l'esquerra amb g és un homeomorfisme de τ. Així doncs, com que I és obert, tenim que $g\{I\} = \{g\}$ és obert i per tant τ és discret.

Recíprocament, suposem que τ és discret. Com que X té base contable i és regular, $C(X, X)$ també i per tant se li pot associar una mètrica. Conseqüentment, el subgrup $I(X) \subset C(X, X)$ també té una mètrica. Podem considerar doncs la topologia mètrica en $I(X)$. Tot subgrup discret d'un espai amb topologia mètrica és un tancat, per tant τ és tancat en $I(X)$. Es pot demostrar que aleshores τ també és tancat en $C(X, X)$.

Sigui $K \subset X$ un compacte i sigui $S = \{g \in \tau : K \cap gK \neq \emptyset\}$. El conjunt S és tancat en $C(X, X)$ ja que τ és un subconjunt tancat i discret de $C(X, X)$. Per cada $x \in X$, $r > 0$ i $g \in S$, tenim que $gB(x, r) = B(gx, r)$.

Sigui $a \in K$, sigui x un punt arbitrari de X i sigui $r = d(a, x)$ i $s = \text{diam}(K)$. Si g està contingut en S, tenim que

$$d(a, gx) \geq d(a, ga) + d(ga, gx) \leq 2s + r$$

Per tant,

$$\epsilon_x(S) = \{gx : g \in S\} \subset C(a, 2s + r)$$

És a dir que $\overline{\epsilon_x(S)}$ és compacte. Així doncs S és compacte degut al teorema de $Arzela - Ascoli$. Com que S és discret, S ha de ser finit i per tant discontinu.

□

Subgrups Elementals

En aquesta darrera secció, particularitzem l'estudi al cas de l'espai hiperbòlic. L'objectiu és estudiar els subgrups discrets d'isometries, ja que són discontinus degut a la proposició 3.10. Així doncs, resolem aquí el problema suggerit per la proposició 1.4 (observació 1.5). Per fer-ho considerem els subgrups elementals del grup $M(B^n)$, que com veurem ens permeten caracteritzar els subgrups discrets.

Definició 3.7. *Un subgrup G de $M(B^n)$ és elemental si i només si G té una òrbita finita en la bola tancada $\bar{B}^n$.*

Podem classificar aquests subgrups en tres tipus. Sigui G un subgrup elemental de $M(B^n)$.

1. El grup G és de *tipus el.líptic* si i només si G té una òrbita finita en B^n.
2. El grup G és de *tipus parabòlic* si i només si G fixa un punt de S^{n-1} i no té altres òrbites finites en $\bar{B}^n$.
3. El grup G és de *tipus hiperbòlic* si i només si G no és el.líptic ni és parabòlic.

Observació 3.4. Siguin els grups G, H, K i siguin $g \in G$, $h \in H$. Els elements g, h són *conjugats en* K si $\exists k \in K$ tal que $g = khk^{-1}$. Si tots els elements dels grups G i H es poden conjugar en K entre ells, es diu que G i H són conjugats en K. La *classe de conjugació de* x és el conjunt de punts de G conjugats en G amb x.

Sigui G un subgrup elemental, sigui $\phi \in M(B^n)$ i sigui $x \in \bar{B}^n$.
Llavors $(\phi G \phi^{-1})\phi(x) = \phi(Gx)$. Equivalentment, la òrbita $\phi G \phi^{-1}(\phi(x))$ és la imatge per ϕ de la òrbita Gx. Això implica que $\phi G \phi^{-1}$ també es un subgrup elemental. Per altra banda, G i $\phi G \phi^{-1}$ són del mateix tipus elemental. Així doncs el tipus elemental de G depèn únicament de la classe de conjugació de G.

Comencem considerant els subgrups de tipus el.líptic.

Proposició 3.11. *Sigui G un subgrup elemental de $M(B^n)$. Els enunciats següents són equivalents:*

(a) El grup G és el.líptic.

(b) El grup G fixa un punt de B^n

(c) El grup G és conjugat en $M(B^n)$ a un subgrup del grup de transformacions ortogonals $O(n)$.

Demostració:
Suposem que G és de tipus el.líptic. Passem a considerar el model de l'hiperboloide H^n, tot assumint que G és un subgrup de $PO(n, 1)$. Com que G és de tipus el.líptic, té una òrbita finita $\{v_1, ..., v_m\}$ en H^n. Sigui $v = v_1 + \cdots + v_m$ i sigui $v_0 = v/|||v|||$ on, en les coordenades $v = (\eta_1, ..., \eta_n, \rho) \in \mathbb{R}^{n,1}$, definim $|||v||| = \rho$. Notem que v és un vector temporal i positiu de $\mathbb{R}^{n,1}$ i que $v_0 \in H^n$.

Si G conté la isometria A, aleshores A permuta els elements de $\{v_1, ..., v_m\}$ amb la multiplicació per l'esquerra. Així doncs, tenim que

$$Av_0 = \frac{Av}{|||v|||} = \frac{Av_1 + \cdots + Av_m}{|||v|||} = \frac{v_1 + \cdots + v_m}{|||v|||} = v_0$$

Per tant G fixa $v_0 \in H^n$. Així doncs, (a) implica (b).

Suposem ara que G fixa un punt $b \in B^n$. Sigui $\phi \in M(B^n)$ de manera que $\phi(0) = b$. Llavors $\phi^{-1}G\phi$ fixa 0. Les transformacions amb aquesta propietat es pot demostrar que són ortogonals. Conseqüentment, $\phi^{-1}G\phi$ és un subgrup de $O(n)$. Per tant (b) implica (c).

Suposem que existeix $\phi \in M(B^n)$ tal que $\phi^{-1}G\phi$ és un subgrup de $O(n)$. Tal com hem assumit abans, llavors G fixa $\phi(0)$. Per tant (c) implica (a).

□

Proposició 3.12. *Sigui τ un subgrup de $M(B^n)$. Els enunciats següents són equivalents:*

(a) El grup τ és finit.

(b) El grup τ és conjugat en $M(B^n)$ a un subgrup finit de $O(n)$.

(c) El grup τ és un subgrup discret i elemental de tipus el.líptic de $M(B^n)$.

Demostració:
Es segueix directament dels resultats 3.8 i 3.11.

□

Per analitzar els grups elementals de tipus parabòlic és més adient treballar amb el model del semi-espai superior U^n. Els subgrups elementals de $M(U^n)$ es defineixen de la mateixa manera que pel model conforme B^n.

Definim les *similituds* $S(M)$ d'un espai mètric M amb noció de distància d com les aplicacions bijectives ϕ tals que, $\forall x, y \in M$, existeix $k > 0$ de manera que $d(\phi(x), \phi(y)) = kd(x, y) \ \ \forall x, y \in M$.

L'avantatge principal de treballar en $M(U^n)$ és que el grup de similituds euclidianes $S(E^{n-1})$ és isomòrfic via l'extensió de Poincaré amb l'estabilitzador de ∞ en $M(U^n)$. Per tant podem identificar els dos grups.

Proposició 3.13. *Sigui G un subgrup elemental de $M(U^n)$. Els enunciats següents són equivalents:*

(a) El grup G és parabòlic.

(b) El grup G té un únic punt fix en $\hat{E}^{n-1}$.

(c) El grup G és conjugat en $M(U^n)$ a un subgrup de $S(E^{n-1})$ que no fixa cap punt de E^{n-1}.

Demostració:
Considerant la projecció estereogràfica, clarament (a) implica (b). Per altra banda, com que $S(E^{n-1})$ és identificable amb l'estabilitzador de $\{\infty\} \notin E^{n-1}$, tenim que (b) i (c) són propietats equivalents.

Manca veure que (b) implica (a). Ho veurem per reducció al absurd. Suposem que G fixa un únic punt $a \in \hat{E}^{n-1}$ i que G no és de tipus parabòlic. Aleshores G té una òrbita finita $\{u_1, ..., u_m\}$ en $\bar{U}^n$ diferent de la òrbita $\{a\}$. Assumim primer que $\{u_1, ..., u_m\}$ pertany a U^n. Aleshores G és el.líptic, i per tant fixa un punt $u \in U^n$ degut a la proposició 3.11. Conseqüentment, G fixa la geodèsica L que comença en a i passa per u. Això implica que G fixa l'altre punt extrem de L. Hem arribat a una contradicció ja que a és lúnic punt fix. Així doncs, $\{u_1, ..., u_m\} \notin U^n$ i per tant necessàriament ha d'estar contingut en $\hat{E}^{n-1}$.

Com que a és l'únic punt fix de G en $\hat{E}^{n-1}$, cal que $m \geq 2$. Notem que l'índex de cada estabilitzador G_{u_i} és m. Per tant, $H = G_{u_1} \cap G_{u_2}$ té índex finit en G. Per altra banda, cada element de H és el.líptic, ja que H fixa els tres punts a, u_1, u_2. Llavors necessàriament H fixa la recta hiperbòlica L que uneix a i u_1.

Sigui u qualsevol punt de L. Com que G_u conté H, tenim que G_u té índex finit en G, o sigui que la òrbita Gu és finita. Com hem comprovat abans, això condueix a una contradicció. Per tant G ha de ser de tipus hiperbòlic i (b) implica (a).

□

Proposició 3.14. *Siguin $\phi, \psi \in M(U^n)$ amb ψ hiperbòlica. Si ϕ i ψ tenen exactament un punt fix en comú, el subgrup generat per ϕ i ψ no és discret.*

Demostració:
A través de conjugacions en $M(U^n)$, podem imposar que el punt fix en comú sigui ∞. Podem considerar doncs que $\phi, \psi \in S(E^{n-1})$. A través de conjugacions en $S(E^{n-1})$ podem imposar que ψ fixi 0. Amb tot, considerant que ψ és hiperbòlica (observació 2.5), han d'existir escalars positius r, s, matrius $A, B \in O(n-1)$ i un punt $a \neq 0$ de E^{n-1} de manera que $\phi(x) = a + rAx$ i $\psi(x) = sBx$. Podem assumir que $0 < s < 1$, ja que podem substituir ψ per la seva inversa si és necessari. Així doncs, tenim que

$$\psi^m \phi \psi^{-m}(x) = s^m B^m a + rB^m AB^{-m}x$$

per cada enter positiu m.
Els termes de la seqüència $\{\psi^m \phi \psi^{-m}\}$ són tots diferents ja que $\psi^m \phi \psi^{-m}(0) = s^m B^m a$ on $a \neq 0$. Com que el grup $O(n-1)$ és compacte, la seqüència $\{B^m AB^{-m}\}$ té una subseqüència convergent $\{B^{m_j} AB^{-m_j}\}$.

Sigui τ_m la translació euclidiana de E^{n-1} per $s^m B^m a$. La seqüència $\{\tau_m\}$ es pot veure fàcilment que convergeix a la identitat I. Notem ara que com que $\psi^m \phi \psi^{-m} = \tau_m rB^m AB^{-m}$, la seqüència $\{\psi^{m_j} \phi \psi^{-m_j}\}$ convergeix però no és eventualment constant, tal com passa pels grups discrets. Així doncs, $< \phi, \psi >$ no és un grup discret.

□

Proposició 3.15. *Un subgrup τ de $M(U^n)$ és un subgrup elemental i discret de tipus parabòlic si i només si τ és conjugat en $M(U^n)$ a un subgrup discret i infinit de $I(E^{n-1})$.*

Demostració:
Suposem que τ és un subgrup discret i elemental de tipus parabòlic. Per la proposició 4.13, podem assumir que τ és un subgrup de $S(E^{n-1})$ que no fixa cap punt de E^{n-1}. Per la proposició 3.14, el grup τ no conté transformacions hiperbòliques, ja que si fos així τ fixaria un punt de E^{n-1}. Amb tot, es pot demostrar (observació 2.5) que τ és un subgrup de $I(E^{n-1})$. Notem que el grup τ ha de ser infinit, altrament seria de tipus el.líptic.

El recíproc el veurem per reducció al absurd. Suposem que τ és un subgrup discret i infinit de $I(E^{n-1})$ i que τ fixa un punt de E^{n-1}. A través de conjugacions en $I(E^{n-1})$, es pot imposar que τ fixi 0. Llavors τ és un subgrup de $O(n-1)$. Arribem a una contradicció ja que τ és discret i per tant finit, tot contradient la nostra suposició. Així doncs, τ no fixa cap punt de E^{n-1} i aleshores, segons la proposició 3.13, és de tipus parabòlic.

□

Finalment considerem els subgrups elementals de tipus hiperbòlic usant de nou el model U^n.

Sigui $S(E^{n-1})_*$ el subgrup de $M(E^{n-1})$ de totes les transformacions que deixen invariant el conjunt $\{0, \infty\}$. El grup $S(E^{n-1})_*$ conté el subgrup $S(E^{n-1})_0$ de totes les similituds que fixen 0 i fixen ∞ com un subgrup d'índex dos. Podem identificar $S(E^{n-1})_*$ amb el subgrup de $M(U^n)$ de totes les transformacions que deixen $\{0, \infty\}$ invariant.

Proposició 3.16. *Sigui G un subgrup elemental de $M(U^n)$. Els enunciats següents són equivalents:*

(a) El grup G és hiperbòlic.

(b) La unió de totes les òrbites finites de G en $\bar{U}^n$ la formen dos punts de $\hat{E}^{n-1}$.

(c) El grup G és conjugat en $M(U^n)$ a un subgrup de $S(E^{n-1})_*$ que no fixa cap punt de l'eix positiu de la dimensió n.

Demostració:
Suposem que G és de tipus hiperbòlic. Llavors totes les òrbites finites de G estan contingudes en $\hat{E}^{n-1}$, ja que G no és de tipus el.líptic. Sigui $\{u_1, ..., u_m\}$ la unió d'un nombre finit d'òrbites de G. Llavors cada estabilitzador G_{u_i} és díndex finit en G, ja que cada òrbita G_{u_i} és finita. Sigui

$$H = G_{u_1} \cap \cdots \cap G_{u_m}$$

Notem que H és d'índex finit en G i que fixa cada u_i. Si $m \geq 3$, el grup H ha de ser de tipus el.líptic, però això implicaria que G és de tipus el.líptic que no és el cas. Llavors m és 1 o 2. El cas $m = 1$ el podem descartar usant la proposició 3.13 ja que G no és parabòlic. Així doncs, G té una òrbita finita formada per dos punts o té dues òrbites formades per un punt cada una. Per tant (a) implica (b).

Tenint en compte la consideració prèvia al teorema, és obvi que (b) implica (c).

Finalment, suposem que G és un subgrup de $S(E^{n-1})_*$ que no fixa cap punt de l'eix positiu de la dimensió n. Llavors G fixa 0 i fixa ∞ o bé $\{0, \infty\}$ és una òrbita de G. Per tant G no és de tipus parabòlic.

Veiem que tampoc és de tipus el.líptic per reducció al absurd. Suposem doncs que G és de tipus el.líptic. Si G fixa 0 i fixa ∞, llavors G fixaria l'eix postiu de la dimensió n, que no és el cas. Aleshores $\{0, \infty\}$ és una òrbita de G. L'estabilitzador G_0 és díndex dos en G i fixa tant 0 com ∞. Per tant G_0 fixa l'eix positiu de la dimensió n que denotem L. Sigui $\phi \in G - G_0$. Llavors ϕ deixa invariant L i intercanvia els seus dos extrems. Conseqüentment, ϕ necessàriament té un punt fix $u \in L$. Com que G_0 i ϕ generen G, el grup G fixa u. Hem arribat a una contradicció. Per tant G és hiperbòlic i (c) implica (a).

$\square$

Sigui G un subgrup elemental de $M(U^n)$ de tipus hiperbòlic. Degut a la proposició 3.12, el grup G deixa invariant una única geodèsica de U^n que anomanem *eix de* G.

Proposició 3.17. *Un subgrup τ de $M(U^n)$ és un subgrup elemental de tipus hiperbòlic si i només si τ és conjugat en $M(U^n)$ a un subgrup discret i infinit de $S(E^{n-1})_*$.*

Demostració:
Es segueix dels resultats 3.12 i 3.16.

$\square$

Observació 3.5. Una descripció i caracterització més profunda dels subgrups discrets d'isometries es pot trobar a [1], capítols 6 i 7.

4 Conclusions i Estudis posteriors.

La resolució de la independència del cinquè postulat d'Euclidies mitjançant la classificació dels espais de curvatura constant, que ha contextualitzat i motivat l'estudi de l'espai hiperbòlic en contraposició amb els altres dos espais de naturalesa més intuitiva, és en si un camí ple de resultats destacables i molt elegants. És el cas de les proposicions 1.3, 1.4 o dels quatre teoremes continguts al primer capítol. El seu desenvolupament posa en valor les eines de la geometria Riemanniana i redueix la geometria clàssica, entesa durant mil.lenis com una descripció general de l'espai, a un dels tres casos possibles de geometries totalment equivalents en consistència.

En aquest treball, l'espai hiperbòlic s'ha caracteritzat per una dimensió arbitrària, de manera que el nivell d'abstracció s'ha elevat molt respecte l'estudi dels altres espais. El model de l'hiperboloide és potser el més intuitiu tot i l'ús de la mètrica Lorentziana. La presentació dels models conforme i del semi-espai superior de forma constructiva a través de transformacions de Möbius posa en relleu nous punts de vista des dels quals intuir la naturalesa d'aquest espai, ja que aquestes transformacions es conceben a partir del món euclidi.

L'estudi de les isometries com a grups topològics ha permès caracteritzar-les de forma clara fent ús de resultats topològics i algebraics simultàneament. És un tractament de gran potencial que apareix en moltes branques de les matemàtiques.

El desenvolupament de la trigonometria hiperbòlica, que no hem tractat aquí però que com podem esperar és totalment anàloga a la euclidiana o l'esfèrica, va ser el primer indici de la consistència de l'espai de curvatura negativa. En aquest treball s'han disposat les eines per estudiar en profunditat aquesta trigonometria i veure les dualitats que presenta amb les dels altres espais.

En el primer i el darrer capítols es mostra com determinar les varietats que conté l'espai hiperbòlic a partir de les isometries. El següent pas seria estudiar en profunditat aquestes varietats i desenvolupar mètodes per construir-les ([1], capítols 10 i 11), tot centrant-nos en el cas de les varietats compactes.

Cal fer notar que la descripció de l'espai hiperbòlic duta a terme té una aplicació directa a la Teoria de la Relativitat, ja que és l'espai on es situen les dimensions de l'espai-temps. Al segon capítol, en la secció *Hiperboloide* H^n, s'ha fet menció de certes definicions que tenen una interpretació física directa. A partir d'aquí i de l'estudi dels angles de tipus espacial i temporal s'elaboren les idees matemàtiques darrera d'aquesta cèlebre teoria.

Finalment, un estudi posterior també podria ser la caracterització de les superfícies de Riemann, que són una redefinició en termes de l'espai complex de les varietats bidimensionals Riemannianes estudiades. Obtenim així superfícies que són l'espai natural on analitzar el comportament de nombroses funcions complexes.

0 Apèndix: Geometria Riemanniana.

Introducció

Aquest apèndix s'estructura com un capítol més del treball. Conté una presentació de la terminologia i les idees principals de la Geometria Riemanniana. Durant el treball es citen molts resultats que podem trobar aquí i és el formalisme bàsic a partir del qual es desenvolupa el treball. La notació seguida i l'estructura del text és bàsicament la dels cinc primers capítols de [2].

Es tracta d'una síntesi que pretén introduir de manera coherent totes les eines formals que hem requerit per desenvolupar el treball. L'enfocament és purament instrumental, ja que la construcció que es presenta és el context en el qual es motiva l'estudi de l'espai hiperbòlic en el primer capítol. Tot i que el text és autocontingut, hi ha algunes referències al llibre esmentat per si el lector vol aprofundir en aspectes que no utilitzarem directament en aquest treball.

Les dues primeres seccions recullen les idees essencials de la geometria diferencial. En les dues seccions següents s'el.laboren les nocions bàsiques de la geometria Riemanniana que són la mètrica i les connexions. Finalment, a la darrera secció, es pretén familiaritzar el lector amb els conceptes de geodèsica i curvatura que ens serviran per distingir i comprendre les particularitats de les varietats hiperbòliques.

Varietats Diferenciables

La noció de varietat diferenciable permet aplicar mètodes del càlcul diferencial sobre espais més generals que $\mathbb{R}^n$. Un exemple de varietat diferenciable il.lustratiu són les superfícies regulars a $\mathbb{R}^3$. Un subconjunt $S \subset \mathbb{R}^3$ és una *superficie regular* si per tot $p \in S$, existeix un subconjunt $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p \in V$ i una aplicació $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ on U és un obert que compleixen:

(i) x és un homeomorfisme diferenciable anomenat *parametrització*.

(ii) L'aplicació diferencial $(dx)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ és injectiva per tot $q \in U$.

Cal notar que diferents parametritzacions d'una superfície regular es poden relacionar a través d'un difeomorfisme. Concretament, si $x_1 : U_1 \to S$ i $x_2 : U_2 \to S$ són parametritzacions tals que $x_1(U_1) \cap x_2(U_2) = W \neq \emptyset$, llavors les aplicacions $x_2^{-1} \circ x_1 : x_1^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ i $x_1^{-1} \circ x_2 : x_2^{-1}(W) \to \mathbb{R}^2$ són diferenciables.

Així doncs, intuitivament, les superfíces regulars són la unió d'oberts a $\mathbb{R}^2$ i allà on dos oberts intersequen podem passar d'un a l'altre de manera diferenciable. En aquestes condicions té sentit parlar d'aplicacions diferenciables sobre les superfícies i, llavors, aplicar eines del càlcul diferencial.

Observació 0.1. Una aplicació diferenciable és una aplicació de classe C^∞.

A continuació es presenta la definició general de varietat diferenciable. Com que no hi ha cap avantatge en restringir les definicions a dues dimensions, a partir d'aquí s'enunciarà tot per una dimensió arbitrària n.

Definició 0.1. *Una varietat diferenciable de dimensió n és un conjunt M i una família d'aplicacions injectives* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ *on* U_α *són oberts, de manera que es compleix:*

1. $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Per tot* α *i* β *tals que* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *els conjunts* $x_\alpha^{-1}(W)$ *i* $x_\beta^{-1}(W)$ *són oberts a* $\mathbb{R}^n$ *i les aplicacions* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ *i* $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ *són diferenciables.*
3. *La família* (U_α, x_α) *és maximal respecte les condicions 1 i 2.*

Notem que x_α amb $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ és la parametrització de M a p. Una família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que compleix *1* i *2* s'anomena *estructura diferenciable en M.* La condició *3* s'inclou per raons purament tècniques i com que sempre podem completar una estructura diferenciable a una maximal (unint parametritzacions de manera que es compleixi *2*), sempre considerarem estructures diferenciables maximals sense indicar-ho.

La idea fundamental, que hem vist per les superfícies regulars i que retrobem en la definició general de varietats diferenciables, és la possibilitat de canviar de parametritzacions sobre una mateixa varietat de forma diferenciable. Com veurem, aquesta és la condició que ens permetrà aplicar resultats del càlcul diferencial sobre les varietats.

L'espai euclidi $\mathbb{R}^n$ amb l'estructura diferenciable donada per la identitat és un exemple trivial d'estructura diferenciable. Un altre exemple no tant trivial és l'esfera S^n amb l'estructura diferenciable representada per $U_1 = S^n - \{(0, ..., 0, 1)\}$ i $U_2 = S^n - \{(0, ..., 0, -1)\}$ amb φ_1 i φ_2 les respectives projeccions estereogràfiques.

Ara extendrem la idea de diferenciabilitat a aplicacions entre varietats.

Definició 0.2. *Siguin* M_1^n *i* M_2^m *dues varietats diferenciables on m i n són les seves respectives dimensions.*

Una aplicació $\phi : M_1 \to M_2$ *és diferenciable a* $p \in M_1$ *si donada una parametrització* $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ *a* $\phi(p)$, *hi ha una parametrització* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ *a p tal que* $\phi(x(U)) \subset y(V)$ *i l'aplicació*

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{0.1}$$

és diferenciable a $x^{-1}(p)$.

Diem que ϕ *és diferenciable en un obert de* M_1 *si és diferenciable a tots els punts de l'obert.*

Degut a la condició *2* de la definició 0.1, la diferenciabilitat de l'aplicació ϕ és independent de les parametritzacions preses a cada varietat. L'aplicació (0.1) s'anomena *expressió de* ϕ *en les parametritzacions x i y.*

Espai Tangent

Volem introduir la idea de vector tangent a les varietats diferenciables. Per superfícies a $\mathbb{R}^3$, un vector tangent a un punt p és el vector variació ("velocitat") d'una corba sobre la superfície que passa per p. Aquesta definició necessita l'entorn a la superfície. Les següents apreciacions permeten construir una definició de vector tangent intrínseca a una varietat diferenciable qualsevol.

Considerem una corba diferencial $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ amb $\alpha(0) = p$. Denotem $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ on $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Llavors $\alpha'(0) = (x_1'(0), ..., x_n'(0)) = v$. Sigui f una funció diferenciable definida a l'entorn de p, la podem restringir a la corba α i expressar $\frac{d(f o \alpha)}{dt}|_{t=0}$ (la variació de f a $t = 0$ en la direcció v) com $\sum_i x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i} f$ per la regla de la cadena. Aquesta derivada direccional és un operador de funcions diferenciables que depenen únicament de v. Aquest fet inspira la següent definició.

Definició 0.3. *Sigui M una varietat diferenciable, una aplicació diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ s'anomena corba diferenciable en M.*

Suposem $\alpha(0) = p \in M$ i sigui $D(M)$ el conjunt de funcions diferenciables a M en p.

El vector tangent a la corba α en $t = 0$ és una funció $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$$

on $f \in D(M)$.

Un vector tangent a M en p és el vector tangent a alguna corba $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$.

L'espai tangent a M en p, que denotarem T_pM, és el conjunt de tots els vectors tangents a M en p.

Associant a cada punt d'una varietat diferenciable un vector de l'espai tangent podem construir el seu *fibrat tangent* $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ que és una estructura diferenciable.

Anem a veure les característiques de l'espai tangent i dels vectors que el conformen. Si prenem una parametrització $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ on $p = x(0)$, podem restringir una funció f a una corba α i expressar-ho en la parametrització donada:

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t), ..., x_n(t))|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0)f$$

Per tant la forma explícita del vector tangent és

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0 \tag{0.2}$$

De l'expressió (0.2) veiem clarament que el vector tangent és independent de l'entorn de la varietat, està definit en termes d'un *sistema de coordenades* a $U \subset \mathbb{R}^n$ a través d'una parametrització que denotem (U, x). A més, el conjunt T_pM forma un espai vectorial de dimensió n (dimensió de la varietat M) amb les operacions usuals. També se'n segueix que l'elecció de la parametrització dóna lloc a una base de T_pM: $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\}$ que anomenarem *base associada*. Així doncs, l'espai tangent és una estructura lineal que no depèn de la parametrització presa.

Ara estem en condicions de considerar aplicacions entre espais tangents de varietats diferenciables diferents, o sigui aplicacions que són la derivada d'aplicacions diferenciables entre varietats.

Definició 0.4. *Siguin M_1^n i M_2^m dues varietats diferenciables i sigui $\varphi : M_1 \to M_2$ una aplicació diferenciable.*

Llavors $\forall p \in M_1$ existeix l'aplicació lineal tangent (o diferencial de φ a p) $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ definida de manera que

$$((d\varphi)_p K)(g) = K(g \circ \varphi) \tag{0.3}$$

on $K \in T_pM_1$ i $g : M_2 \to \mathbb{R}$ és una aplicació diferenciable.

Una altra manera il.lustrativa d'entendre la definició d'aplicació lineal tangent $d\gamma_p$ és la següent: En les mateixes condicions de la definició 0.4, per cada $p \in M_1$ i per cada $v \in T_pM_1$, prenem una corba $\alpha : (\epsilon, -\epsilon) \to M_1$. Considerem $\beta = \varphi \circ \alpha$. Llavors $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$. Aquesta aplicació no depèn de la corba α presa.

A continuació es presenta la noció de difeomorfisme que indueix la idea d'equivalència entre varietats diferenciables.

Definició 0.5. *Siguin M_1 i M_2 dues varietats diferenciables.*
Una aplicació $\varphi : M_1 \to M_2$ és un difeomorfisme si és diferenciable, bijectiva i la seva inversa φ^{-1} és diferenciable.
φ és un difeomorfisme local a $p \in M$ si existeix un entorn U de p i un entorn V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi|_U : U \to V$ és un difeomorfisme.

La relació d'equivalència entre varietats que indueix el difeomorfisme té implicacions en els respectius espais tangents.

Siguin M_1, M_2, M_3 varietats diferenciables amb $p \in M_1$ i siguin $F : M_1 \to M_2$, $G : M_2 \to M_3$ aplicacions diferenciables, aleshores, degut a la regla de la cadena, $d(G \circ F)_p = (dG)_{F(p)} \circ (dF)_p$. Aquesta regla es segueix directament de l'expressió (0.3).

Una conseqüència inmediata d'aquesta regla és que si una aplicació entre varietats diferenciables $\varphi : M_1 \to M_2$ és un difeomorfisme, aleshores $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ és un isomorfisme $\forall p \in M_1$ i, per tant, la dimensió de M_1 i M_2 és la mateixa.
En el sentit recíproc, es pot demostrar amb el teorema de la funció inversa que si $\varphi : M_1^n \to M_2^n$ és una apliació diferenciable entre varietats de la mateixa dimensió i sigui $p \in M_1$ tal que $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ és un isomorfisme, aleshores φ és un difeomorfisme local a p.

És important introduir el concepte global d'orientabilitat de les varietats diferenciables.

Definició 0.6. *Sigui M una varietat diferenciable.*

M és orientable si admet una estructura diferenciable $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *tal que (*):* $\forall \alpha, \beta$ *si* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$*, llavors la derivada del canvi de coordenades* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ *té determinant positiu.*

En el cas contrari M és no orientable.

L'elecció de l'estructura diferenciable que satisfà la condició *(*)* s'anomena *orientació* de M. Dues estructures diferenciables determinen la mateixa orientació si la seva unió segueix satisfent la condició *(*)*.

Siguin M_1 i M_2 varietats diferenciables i $\varphi : M_1 \to M_2$ un difeomorfisme. Aleshores M_1 és orientable si i només si M_2 ho és. Aquest fet permet induir orientacions a través de difeomorfismes.

Finalment definirem el concepte de camp vectorial que també ens serà útil alhora de construir el formalisme posterior.

Definició 0.7. *Un camp vectorial X en una varietat diferenciable M és una correspondència que associa a cada punt* $p \in M$ *un vector* $X(p) \in T_pM$*. Així doncs, X és una aplicació de M al seu fibrat tangent TM.*

El camp vectorial és diferenciable si l'aplicació $X : M \to TM$ *és diferenciable. El conjunt de camps vectorials diferenciables a M es denota* $\chi(M)$*.*

Prenent un sistema de coordenades, on $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ és la parametrització, podem escriure $X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$ on $a_i : U \to \mathbb{R}$ i $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ és la base associada a x. Clarament, X és diferenciable si i només si les funcions a_i són diferenciables per alguna (i per tant per tota) parametrització.

Mètrica Riemanniana

La Geometria Riemanniana proposa una manera de fer mesures sobre les varietats diferenciables a través d'una mètrica. Per dotar de mètrica a una varietat diferenciable M, definim a cada punt $p \in M$ un producte intern $< \, , \, >_p$ entre els vectors de l'espai tangent T_pM que ens permet mesurar la longitud dels vectors. A partir d'aquí podem definir la longitud d'una corba com la integral de la longitud del seu vector velocitat, o bé definir altres mesures com àrees, volums, angles entre corbes i altres.

La mètrica també ens permet definir un tipus especial de corbes anomenades geodèsiques que intuitivament són les "rectes"de la varietat i, com veurem, caracteritzen les varietats diferenciables. Les estudiarem més endavant en aquest apèndix.

Aquest desenvolupament ens conduirà a l'elaboració del concepte de curvatura que també explicarem detingudament en la darrera secció d'aquest apèndix.

La curvatura depèn únicament de la manera de mesurar sobre la varietat, és a dir es pot definir en termes de la mètrica, i reflexa les propietats geomètriques intrínseques de la varietat. Considerant curvatures no nul.les donarem lloc a geometries no euclidianes, en particular la curvatura negativa constant correspòn a les varietats hiperbòliques objecte d'estudi d'aquest treball.

Notem que el producte intern definit a cada punt p dóna lloc a una forma bilineal quadràtica sobre els vectors de l'espai tangent $I_p(v, w) =< v, w >$ on $v, w \in T_pM$ que anomenarem *Primera Forma Fonamental.*

Observació 0.2. Assumim que les varietats diferenciables són espais Hausdorff (punts diferents de la varietat tenen entorns oberts disjunts dins la varietat) amb bases contables.

Definició 0.8. *Una mètrica Riemanniana en una varietat diferenciable M és una correspondència que associa a cada punt $p \in M$ un producte intern $< \, , >_p$ (que és una operació simètrica, bilineal i definida positiva) sobre l'espai tangent T_pM.*

Aquesta operació varia diferenciablement de manera que:
Si $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ és una parametrització a p tal que $x(x_1, ..., x_2) = q \in x(U)$ i $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, aleshores $< \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) >_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ és una funció diferenciable a U.

Les parametritzacions amb les característiques de la definició indueixen sistemes de coordenades (U, x). Cal notar que la definició de mètrica no depèn del sistema de coordenades.

Equivalentment a la definició 0.8, la diferenciabilitat de la mètrica es pot enunciar dient que, per qualsevol parell de camps vectorials X, Y diferenciables en un obert $V \subset M$, la funció $< X, Y >$ és diferenciable a V.

La funció $g_{ij} =< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >$ s'anomena la *representació local de la mètrica en el sistema de coordenades* (U, x). En general, si tenim dos vectors d'un espai tangent $X = \sum_i^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $Y = \sum_j^n \mu_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, llavors:

$$< X, Y >= g(X, Y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdot & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdot & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Les varietats diferenciables dotades de mètrica s'anomenen *varietats Riemannianes.*

Ara introduim el concepte d'isometria que indueix una relació d'equivalència.

Definició 0.9. *Siguin M i N dues varietats Riemannianes.*

Un difeomorfisme f és una isometria si:

$$< u, v >_p =< df_p(u), df_p(v) >_{f(p)}$$

per tot $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

Una aplicació diferenciable $g : M \to N$ és una isometria local a $p \in M$ si hi ha un entorn $U \subset M$ de p tal que $g|_U : U \to g(U)$ és una isometria.

Abans de continuar, per completesa, demostrarem un teorema d'existència de les mètriques Riemannianes.

Proposició 0.1. *Sobre qualsevol varietat diferenciable M podem definir una mètrica Riemanniana.*

Demostració:
Sigui $\{V_\alpha\}$ un recobriment localment finit de M (tot punt de M té un entorn que interseca amb un dels oberts de $\{V_\alpha\}$ i n'hi ha un nombre finit) i sigui $\{f_\alpha\}$ una família de funcions diferenciables en M subordinades a $\{V_\alpha\}$ que satisfan:

1. $f_\alpha \geq 0$, $f_\alpha = 0$ al complementari del tancat $\bar{V}_\alpha$
2. $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1 \; \forall p \in M$

Podem definir una mètrica Riemenniana $<,>^\alpha$ a cada V_α recorrent a la mètrica induida pel sistema local de coordenades que podem associar a cada obert.
Llavors podem construir la mètrica a tot M com $< u, v >_p = \sum_\alpha f_\alpha(p) < u, v >_p^\alpha$ per tot $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

□

Tot seguit mostrarem com podem calcular longituds de corbes a través de la mètrica. Cal recordar la definició de corba 0.3 i notar que una mateixa corba pot passar pel mateix punt diverses vegades.
Podem restringir un camp vectorial V (definició 0.7) a una corba $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ associant a cada $t \in I$ un vector tangent $V(t) \in T_{c(t)}M$. Llavors, la noció de diferenciabilitat vol dir que per tota funció f diferenciable a M, la funció $t \to V(t)f$ és diferenciable a I.

Definició 0.10. *Sigui una corba $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ a una varietat diferenciable M, el camp vectorial $dc(\frac{d}{dt})$, que denotem $\frac{dc}{dt} = c'(t)$ rep el nom de camp de velocitats. Aquest camp associa a cada punt de la corba un vector que és la derivada direccional de l'aplicació c (observació 3).*

La restricció d'una corba a un interval tancat $[a, b] \subset I$ on $I \subset \mathbb{R}$ s'anomena segment $[a, b]$.

Si M és una varietat Riemanniana, definim la longitud l d'un segment $[a, b]$ com:

$$l_a^b(c) = \int_a^b < \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} >^{1/2} dt \tag{0.4}$$

Observació 0.3. El camp de velocitats $\frac{dc}{dt} = c'(t)$ es defineix per la relació $(c'(t))(f) = \frac{d}{dt} f(c(t))$ per tota aplicació f diferenciable.

Per acabar aquesta secció, mostrarem com la mètrica ens permet definir la noció de volum en una varietat orientada M^n.

Proposició 0.2. *Sigui $R \subset M$ un obert conexe amb clausura compacta, contingut en $x(U)$ i tal que la vora de $x^{-1}(R) \subset U$ té mesura zero a $\mathbb{R}^n$ on $x : U \to M$ és una parametrització consistent amb la orientació de M. Sigui g_{ij} la representació local de la mètrica en el sistema de coordenades x.*

Aleshores el volum de R es pot definir correctament com

$$vol(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{det(g_{ij})} dx_1...dx_n \tag{0.5}$$

Demostració:
Sigui $p \in M$, considerem una base ortonormal $\{e_i\} = \{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM i escrivim $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ en la base $\{e_i\}$: $X_i(p) = \sum_{ij} a_{ij} e_j$. Llavors

$$g_{ik}(p) =< X_i(p), X_k(p) >_p = \sum_{jl} a_{ij} a_{kl} < e_j, e_l >= \sum_j a_{ij} a_{kj}$$

El volum $vol(X_1(p), ..., X_n(p))$ del paral.lelopípede format pels vectors $X_i(p)$ a T_pM és igual al volum $vol(e_1, ..., e_n) = 1$ multiplicat pel determinant de la matriu (a_{ij}). Per tant

$$vol(X_1(p), ..., X_n(p)) = det(a_{ij}) = \sqrt{det(g_{ij}(p))}$$

Només manca integrar a tot $x^{-1}(R)$ per obtenir l'expressió (0.5) de $vol(R)$.

$\square$

Suposem les condicions de la proposició 0.2 i sigui $y : V \subset \mathbb{R}^n \to M$ una altra parametrització a p consistent amb la orientació de M, amb $Y_i(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(p)$ i $h_{ij}(p) =< Y_i(p), Y_j(p) >_p$ la representació local de la mètrica en el sistema de coordenades (V, y), llavors

$$\sqrt{det(g_{ij}(p))} = vol(X_1(p), ..., X_n(p)) = J vol(Y_1(p), ..., Y_n(p)) = J \sqrt{det(h_{ij}(p))}$$

on $J = det(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}) = det(dy^{-1} o \ dx)(p) > 0$ és el determinant de la derivada del canvi de variables.
Si R (que està contingut a $x(U)$) també està contingut a $y(V)$, usant el teorema de canvi de variable per múltiples integrals obtenim que

$$\int_{x^{-1}(R)} \sqrt{det(g_{ij})} dx_1...dx_n = \int_{y^{-1}(R)} \sqrt{det(h_{ij})} dy_1...dy_n = vol(R)$$

Per tant la definició de volum no depèn de la parametrització presa. La orientació de les parametritzacions s'imposa consistent amb M perquè no hi hagi canvis de signe.

Connexions Afins i Riemannianes

En la darrera secció d'aquest apèndix desenvoluparem el concepte de geodèsica per una banda i de curvatura per l'altra. Per fer-ho, ens calen les nocions de derivada covariant i de connexió afi que ens permetran estudiar la variació dels camps vectorials sobre les varietats.

Suposem una superfície $S \in \mathbb{R}^3$ i una corba $c : I \to S$ amb un camp vectorial associat $V : I \to \mathbb{R}^3$ tangent a S. El camp vectorial $\frac{dV}{dt}(t)$ on $t \in I$ generalment no pertany a $T_{c(t)}S$, sinó que en general és un vector a $\mathbb{R}^3$. Per tant aquesta noció de variació del camp no és intrínseca a la superfície S sinó que requereix el seu entorn.

Per sol.lucionar-ho, considerarem la projecció ortogonal de $\frac{dV}{dt}(t)$ a $T_{c(t)}S$. Aquest vector projectat és la *derivada covariant* i la denotarem com $\frac{DV}{dt}(t)$. Aquesta definició és intrínseca a S i depèn únicament de la primera forma fundamental de S. Ens permetrà diferenciar camps de velocitats associats a corbes tot obtenint les acceleracions d'aquestes corbes a S. Com veurem, les geodèsiques són corbes amb acceleració zero i la curvatura de Gauss, de la qual també en parlarem més endavant, es pot definir en termes de la derivada covariant.

Aquest fet obre la porta a concebre geometries més generals que la Riemanniana, ja que tant les geodèsiques com la curvatura es poden definir amb la derivada covariant sense recórrer a la mètrica. Per desenvolupar aquestes geometries es va idear el concepte de connexió afí que relacionarem amb la derivada covariant. No entrarem en aquests desenvolupaments però veurem com l'elecció d'una mètrica a una varietat diferenciable determina una certa connexió afí i això ens permetrà diferenciar camps vectorials sobre varietats Riemannianes.

Definició 0.11. *Sigui $\chi(M)$ el conjunt de camps vectorials de M de classe C^∞ i $D(M)$ l'anell de funcions reals diferenciables a M de classe C^∞.*
Una connexió afí $\triangledown$ en una varietat diferenciable M és una aplicació

$$\triangledown : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

que denotem com $(X, Y) \xrightarrow{\triangledown} \triangledown_X Y$ i que satisfà les següents propietats:

1. $\triangledown_{fX+gY} Z = f \triangledown_X Z + g \triangledown_Y Z$.
2. $\triangledown_X (Y + Z) = \triangledown_X Y + \triangledown_X Z$.
3. $\triangledown_X (fY) = f \triangledown_X Y + X(f)Y$.

on $X, Y, Z \in \chi(M)$ i $f, g \in D(M)$.

A continuació relacionarem la connexió afí amb la noció de derivada covariant i donarem sentit a la definició anterior.

Proposició 0.3. *Sigui M una varietat diferenciable amb una connexió afí $\bigtriangledown$. Sigui V un camp vectorial restringit a una corba diferenciable $c : I \to M$.*

Existeix una única correspondència que associa al camp vectorial V, un altre camp vectorial $\frac{DV}{dt}$ anomenat derivada covariant de V sobre c, que compleix:

(i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$*, on W és un camp vectorial sobre c.*

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$*, on f és una funció diferenciable a I.*

(iii) Si $V(t) = Y(c(t))$, llavors $\frac{DV}{dt} = \bigtriangledown_{dc/dt}Y$.

Demostració:
Suposem que existeix una correspondència que satisfà $(i), (ii), (iii)$. Sigui $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ la parametrització d'un sistema de coordenades amb $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ i sigui $(x_1(t), ..., x_n(t))$ l'expressió local de $c(t)$, amb $t \in I$. Denotem $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Podem expressar V localment com $V = \sum_j v^j(t)X_j(c(t))$, on $j = 1, ..., n$.
Per (i) i (ii) sabem que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}$$

Per (iii) i per *3* de la definició 0.11,

$$\frac{DX_j}{dt} = \bigtriangledown_{dc/dt}X_j = \bigtriangledown_{\sum \frac{dx_j}{dt}X_i}X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \bigtriangledown_{X_i} X_j$$

Per tant,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt}v^j \bigtriangledown_{X_i} X_j \tag{0.6}$$

Degut a (0.6), si existeix una correspondència que compleix $(i), (ii), (iii)$ llavors és única.

Per veure l'existència cal definir $\frac{DV}{dt}$ a $x(U)$ segons (0.6), que compleix les propietats desitjades. Per la unicitat les definicions coincideixen allà on intersequen dos entorns coordinats, de manera que podem extendre la definició a tot M.

□

La proposició 0.3 mostra com l'elecció d'una connexió afí a M dóna lloc a una noció de derivada dels camps vectorials sobre corbes que satisfà (i) i (ii). O sigui la connexió ens permet diferenciar camps sobre corbes i, en particular, ens permetrà considerar acceleracions de corbes a M.

Prenem un sistema de coordenades i escrivim els camps $X = \sum_i x_i X_i$ i $Y = \sum_j y_j X_j$ on $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Aleshores obtenim l'expressió general

$$\bigtriangledown_X Y = \sum_i x_i \bigtriangledown_{X_i} (\sum_j y_j X_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \bigtriangledown_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_i) X_j \tag{0.7}$$

Tot seguit relacionarem les nocions de connexió i mètrica. Per fer-ho necessitem el concepte de paral.lelisme, que apareix de manera natural en el tractament fet tot i que històricament Levi-Civita el va desenvolupar prèviament al concepte de derivada covariant.

Definició 0.12. *Sigui M una varietat diferenciable amb una connexió afí $\bigtriangledown$.*
Un camp vectorial V restringit a $c : I \to M$ s'anomena paral.lel si $\frac{DV}{dt} = 0, \ \forall t \in I$.

En les mateixes condicions de la definició anterior, si fixem una condició inicial $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ on $t_0 \in I$, aleshores es pot demostrar que existeix un únic camp vectorial V paral.lel sobre c tal que $V(t_0) = V_0$. Aquest camp s'anomena *transport paral.lel de $V(t_0)$ sobre c.* ([2], secció 2.2).

L'objectiu és associar unívocament una connexió afí amb cada varietat Riemanniana, o sigui amb l'elecció de la mètrica. Per això definirem els conceptes de compatiblitat i simetria.

Definició 0.13. *Sigui M una varietat diferenciable amb una connexió afí $\bigtriangledown$ i una mètrica $<,>$.*
La connexió s'anomena compatible amb la mètrica si per tota corba c i per tot parell de camps vectorials paral.lels P i P' sobre c, el producte $< P, P' >= constant$.

La definició anterior es justifica amb la següent proposició, que mostra que si $\bigtriangledown$ és compatible amb $<,>$, llavors el producte intern es pot diferenciar amb la regla usual.

Proposició 0.4. *Sigui M una varietat Riemanniana.*
Una connexió $\bigtriangledown$ és compatible amb $<,>$ si i només si per tot parell de camps vectorials V i W restringits a $c : I \to M$ es compleix que:

$$\frac{d}{dt} < V, W >=< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >, \quad t \in I \tag{0.8}$$

Demostració:
L'equació (0.8) implica que $\bigtriangledown$ és compatible amb $<,>$. Anem a veure la demostració en el sentit invers.

Prenem una base ortonormal $\{P_1(t_0), ..., P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Podem traslladar de manera unívoca els vectors $P_i(t_0)$ a través de c per transport paral.lel. Com que $\bigtriangledown$ és compatible amb la mètrica, $\{P_1(t), ..., P_n(t)\}$ és una base ortonormal de de $T_{c(t)}M$, $\forall t \in I$.

Així doncs, podem escriure els dos camps de la següent manera $V = \sum_i v^i P_i$ i $W = \sum_i w^i P_i$ amb $i = 1, ..., n$ on v^i i w^i són funcions diferenciables a I. Se'n segueix que les respectives derivades covariants són:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i \qquad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i$$

Aleshores i finalment,

$$< \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >= \sum_i \{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \} = \frac{d}{dt} \{ \sum_i v^i w^i \} = \frac{d}{dt} < V, W >$$

□

Definició 0.14. *Una connexió afi $\bigtriangledown$ en una varietat diferenciable M és simètrica si i només si*

$$\bigtriangledown_X Y - \bigtriangledown_Y X = [X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \chi(M). \tag{0.9}$$

Observació 0.4. Es pot demostrar ([2], secció 0.5) que donats dos camps vectorials diferenciables X, Y a una varietat diferenciable M, existeix un únic camp vectorial $Z = [X, Y]$ tal que, per tota funció diferenciable f, $\; Zf = (XY - YX)f$. Aquest camp Z s'anomena *bracket de X i Y*, i és diferenciable.

Ara estem en condicions d'enunciar el teorema que defineix i associa a cada mètrica una connexió afí determinada. Aquesta connexió l'anomenarem *Levi-Civita* o bé *Riemanniana.*

Teorema 0.1. *(Levi-Civita)*
Donada una varietat Riemanniana M, existeix una única connexió afí $\bigtriangledown$ a M tal que:

- $\bigtriangledown$ *és simètrica.*
- $\bigtriangledown$ *és compatible amb una mètrica Riemanniana.*

Demostració:
Suposem inicialment l'existència de tal $\bigtriangledown$. Llavors

$$X < Y, Z >=< \bigtriangledown_X Y, Z > + < Y, \bigtriangledown_X Z >,$$

$$Y < Z, X >=< \bigtriangledown_Y Z, X > + < Z, \bigtriangledown_Y X >,$$

$$Z < X, Y >=< \bigtriangledown_Z X, Y > + < X, \bigtriangledown_Z Y > .$$

Combinant les tres equacions i usant la simetria de $\bigtriangledown$, obtenim que

$$X < Y, Z > +Y < Z, X > -Z < X, Y >=$$

$$=< [X, Z], Y > + < [Y, Z], X > + < [X, Y], Z > +2 < Z, \bigtriangledown_Y X > .$$

Per tant

$$< Z, \bigtriangledown_Y X >= \frac{1}{2} \{ X < Y, Z > +Y < Z, X >$$

$$-Z < X, Y > - < [X, Z], Y > - < [Y, Z], X > - < [X, Y], Z > \} \tag{0.10}$$

De l'expressió (0.10) veiem que la mètrica $<,>$ defineix unívocament a $\bigtriangledown$. L'existència és evident ja que (0.10) satisfà les propietats de la definició de connexió afí 0.11.

$\square$

Per acabar la secció farem una definició que simplifica la notació quan treballem en sistemes de coordenades.

Definició 0.15. *Considerem un sistema de coordenades (U,x).*

Anomanem símbols de Cristoffel a les funcions Γ_{ij}^k definides a U tals que $\bigtriangledown_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ on $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

L'expressió general (0.7) amb els símbols de Cristoffel s'escriu

$$\bigtriangledown_X Y = \sum_k (\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)) X_k \tag{0.7'}$$

on $X = \sum_i x_i X_i$ i $Y = \sum_j y_j X_j$. Per tant Γ_{ij}^k són funcions diferenciables i $\bigtriangledown_X Y(p)$ depèn de les coordenades $x_i(p)$, $y_k(p)$ i de les derivades $X(y_k)(p)$.

Notem també que l'expressió (0.9) de la definició de connexió simètrica 0.14 es pot reescriure com

$$\bigtriangledown_{X_i} X_j - \bigtriangledown_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$$

per $i, j = 1, ..., n$. Això és equivalent a imposar que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ i d'aquí prové la terminologia de simetria.

Recordem que $g_{ij} =< X_i, X_j >$. De (0.10) se'n segueix que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \}$$

Com que la matriu (g_{km}) té inversa (g^{km}), obtenim l'expressió general pels símbols de Cristoffel en termes de la mètrica:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \} g^{km} \tag{0.11}$$

Amb tot, podem reescriure la derivada covariant així:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \} X_k \tag{0.12}$$

Observació 0.5. A l'espai Euclidi $\mathbb{R}^n$, tenim que $\Gamma_{ij}^k = 0$, i per tant, com es pot veure de (0.12), la derivada covariant coincideix amb la derivada usual.

Geodèsiques i Curvatura

Fins ara hem desenvolupat tota la terminologia bàsica de la geometria Riemanniana. D'ara en endavant considerarem M una varietat Riemanniana amb una connexió Riemanniana.

Procedirem a estudiar dos conceptes clau que caracteritzen les varietats: les geodèsiques i la curvatura. També introduirem la noció de mapa exponencial que ens permetrà enunciar de forma precisa una propietat rellevant de les geodèsiques: són les corbes de longitud menor que uneixen punts propers.

Aquest fet, que condueix a pensar intuitivament en les geodèsiques com les "rectes"de la varietat, és de caràcter purament local. Al capítol 1 del treball, on s'introdueix una noció de distància, s'estudien des d'un punt de vista més global.

Començarem introduint les geodèsiques com les corbes sobre una varietat amb acceleració zero i determinarem les equacions que satisfan.

Definició 0.16. *Una corba $\gamma : I \to M$ és geodèsica a t_0 si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt})|_{t=t_0} = 0$. Si γ és geodèsica $\forall t \in I$, llavors γ és una geodèsica.*

Si $\gamma : I \to M$ és una geodèsica, la restricció de γ a $[a, b] \subset I$ s'anomena segment geodèsic entre $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.

La condició de les geodèsiques $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$, $\forall t \in I$, és equivalent a al condició $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$.

Notem que el mòdul de la velocitat de les geodèsiques γ no varia, ja que la longitud del vector $\frac{d\gamma}{dt}$ és constant. Efectivament, degut a (0.8) i a la simetria del producte intern,

$$\frac{d}{dt} < \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} >= 2 < \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} >= 2 < 0, \frac{d\gamma}{dt} >= 0$$

Per excloure els punts (geodèsiques amb velocitat zero) considerarem que $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$.

Segons l'assumpció anterior i la definició de longitud d'una corba 0.10, obtenim que la longitud $s(t)$ d'una geodèsica entre t_0 i t és

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\frac{d\gamma}{dt}|dt = c(t - t_0)$$

Com veiem, $s(t)$ és proporcional a $(t - t_0)$ que anomanem *longitud d'arc.* Si c=1, diem que la geodèsica està *normalitzada.*

Anem a veure les equacions locals que compleix la geodèsica γ en un sistema de coordenades (U, x), on expressem $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Segons l'expressió (0.12), éssent $V = \frac{d\gamma}{dt}$, γ serà geodèsica si i només si

$$0 = \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \sum_k (\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Per tant les equacions locals que compleix la geodèsica són

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0 \tag{0.13}$$

per $k = 1, ..., n$.

Per exemple, si $M = \mathbb{R}^n$, com que la derivada covariant coincideix amb la usual (observació 0.5), les geodèsiques de M són les línees rectes parametritzades proporcionalment a la longitud d'arc. Considerem un altre exemple: sigui $M' = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, les geodèsiques de M' són els cercles màxims parametritzats proporcionalment a la longitud d'arc i no n'hi han d'altres.

Aquests exemples els tractarem amb més detall a la secció Espais euclidià i esfèric del capítol 1.

És el moment indicat d'introduir el concepte de mapa exponencial.

Es pot demostrar ([2], secció 3.2) que donat un punt $p \in M$ i un vector $v \in T_pM$ només hi ha una geodèsica a M que en $t = 0$ passi per p amb velocitat v en un entorn del punt.

Gràcies a aquest fet, podem denotar $\gamma(t, q, w)$ com la única geodèsica $\gamma(t) : I \to M$ tal que $\gamma(0) = q \in M$ i $\frac{d\gamma}{dt}(0) = w \in T_qM$.

Definició 0.17. *Sigui $p \in M$ i sigui l'obert $U = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM\}$ on V és un entorn de p on les geodèsiques $\gamma(t, q, v)$ són úniques.*

El mapa exponencial $exp : U \to M$ es defineix com

$$exp(q, v) = exp_q v = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$$

Geomètricament, $exp_q(v)$ és el punt de M obtingut movent-nos una longitud $|v|$, desde q, seguint la geodèsica que passa per q amb velocitat $\frac{v}{|v|}$.

Clarament exp_q és una aplicació diferenciable que acostumarem a restringir a un subespai obert de T_qM. Definim $exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M$ on $B_\epsilon(0)$ és la bola oberta de radi ϵ i centre a l'origen 0 de T_qM, és a dir $exp_q(0) = q$.

Proposició 0.5. *Donat $q \in M$, existeix un nombre $\epsilon > 0$ tal que $exp_q : B_\epsilon(0) \to M$ és un difeomorfisme de $B_\epsilon(0)$ a un obert de M.*

Demostració:
Calculem la derivada de exp_q

$$d(exp_q)|_0(v) = \frac{d}{dt}(exp_q(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v))|_{t=0} = v$$

Així doncs $d(exp_q)|_0$ és la identitat a T_qM. Per tant, tal i com vem es veu a la segona secció d'aquest apèndixl, exp_q és un difeomorfisme local entorn de 0.

□

És convenient usar la següent terminologia. Sigui $p \in M$, si exp_p és un difeomorfisme entre un entorn V de l'origen de T_pM i $U \subset M$, llavors $exp_pV = U$ és l'*entorn normal de p*. Si la bola oberta $B_\epsilon(0)$ té la seva clausura compresa en V, la bola $exp_pB_\epsilon(0) = B_\epsilon(p)$ s'anomena *bola normal de centre p i radi* ϵ. Les geodèsiques a $B_\epsilon(p)$ que comencen a p s'anomenen *geodèsiques radials*. Es pot demostrar que tot $p \in M$ té un entorn W que és l'entorn normal de tots els punts $q \in W$. Aquests entorns W s'anomenen *totalment normals en* $p \in M$.

Amb tot, podem caracteritzar localment les geodèsiques:

Sigui $p \in M$, sigui U un entorn normal de p i sigui $B \subset U$ una bola normal de centre p. Considerem $\gamma : [0,1] \to B$ el segment geodèsic amb $\gamma(0) = p$. Si $c : [0,1] \to M$ és una corba que uneix $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$, llavors $l(\gamma) \leq l(c)$. Si es compleix la igualtat necessàriament $\gamma([0,1]) = c([0,1])$. Recíprocament, les corbes c que minimitzen la longitud són geodèsiques.

Observació 0.6. Observem que aquest comportament no és global. Per exemple, les geodèsiques de S^n que comencen a un punt p no són les corbes mínimes un cop creuen l'antipodal de p.

La demostració de la propietat local de les geodèsiques i el desenvolupament d'un formalisme més el.laborat per descriure-les es pot trobar a [2], secció 3.3.

A continuació estudiarem la noció de curvatura. Gauss va definir-la per primer cop en dos dimensions com una mesura del grau de desviació d'una superfície respecte el seu espai tangent en cada punt.

Sigui una superfície S i sigui l'esfera de radi unitat $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Considerem una aplicació $g : S \to S^2$ que associa a cada punt $p \in S$, un vector $N(p) \in S^2$ de mòdul 1 i perpendicular a T_pS. Cal que S sigui orientable perquè g estigui ben definida i sigui diferenciable. Llavors podem parlar de la seva derivada $dg_p : T_pS \to T_{g(p)}S^2$ que és una apliació entre espais vectorials, de manera que podem considerar el seu determinant. Gauss va definir la curvatura de S a p com $K(p) = det(dg_p)$.

$K(p)$ coincideix amb el producte de les curvatures principals k_1 i k_2 definides per Euler, on $k_1 = max\{k_n\}$, $k_2 = min\{k_n\}$ i $\{k_n\}$ és el conjunt de curvatures de totes les corbes sobre S a p.

Aquesta definició es justifica perquè K només depèn de la mètrica (es pot definir en termes de la primera forma fundamental). A més, la suma dels angles interiors d'un triangle format per geodèsiques depèn únicament de l'àrea del triangle i de la curvatura, i no és necessàriament 180° com en el pla. Això obre la porta a imaginar superfícies que no siguin planes, tal com imposa el cinquè postulat dels Elements d'Euclides.

Les idees de Gauss van ser recuperades per Riemann, que va generalitzar la idea de curvatura en termes de la mètrica a les varietats Riemannianes [5]. Es va acabar demostrant que el cinquè postulat d'Euclides és equivalent a que la curvatura sigui nula. Modificant aquesta condició obtenim noves geometries que anomenarem *no-euclidianes*, com la hiperbòlica. Així doncs, la curvatura mesura el grau de desviació d'una varietat Riemanniana respecte el cas Euclidià.

Presentarem la formulació de Riemann, que tot i ser poc intuitiva, és la generalització natural de les definicions de Gauss.

Definició 0.18. *La curvatura R d'una varietat Riemanniana M és una correspondència que associa a cada parell $X, Y \in \chi(M)$, una aplicació $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ que compleix*

$$R(X,Y)Z = \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X Z - \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y Z + \bigtriangledown_{[X,Y]} Z$$

on $Z \in \chi(M)$ i $\bigtriangledown$ és la connexió Riemanniana de M.

Considerem el cas $M = \mathbb{R}^n$. Prenem el camp $Z = (z_1, ..., z_n)$ amb les components de la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Obtenim, segons l'expressió (0.7') amb els símbols de Cristoffel nuls (cas Euclidià), que $\bigtriangledown_X Z = (Xz_1, ..., Xz_n)$ i que $\bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X Z = (YXz_1, ..., YXz_n)$. Per tant $R(X,Y)Z = 0$. La curvatura R, doncs, és una mesura de com M es diferencia d'una varietat Euclidiana, tal i com preteníem.

També podem interpretar la curvatura com una mesura de la no-commutativitat de la derivada covariant i associar-hi coeficients. Considerem un sistema de coordenades $\{x_i\}$ entorn $p \in M$. Com que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, tenim que

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = (\bigtriangledown_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \bigtriangledown_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \bigtriangledown_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \bigtriangledown_{\frac{\partial}{\partial x_j}})\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

En termes dels símbols de Christoffel podem expressar els coeficients de la següent manera:

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk} \tag{0.14}$$

Proposició 0.6. *La curvatura R d'una varietat Riemanniana M té les següents propietats:*

1. *R és bilineal en $\chi(M) \times \chi(M)$,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

on $f, g \in D(M)$ i $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$.

2. *L'aplicació $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ és lineal,*

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X.Y)Z + R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

on $f \in D(M)$ i $Z, W \in \chi(M)$.

Demostració:
La propietat *1* i la primera part de *2* es segueixen directament de la definició 0.18 i de la definició de connexió afí 0.11.

La segona part de *2* també es compleix ja que

$$R(X,Y)fZ = f \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X Z - f \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y Z$$

$$+([Y,X]f)Z + f \bigtriangledown_{[X,Y]} Z + ([X,Y]f)Z = fR(X,Y)Z$$

□

Ara definirem el concepte de curvatura seccional. Intuitivament és una mesura en cada punt de com es desvia la varietat cap a una de les direccions de l'espai tangent si ens movem en una direcció diferent.

Prenem la següent notació: $< R(X,Y)Z, T >= (X,Y,Z,T)$.

Donat un espai vectorial V i $x, y \in V$, denotem $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - < x, y >^2}$ que representa l'àrea del paral.lelogram determinat per x, y.

Proposició 0.7. *Sigui $\sigma \subset T_pM$ un subespai bidimensional de l'espai tangent a $p \in M$ i siguin $x, y \in \sigma$ vectors linealment independents.*
Llavors

$$K(x,y) = K(\sigma) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \tag{0.15}$$

no depèn de l'elecció de $x, y \in \sigma$.

Demostració:
Podem passar de la base $\{x, y\}$ de σ a una altra base qualsevol $\{x', y'\}$ éssent x', y' combinacions lineals de x, y. És fàcil veure que $K(x,y)$ és invariant sota aquestes transformacions elementals.

□

Definició 0.19. *Sigui $p \in M$, $\sigma \subset T_pM$ i sigui $\{x, y\}$ una base de σ.*
El nombre real $K(\sigma)$ definit per (0.15) *s'anomena curvatura seccional de σ a p.*

Sigui V un espai vectorial, el coneixement de $K(\sigma)$ per tot $\sigma \subset V$ determina la curvatura R completament. Considerem dues curvatures R, R' i les curvatures seccionals respectives K, K', llavors si les curvatures seccionals coincideixen $\forall\sigma$, aleshores R=R'.

Un exemple complet del càlcul dels coeficients de la curvatura i la curvatura seccional es pot trobar en la primera secció del capítol 2 d'aquest treball on es fa el càlcul per l'espai hiperbòlic n-dimensional en el model del semi-espai superior.

Una manera d'entendre la curvatura és a través dels camps de Jacobi ([2], capítol 5). S'interpreta la curvatura com una mesura de com de ràpid les geodèsiques que passen per un mateix punt es separen entre elles. Definirem aquests camps ja que són una eina útil per demostrar alguns resultats del primer capítol.

Definició 0.20. *Sigui la varietat Riemanniana M amb curvatura R i sigui la geodèsica $\gamma : [0, a] \to M$. Un camp vectorial J s'anomena camp de Jacobi si $\forall t \in [0, a]$ satisfà l'equació de Jacobi:*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0 \tag{0.16}$$

Un camp de Jacobi està determinat per les condicions inicials $J(0)$ i $\frac{DJ}{dt}(0)$.

Observació 0.7. Les varietats amb curvatura seccional constant juguen un paper important en la geometria Riemanniana ja que són fàcilment caracteritzables com veurem durant tot el desenvolupament del treball.

Hi ha casos particulars interessants com la curvatura de Ricci o la escalar ([2], secció 4.4).

Mitjançant la *Segona Forma Fundamental* s'estableixen relacions entre les curvatures de varietats diferenciables i les varietats inmerses en elles a través d'isometries. Aquest desenvolupament permet relacionar de forma més intuitiva les idees de Gauss amb la construcció de Riemann que hem vist ([2], capítol 6). No fem aquest tractament aquí ja que no és necessari per classificar els espais de curvatura constant.

Referències

[1] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*,
Graduate Text in Mathematics, 149 (2006)

[2] Manfredo Perdigão Do Carmo, *Riemannian Geometry*,
Mathematics: Theory & Applications (1992)

[3] R. Kulkarni, *Curvature and metric*,
Annals of Mathematics, 91 (1970)

[4] J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*,
Publish or Perish (1984)

[5] B. Riemann, *On the hypothesis wich lie at the foundations of geometry*,
Dover, New York (1959)

[6] S. Yau, *Curvature preserving diffeomorphisms*,
Annals of Mathematics, 100 (1974)

[7] W. Massey, *Algebraic Topology, An Introduction*,
Harcourt, New York (1967)

[8] Michiel Hazewinkel, *Discrete Subgroup*,
Encyclopaedia of Mathematics, Springer (2001)

[9] J. M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*,
Springer-Verlag (1997)

[10] James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*,
Springer (2005)

[11] Henry Parker Manning, *Introductory Non-Euclidean Geometry*,
Dover, New York (1963)

[12] Leonard M. Blumenthal, *Modern View of Geometry*,
Dover, New York (1980)

[13] Jeremy Gray, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*
Clarendon Press (1989)

[14] Euclides, *Els Elements*