Trabajo final de grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas

Universidad de Barcelona

Las representaciones de dimensión finita del grupo de Lorentz

Alejandro de Miquel Bleier

Directora: Pilar Bayer i Isant
Realizado en: Departamento de Álgebra y Geometría. UB

Barcelona, 30 de enero de 2015

Introduction

Representation theory and Lie theory are two relatively modern branches of mathematics. Nevertheless, they have rapidly evolved, and it did not have to pass a lot of time between the beginnings of their developments and the findings of the applications in theoretical physics that they have.

We wil firstly introduce the basic concepts of the representation theory, developed mainly by Ferdinand Georg Frobenius and Issai Schur at the end of the XIXth century and the beginning of the XXth century. Then, the ones of the Lie theory, conceived by Sophus Lie at the end of the XIXth century and extended during the following years by various mathematicians, such as Wilhelm Killing or Élie Cartan.

Once provided with all of the required tools, we will focus on the study of various specific Lie groups, such as $\mathrm{SO}(3)$ or $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. It will all be done with the objective of finding the irreducible, finite-dimensional representations of the proper ortochronous Lorentz group, $\mathrm{SO}^+(1,3)$. This is the group formed by the Lorentz transformations, that describe the relative motion of two particles in the theory of special relativity. Here we have the first application to theoretical physics. These results will lead us to another one; we will be able to obtain an expression for the Dirac equation, whose solutions provide us with the wave function of fermions with spin $\frac{1}{2}$, such as electrons.

This study includes multiple results of relevance in their fields; from the unitarization of the representations of finite groups, whose generalization for all kind of groups is known as *unitarian trick*, to the obtaining of the finite-dimensional representations of the group $\mathrm{SU}(2)$ with the space of the homogeneous polynomials of two variables as the representation space, due to Hermann Weyl. In addition, it also contains some work of my own, like the calculation of the matrices that act as coefficients in the Dirac equation.

It is to be emphasized that, despite of its shortage of contents about Lie theory, and especially of the absence of theory about Lie algebras, the book [11] has guided the steps of this study. In order to fully understand and complete the theoretical concepts, the books [6] and [8] have also been especially useful.

Introducción

La teoría de representaciones y la teoría de Lie son dos ramas relativamente modernas de las matemáticas. A pesar de ello, han evolucionado rápidamente, y no hubo de transcurrir mucho tiempo desde los inicios de su desarrollo hasta que se empezaron a encontrar aplicaciones en física teórica.

Nosotros presentaremos los conceptos básicos tanto de la teoría de representaciones, desarrollada principalmente por Ferdinand Gerog Frobenius e Issai Schur entre finales del siglo XIX y principios del XX, como de la teoría de Lie, ideada por Sophus Lie a finales del siglo XIX y extendida durante los años posteriores por diversos matemáticos como Wilhelm Killing y Élie Cartan.

Una vez provistos con las herramientas necesarias, nos centraremos en el estudio de diversos grupos de Lie específicos, como $\mathrm{SO}(3)$ o $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Todo ello se hará con un objetivo en mente: encontrar las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo propio de Lorentz, $\mathrm{SO}^+(1,3)$, que es el grupo formado por las transformaciones de Lorentz, que describen el movimiento relativo de dos cuerpos de acuerdo con la teoría de la relatividad especial. He aquí la primera relación que hallamos con la física teórica. Pero no es la última, ya que estos resultados acaban dando pie a la obtención de la denominada ecuación de Dirac, cuyas soluciones son funciones de onda de partículas de spin $\frac{1}{2}$, como el electrón.

Las páginas de este trabajo incluyen múltiples resultados de gran relevancia en sus campos; desde la unitarización de las representaciones de grupos finitos, cuya generalización para todo tipo de grupos compactos se conoce como *unitarian trick*, hasta la obtención de las representaciones de dimensión finita del grupo $\mathrm{SU}(2)$ mediante el espacio de polinomios homogéneos de dos variables como espacio de representación, debida a Hermann Weyl. Además, también contienen algo de trabajo propio como el cálculo de las matrices que actúan como coeficientes en la ecuación de Dirac.

Cabe destacar que, a pesar de la escasez de contenidos sobre teoría de Lie, y en especial de la ausencia sobre teoría de álgebras de Lie, el libro [11] es el que me ha servido de guía principal en este trabajo. Para entender plenamente y acabar de completar los conceptos teóricos, los libros [6] y [8] me han sido de especial utilidad.

Agradecimientos

Primero de todo me gustaría dar las gracias a la doctora Pilar Bayer i Isant, que ha estado supervisando este trabajo durante el tiempo que me ha llevado escribirlo. El entusiasmo, el interés y las ganas que ha mostrado me han servido de gran motivación para ser capaz de adquirir nuevos conocimientos semana tras semana. Además, este trabajo no sería ni la mitad de completo de lo que es sin la gran cantidad de horas que ha dedicado a resolver las dudas que he tenido y a corregir los errores que he ido cometiendo.
También quiero agradecer a mis padres el apoyo que me han dado durante mis años de estudio, y en especial durante estos últimos meses en los que he escrito este trabajo. Asimismo, también quisiera dar las gracias a mis compañeros de facultad, de escuela, familiares, mi ex y demás amigos, que, de un modo u otro, hayan contribuido a que pueda haber concluido satisfactoriamente este trabajo de final de grado.

Índice general

Capítulo 1

Representaciones de grupos

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1 *Sea V un espacio vectorial complejo. Una* **representación T** *de un grupo G en V es un homomorfismo*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: \ G &\to \mathrm{GL}(V), \\ g &\mapsto \mathbf{T}(g). \end{aligned}$$

Diremos que V es el **espacio de representación** *de* **T**. *Supongamos que la dimensión de V es n. Entonces, diremos que la dimensión de la representación es n.*

Observemos que como **T** es un homomorfismo, $\mathbf{T}(\mathrm{G})$ también es un grupo.
A partir de una representación **T** de un grupo G en un espacio de representación V de dimensión n, también podemos definir, en particular, una representación matricial

$$\begin{aligned} T: \ G &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \\ g &\mapsto T(g). \end{aligned}$$

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, los elementos matriciales de $T(g)$ vendrán definidos por

$$\mathbf{T}(g)v_k = \sum_{j=1}^{n} T(g)_{jk} v_j. \tag{1.1}$$

Sea ahora $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ otra base de V y sea T' la representación definida a partir de esta base. Dado un elemento cualquiera $g \in G$, es fácil ver que las matrices $T(g)$ y $T'(g)$ se relacionan mediate un cambio de base independiente de g. Esto nos

lleva a definir las **representaciones equivalentes** con espacio de representación $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ como las que vienen definidas a partir de una misma representación $\mathbf{T}$ y que están relacionadas mediante un cambio de base.
Observemos que cada representación $\mathbf{T}$ define una única clase de equivalencia. Diremos que todas las representaciones que definan una misma clase de equivalencia son equivalentes.

Ejemplo 1.1 *El homomorfismo* $\mathbf{T} : G \to \mathrm{GL}(V)$ *que envía a todo elemento de* G *a la identidad es una representación.*

Ejemplo 1.2 *Sea* G *un subgrupo de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*. El homomorfismo*

$$\begin{aligned} \rho : \ & G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \\ & g \mapsto g \end{aligned}$$

también es una representación, conocida como la **representación fundamental**.

Ejemplo 1.3 *Consideremos el grupo diedral de orden 8,* D_4*. Sean* x, y *dos elementos que generan el grupo, de órdenes 2 y 4 respectivamente. Entonces, el homomorfismo* $\mathbf{T}$ *definido por las imágenes*

$$\mathbf{T}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}(y) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

es una representación de D_4 *en* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

Definición 1.2 *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$*. Se dice que una función*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \ & V \times V \to \mathbb{C}, \\ & (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

es un **producto escalar** *sobre* V *si cumple las siguientes propiedades:*

- $\langle v, v \rangle \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *y* $\langle v, v \rangle = 0$ *si y solo si* $v = 0$.
- *Es linear respecto a la primera componente.*
- *Es hermitiano, es decir,* $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ *para todo* $v, w \in V$.

El producto escalar habitual en $\mathbb{C}^n$ de dos vectores cualesquiera $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ está definido como

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}, \tag{1.3}$$

y es al que nos estaremos refiriendo de ahora en adelante cuando utilicemos el concepto de producto escalar.

Definición 1.3 *Decimos que una representación* $\mathbf{T}$ *de un grupo finito* G *en un espacio vectorial complejo* V *dotado con un producto escalar es* **unitaria** *si para todo* $g \in G$ *y para todo* $v, w \in V$ *se cumple que* $\langle \mathbf{T}v, \mathbf{T}w\rangle = \langle v, w\rangle$.

Recordemos que, en particular, una matriz unitaria U cumple por definición que $UU^* = E$, donde U^* es la matriz transpuesta conjugada (o adjunta) de U y E es la matriz identidad.

Proposición 1.1 *Para toda representación* $\mathbf{T}$ *de un grupo finito* G*, con espacio de representación asociado* V *dotado de un producto escalar, existe una representación unitaria equivalente.*

Demostración: Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto vectorial habitual sobre V y definamos un nuevo producto vectorial $(\cdot, \cdot)$ en V de la siguiente manera:

$$(u, v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{T}(g)u, \mathbf{T}(g)v\rangle, \tag{1.4}$$

donde con $|G|$ denotamos el orden de G. Probemos primero que $\mathbf{T}$ es una representación unitaria respecto a este producto vectorial. Observemos que para todo $g \in G$ tenemos que $Gg = G$, ya que de lo contrario existirían dos elementos distintos $g_1, g_2 \in G$ tales que cumplirían la igualdad $g_1 g = g_2 g$. Pero entonces, $g = g_1^{-1} g_2 g$, lo que contradice al hecho de que g_1 y g_2 sean diferentes. Sabiendo esto, obtenemos que para un $g' \in G$ dado se cumple que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}(g')u, \mathbf{T}(g')v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g')u, \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g')v\rangle \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathbf{T}(gg')u, \mathbf{T}(gg')v\rangle \\
&= (u, v),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

por lo que deducimos que $\mathbf{T}$ es unitaria respecto a $(\cdot, \cdot)$.
Sea ahora $\{v_i\}$ una base ortonormal de V respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sea $\{u_i\}$ una base ortonormal de V respecto a $(\cdot, \cdot)$ y sea $S : V \to V$ un operador lineal tal que $Su_i = v_i$ para todo i. Entonces, para dos vectores de V, $x = \sum \alpha_i u_i$ y $w = \sum \beta_i u_i$, tendremos que

$$\langle Sx, Sw\rangle = \sum_i \alpha_i \overline{\beta}_i \langle Su_i, Su_i\rangle = \sum_i \alpha_i \overline{\beta}_i = (x, w). \tag{1.6}$$

Por lo tanto,

$$\langle S\mathbf{T}(g)S^{-1}w, S\mathbf{T}(g)S^{-1}x\rangle = \big(\mathbf{T}(g)S^{-1}w, \mathbf{T}(g)S^{-1}x\big) = \big(S^{-1}w, S^{-1}x\big) = \langle w, x\rangle, \tag{1.7}$$

y deducimos que la representación $S\mathbf{T}(g)S^{-1}$ es una representación unitaria de G en V equivalente a $\mathbf{T}$.

□

Esta proposición que acabamos de demostrar nos dice que si G es un grupo finito, siempre podemos asumir que la representación que estamos tratando es unitaria, lo que nos hará más sencillos los cálculos.

1.2. Representaciones irreducibles

Definición 1.4 *Un subespacio W de un espacio vectorial V se dice* **invariante** *bajo la representación $\mathbf{T}$ si $\mathbf{T}(g)w \in W$ para todo $g \in G$ y todo $w \in W$.*

Definición 1.5 *Se dice que una representación $\mathbf{T}$ de dimensión n es* **reducible** *si existe un subespacio de V no trivial invariante bajo $\mathbf{T}$. De lo contrario, se dice que $\mathbf{T}$ es* **irreducible**.

Supongamos que $\mathbf{T}$ es una representación reducible que deja invariante el subespacio $W \subset V$ de dimensión finita k. Entonces, podemos escribir toda matriz de la imagen de la representación como una matriz por bloques de la siguiente forma: uno cuadrado de dimensión k, otro también cuadrado pero de dimensión $n-k$ (estos dos situados en la diagonal principal), un bloque cuyos elementos sean iguales a cero y otro bloque con elementos de valores que pueden ser distintos de cero. Esta situación está representada en la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right),$$

donde A y C son matrices cuadradas de dimensiones $k \times k$ y $(n-k) \times (n-k)$ respectivamente.

Proposición 1.2 *Bajo las circunstancias que acaban de ser descritas, el subespacio $W^{\perp}$ es invariante bajo $\mathbf{T}$.*

Demostración: Sean $w \in W$, $x \in W^{\perp}$, $g \in G$ y $\mathbf{T}$ una representación unitaria del grupo G, es decir, que cumple $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$. Como $\mathbf{T}(g)w \in W$, tendremos que

$$0 = \langle \mathbf{T}(g)w, x\rangle = \langle w, \mathbf{T}^*(g)x\rangle = \langle w, \mathbf{T}(g^{-1})x\rangle. \tag{1.8}$$

Por lo tanto, $\mathbf{T}(g^{-1})x \in W^{\perp}$ para todo $g \in G$. $\square$

Esto nos lleva a deducir que mediante un cambio de base podemos expresar toda matriz de la imagen de la representación como una matriz por bloques como la detallada anteriormente, pero con todos los elementos no pertenecientes a uno de los bloques de la diagonal principal iguales a cero, es decir, que la matriz resultante sería de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C' \end{array}\right).$$

Expresaremos este hecho como $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{T}_2$, es decir, que $\mathbf{T}$ se puede descomponer como suma directa de dos representaciones: la restricción de $\mathbf{T}$ en W y la restricción de $\mathbf{T}$ en $W^{\perp}$.
Podemos repetir este proceso tantas veces como sea necesario hasta llegar a descomponer $\mathbf{T}$ en suma directa de representaciones irreducibles, $\mathbf{T}= \sum_{j=1}^{k} \oplus \mathbf{T}_j$. Las matrices que nos quedarían serían matrices por bloques diagonales.

Teorema 1.1 (Primer lema de Schur) (cf.[11]) *Las matrices que conmutan con todas las matrices imagen de una representación se reducen a un múltiplo de la matriz unidad si y solo si la representación es irreducible.*

Teorema 1.2 (Segundo lema de Schur) (cf.[11]) *Sean $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ dos representaciones irreducibles no equivalentes. Si para una matriz M se cumple la igualdad $M\mathbf{T}_1(g) = \mathbf{T}_2(g)M$ para todo $g \in G$, entonces $M = 0$.*

Proposición 1.3 (Relaciones de ortogonalidad) (cf.[11]) *Sean T y T' dos representaciones matriciales unitarias irreducibles de un grupo G de orden m. Supongamos que estas dos representaciones son equivalentes y de dimensión n. Entonces se cumple que*

$$\sum_{g \in G} T_{il}(g)\overline{T}'_{sm}(g) = \frac{m}{n}\delta_{is}\delta_{lm}. \tag{1.9}$$

Si las representaciones no son equivalentes, el resultado del sumatorio es igual a cero.

1.2.1. Carácter de una representación

Definición 1.6 *Sea $\mathbf{T}$ una representación de un grupo finito G en el espacio vectorial complejo n-dimensional V. Definimos el* **carácter** *de $\mathbf{T}$ como la función traza $\chi(g) := \mathrm{tr}(T(g))$, dependiente de g, siendo $T(g)$ una matriz de una representación matricial T equivalente a $\mathbf{T}$.*

Como propiedad inmediata del carácter de una representación vemos que es invariante para representaciones equivalentes, ya que para cualquier representación T y para cualquier $g \in G$ tenemos que

$$\mathrm{tr}\left(ST(g)S^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(T(g)S^{-1}S\right) = \mathrm{tr}\left(T(g)\right), \tag{1.10}$$

donde S es una matriz de cambio de base
Es más, el recíproco también es cierto: si dos representaciones de un grupo tienen el mismo carácter, entonces son equivalentes (cf.[8]).

Teorema 1.3 (Relaciones de ortogonalidad entre carácteres) (cf.[11]) *Sea G un grupo finito de orden m y sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}$' dos representaciones irreducibles del mismo. Sean χ, χ' los carácteres de estas representaciones. Entonces,*

$$\sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi'}(g) = m \tag{1.11}$$

si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}$' son equivalentes. En caso contrario, el resultado del sumatorio es igual a cero.

Este teorema es consecuencia directa de las relaciones de ortogonalidad (1.9).

1.2.2. Producto tensorial de representaciones

Definición 1.7 *Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ dos representaciones no equivalentes de un grupo G con espacios de representación V y V', de dimensiones n y n', respectivamente. Se define el* **producto tensorial** *de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ como la representación de G en el espacio $V \otimes V'$ definida por la fórmula*

$$\left(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'\right)(g)\left(v \otimes v'\right) := \mathbf{T}(g)v \otimes \mathbf{T}'(g)v', \tag{1.12}$$

con $g \in G$, $v \in V$ y $v' \in V'$.

Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V y V' respectivamente. Entonces podemos definir la representación matricial $T \otimes T'$ de G equivalente a $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ respecto a estas bases como

$$\left(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'\right)(g)\left(v_i \otimes v'_j\right) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n'} T_{li}(g) T'_{kj}(g) v_l \otimes v'_k, \tag{1.13}$$

donde $g \in G$ y T y T' son dos representaciones matriciales de G equivalentes a $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}$' respectivamente.

Notemos que si χ y χ' son los carácteres de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ respectivamente, entonces el carácter del producto directo de las dos representaciones será simplemente el producto de los carácteres:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n'} T_{ll}(g)T'_{kk}(g) = \chi(g)\chi'(g). \tag{1.14}$$

También podemos deducir fácilmente que el producto tensorial de dos representaciones unitarias es también una representación unitaria, ya que el producto tensorial de dos matrices A, B unitarias es una matriz unitaria:

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^* = A^{-1} \otimes B^{-1} = (A \otimes B)^{-1}. \tag{1.15}$$

La última igualdad es consecuencia de que $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$. Sin embargo, hay propiedades que no se conservan con el producto tensorial, como la irreducibilidad, y es que el producto tensorial de dos representaciones irreducibles no es necesariamente también irreducible. La descomposición del producto tensorial de dos representaciones irreducibles en suma directa de representaciones irreducibles se denomina **descomposición de Clebsch-Gordan**:

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}')(g) = \sum_i \oplus m_i \mathbf{T}^{(i)}(g), \tag{1.16}$$

donde m_i es la multiplicidad de la matriz $\mathbf{T}^{(i)}$ en la descomposición. Estas multiplicidades las podemos calcular a partir de las relaciones de ortogonalidad y los carácteres de las representaciones.

Proposición 1.4 *Sean χ, χ' y $\chi^{(i)}$ los carácteres de las representaciones $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ y $\mathbf{T}^{(i)}$, respectivamente. Entonces, para todo i se cumple la igualdad*

$$m_i = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} \chi^{(i)}(g)\overline{\chi(g)\chi'}(g), \tag{1.17}$$

donde m es el orden de G.

Sea χ'' el carácter de la representación $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ una vez hecha la descomposición de Clebsch-Gordan. Es decir,

$$\chi''(g) = \sum_i m_i \chi^{(i)}. \tag{1.18}$$

Entonces tenemos la igualdad

$$\frac{1}{m}\sum_{g\in G} \overline{\chi''}(g)\chi^{(i)}(g) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G}\sum_j m_j \overline{\chi^{(j)}}(g)\chi^{(i)}(g) = m_i, \tag{1.19}$$

donde hemos utilizado las relaciones de ortogonalidad entre carácteres, (1.11). Utilizando también ahora (1.14), obtenemos finalmente que el valor de las multiplicidades es

$$m_i = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \chi^{(i)}(g) \overline{\chi(g) \chi'(g)}, \tag{1.20}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Sabemos que la base en la que están expresadas las matrices de la representación $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ es la base $\{v_i \otimes v'_j\}$, con $i \in \{1, \dots n\}$ y $j \in \{1, \dots n'\}$. Pero también sabemos que existe una base en la que la representación es suma directa de representaciones irreducibles, y que su matriz en esta base es una matriz por bloques diagonal. Sea $\{w_1, \dots, w_{n \cdot n'}\}$ esta base. Entonces, podemos expresar los vectores de la base $\{w\}$ como combinación lineal de los vectores de la otra base:

$$w_q = \sum_{i,j} (i,j)_q \, v_i \otimes v'_j, \qquad 1 \leq q \leq nn'. \tag{1.21}$$

Los coeficientes $(i,j)_q$ se denominan **coeficientes de Clebsch-Gordan**, que también se pueden denotar como

$$(i, j|q) := (i,j)_q \, . \tag{1.22}$$

Proposición 1.5 (cf.[11]) *Sean* **T** *y* **T'** *dos representaciones irreducibles de dimensiones n y n' de los grupos G y G' respectivamente. Entonces,* **T**$\otimes$**T'** *es una representación irreducible de $G \times G'$.*

Capítulo 2

Representaciones de $\mathrm{SO}(3)$

2.1. Transformaciones infinitesimales

Definición 2.1 *Consideremos un grupo $G \subseteq \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ y supongamos que sus elementos matriciales, que denotaremos por g_{ik}, dependen de unos ciertos parámetros $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$. Definimos las* **matrices infinitesimales** *$\mathcal{I}_j$ de G como*

$$(\mathcal{I}_j)_{ik} = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha_j}\right)\bigg|_0, \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \tag{2.1}$$

2.1.1. El grupo $\mathrm{SO}(3)$ de las rotaciones tridimensionales

Conocer la estructura de este grupo nos será de gran utilidad a la hora de estudiar el grupo de Lorentz. El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(3)$ está formado por el conjunto de matrices 3×3 ortogonales [1] y con determinante igual a 1. Físicamente representa el conjunto de todas las rotaciones que se pueden realizar en el espacio. Este grupo es triparamétrico; toda rotación puede ser repesentada por un vector $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ de $\mathbb{R}^3$ paralelo al eje de rotación y de módulo igual al ángulo de rotación (siguiendo la regla de la mano derecha). Nótese que esto implica la compacidad del grupo[2].
Pasemos a calcular las matrices infinitesimales de $\mathrm{SO}(3)$. Consideremos la matriz correspondiente al vector $(\alpha_1,0,0)$, es decir, a la rotación de ángulo α_1 alrededor del eje X. Esta matriz es, teniendo en cuenta la forma que tiene la matriz de rotación en el plano,

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

[1] Se dice que una matriz es ortogonal si es invertible y su inversa coincide con su transpuesta.
[2] Visto como espacio topológico.

Calculemos su forma infinitesimal:

$$I_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\right)\Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Si en vez de hacer la rotación entorno al eje X la hacemos entorno a los ejes Y o Z obtenemos, respectivamente,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Observemos que estas tres matrices cumplen las reglas de conmutación

$$[I_i, I_j] = \epsilon_{ijk} I_k, \text{[3]} \tag{2.5}$$

teniendo en cuenta que el conmutador viene definido por

$$[A, B] := AB - BA. \tag{2.6}$$

Veamos ahora cómo podemos expresar cualquier matriz de SO(3) mediante estas tres matrices infinitesimales. Para ello, consideremos el conjunto de rotaciones con un eje de rotación dado. Observemos que este conjunto forma un subgrupo de SO(3) uniparamétrico, siendo el parámetro el ángulo de giro (o, según lo hemos definido antes, el módulo del vector $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$). Llamemos θ a este parámetro. Está claro que si $g(\theta)$ denota al elemento de este subgrupo de parámetro θ, entonces $g(\theta_1 + \theta_2) = g(\theta_1)g(\theta_2)$ y $g(0) = E$. Si ahora derivamos los dos miembros de la primera igualdad respecto a θ_1, tendremos

$$\frac{d(g(\theta_1)g(\theta_2))}{d\theta_1} = g(\theta_2)\frac{dg(\theta_1)}{d\theta_1}, \tag{2.7}$$

$$\frac{dg(\theta_1 + \theta_2)}{d\theta_1} = \frac{dg(\theta_1 + \theta_2)}{d(\theta_1 + \theta_2)}\frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{d\theta_1} = \frac{dg(\theta_1 + \theta_2)}{d(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{2.8}$$

Si sustituimos $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$, obtendremos la igualdad

$$\frac{dg}{d\theta} = I_\theta g(\theta), \tag{2.9}$$

donde $I_\theta = \left(\frac{dg}{d\theta}\right)\big|_0$ es la matriz infinitesimal correspondiente al parámetro θ. Teniendo en cuenta que $g(0)$ tiene que ser igual a la identidad, deducimos que esta

[3] ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. Su valor es 1 si (ijk) es una permutación par del grupo simétrico S^3, -1 si (ijk) es una permutación impar y 0 en cualquier otro caso.

ecuación diferencial tiene una única solución, que es $g(\theta) = \exp(I_\theta \theta)$. Recordemos que la función exponencial matricial está definida por

$$\exp(X) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{X^t}{t!}. \tag{2.10}$$

Sabemos que el ángulo de giro será $\theta = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, donde $\alpha_1 = \theta \cos(\widehat{OX, \theta})$, $\alpha_2 = \theta \cos(\widehat{OY, \theta})$ y $\alpha_3 = \theta \cos(\widehat{OZ, \theta})$ son las proyecciones sobre cada uno de los ejes. Por lo tanto, otra forma de expresar I_θ será

$$I_\theta = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dg}{d\alpha_i} \right) \Bigg|_0 \left(\frac{d\alpha_i}{d\theta} \right) = I_1 \cos(\widehat{OX, \theta}) + I_2 \cos(\widehat{OY, \theta}) + I_3 \cos(\widehat{OZ, \theta}). \tag{2.11}$$

Esto nos lleva a la expresión

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(I_\theta \theta) = \exp(I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 + I_3 \alpha_3), \tag{2.12}$$

lo que demuestra que con I_1, I_2 e I_3 podemos expresar cualquier elemento de SO(3).

2.2. Álgebras de Lie. Grupos de Lie

2.2.1. Definiciones y conceptos básicos

De hecho, lo que acabamos de encontrar en la sección anterior es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Veamos qué significa esto. Consideraremos durante el resto del capítulo que $\mathbb{K}$ denota bien al cuerpo $\mathbb{R}$ o bien al cuerpo $\mathbb{C}$.

Definición 2.2 *Un* **álgebra de Lie** $\mathfrak{a}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con una operación* $\mathbb{C}$*-bilineal y antisimétrica* $[\cdot, \cdot]$ *que cumple la identidad de Jacobi:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \textit{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{a}. \tag{2.13}$$

A esta operación se la denomina **corchete de Lie**. *Diremos que la dimensión de* $\mathfrak{a}$ *es su dimensión como espacio vectorial.*

De la definición se deduce que dos álgebras de Lie son isomorfas si sus bases cumplen exactamente las mismas reglas de conmutación.
Podemos definir, por ejemplo, el corchete de Lie sobre $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ como el conmutador $[X, Y] = XY - YX$, para obtener un álgebra de Lie de dimensión n^2, que se denota $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Definición 2.3 *Sea* $\mathfrak{a}$ *un álgebra de Lie. Llamamos* **complexificación** *de* $\mathfrak{a}$ *al espacio vectorial* $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a}$ *dotado del corchete de Lie de* $\mathfrak{a}$*.*

Definición 2.4 *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie sobre* $\mathbb{K}$*. Una* **representación de** $\mathfrak{g}$ *es un morfismo de álgebras de Lie*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: \ \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(V), \\ X &\mapsto \mathbf{T}(X), \end{aligned}$$

tal que se cumple

$$[\mathbf{T}(X), \mathbf{T}(Y)] = \mathbf{T}([X, Y]), \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{2.14}$$

donde V *es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.*

Proposición 2.1 (cf.[6]) *Sea* $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ *la complexificación de un álgebrade Lie real* $\mathfrak{a}$*. Existe una biyección entre las representaciones irreducibles de* $\mathfrak{a}$ *y las representaciones irreducibles de* $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$*.*

Definición 2.5 *Un* **grupo de Lie lineal** *se define como un subgrupo cerrado del grupo* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$*.*

Como solamente trabajaremos con grupos de Lie lineales, a partir de ahora los llamaremos simplemente grupos de Lie, a pesar de que el concepto de grupo de Lie abarque a otros grupos distintos. Cabe destacar que, en particular, todo grupo de Lie puede ser visto también como una variedad diferenciable y, en consecuencia, como un espacio topológico.
Así pues, vemos que el grupo $\mathrm{SO}(3)$ es un ejemplo de grupo de Lie. Otro ejemplo que vamos a estar utilizando de aquí en adelante es el grupo especial unitario $\mathrm{SU}(2)$, definido como el conjunto de matrices 2×2 de determinante igual a uno y tales que su matriz inversa es igual a su transpuesta conjugada. Podemos considerar que este grupo es un grupo de Lie real si lo pensamos como subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ en vez de como subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

Definición 2.6 *Sea* G *un grupo de Lie real, es decir, un subgrupo cerrado de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*. Llamaremos* **álgebra de Lie de** G *a*

$$\mathfrak{g} := \{X = \gamma'(0) \mid \gamma : (-1, 1) \to G, \ \gamma \text{ de clase } C^1, \gamma(0) = E\}, \tag{2.15}$$

que es el espacio tangente de G *en* E*. El corchete de Lie asociado a este álgebra de Lie es el indicado antes,* $[X, Y] = XY - YX$*.*

Definición 2.7 *Sea $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. Definimos la función exponencial como*

$$\begin{aligned} \exp : \ \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \\ X &\mapsto \sum_{t=0}^{\infty} \frac{X^t}{t!}. \end{aligned}$$

Proposición 2.2 (cf.[6]) *Para todo $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ se tiene*

$$\exp\left(\mathrm{Tr}(X)\right) = \det\left(\exp(X)\right). \tag{2.16}$$

Gracias al hecho de que $X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exp(tX) \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (cf.[6]), y con la ayuda del siguiente teorema, vemos que la definición de álgebra de Lie de un grupo de Lie es coherente.

Teorema 2.1 (cf.[6]) *$\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}$ y $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Con esta definición de álgebra de Lie de un grupo de Lie vemos claro que las matrices I_1, I_2, I_3, dadas por las ecuaciones (2.3) y (2.4), constituyen una base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Concretamente, el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ viene definida por

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) | X + X^T = 0\}. \tag{2.17}$$

Nótese que el álgebra de Lie de un grupo de Lie tiene como dimensión el número de parámetros necesarios para poder expresar cualquier elemento del grupo. Además, por su condición de espacio tangente, su dimensión también es la misma que la dimensión del grupo de Lie visto como una variedad diferenciable.

Definición 2.8 *Sean G y G' dos grupos de Lie. Se dice que un morfismo de grupos $f : G \to G'$ es un* **morfismo de grupos de Lie** *si es continuo.*

Definición 2.9 *Definimos el* **diferencial** Df **de un morfismo de grupos de Lie** $f : G \to G'$ *como*

$$\left(Df\right)(X) := \frac{d}{dt} f\left(\exp\left(tX\right)\right)\Big|_{t=0}. \tag{2.18}$$

Proposición 2.3 (cf.[6]) *Sea G un grupo de Lie conexo y sea $\mathbf{T}$ una representación del mismo en un espacio de representación V. Entonces se cumple*

(i) *$V' \subset V$ es invariante bajo $\mathbf{T}$ si y solo si también lo es bajo $D\mathbf{T}$.*

(ii) *$\mathbf{T}$ es irreducible si y solo si $D\mathbf{T}$ es irreducible.*

(III) *Sea $\mathbf{T}'$ otra representación de G. $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ son equivalentes si y solo si $D\mathbf{T}$ y $D\mathbf{T}'$ son equivalentes.*

Definición 2.10 *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Definimos la* **representación adjunta** *de G en $\mathfrak{g}$ como la representación*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}: \ G &\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g, \end{aligned}$$

donde Ad_g está definida como el diferencial de la acción de conjugación

$$\begin{aligned} C_g: \ G &\to G, \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

El hecho de que Ad sea una representación es consecuencia directa de que

$$G_{gg'}(h) = gg'hg'^{-1}g^{-1} = C_g \circ C_{g'}(h). \tag{2.19}$$

Definición 2.11 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se dice* **subálgebra de Cartan** *si es nilpotente y maximal.*

Teorema 2.2 (cf.[10]) *Todo álgebra de Lie contiene al menos una subálgebra de Cartan.*

Teorema 2.3 (cf.[10]) *Todas las subágebras de Cartan de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ son conjugadas.*

2.2.2. Otros grupos ortogonales

Nos será de especial utilidad durante el capítulo 3 saber cómo son los grupos de Lie $\mathrm{SO}(4)$, $\mathrm{O}(1,3)$, $\mathrm{SO}(1,3)$ y $\mathrm{SO}^+(1,3)$.
El grupo de las rotaciones en el espacio real de cuatro dimensiones, $\mathrm{SO}(4)$, está definido como

$$\mathrm{SO}(4) := \{A \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) \mid AA^T = E, \ \det(A) = 1\}, \tag{2.20}$$

Este grupo es hexaparamétrico, pudiendo tomar como parámetros los ángulos de giro alrededor de cada uno de los seis planos bidimensionales. Si se consideran estos parámetros es fácil encontrar, de la misma manera en que encontramos una base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ en la sección 2.1.1, que una base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ es

$$A_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Los conjuntos de matrices $\{A_{01}, -A_{02}, A_{12}\}$, $\{A_{23}, -A_{13}, A_{12}\}$, $\{A_{02}, -A_{03}, A_{23}\}$ y $\{A_{01}, -A_{03}, A_{13}\}$ son cuatro bases de $\mathfrak{so}(3)$ que cumplen reglas de conmutación análogas a las descritas por la ecuación (2.5).
De los grupos $\mathrm{O}(1,3)$, $\mathrm{SO}(1,3)$ y $\mathrm{SO}^+(1,3)$ por el momento nos limitaremos a dar sus definiciones. El primero de estos dos grupos está definido como

$$\mathrm{O}(1,3) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AGA^T = G\}, \tag{2.23}$$

siendo

$$G := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

El grupo $\mathrm{SO}^+(1,3)$ está formado simplemente por las matrices de $\mathrm{O}(1,3)$ con determinante igual a uno y cuyo elemento que está en la primera fila y la primera columna es mayor o igual que uno. Éste es un subgrupo de $\mathrm{SO}(1,3)$, formado por las matrices de $\mathrm{O}(1,3)$ con determinante igual a uno.

2.2.3. El grupo especial unitario $\mathrm{SU}(2)$

Ya hemos dado una definición de este grupo. Su álgebra de Lie viene dada por

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) | X + \overline{X}^T = 0, \ \mathrm{Tr}(X) = 0\}, \tag{2.25}$$

como se puede comprobar con la proposición (2.16) y sabiendo que se cumple $X \in \mathfrak{su}(2) \Leftrightarrow \exp(tX) \in \mathrm{SU}(2)$.
A partir de las relaciones $X + \overline{X}^T = 0$ y $\mathrm{Tr}(X) = 0$ es fácil ver que todo elemento de $\mathfrak{su}(2)$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & -ai \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Observemos que el determinante de la matriz es igual al cuadrado de la norma del vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
De aquí deducimos que $\mathfrak{su}(2)$ tiene dimensión 3 y que las matrices

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

forman una base de este álgebra.
Estas tres matrices cumplen las reglas de conmutación

$$[\eta_i, \eta_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\eta_k, \tag{2.28}$$

que son exactamente las mismas reglas de conmutación que cumplían las tres matrices de la base de $\mathfrak{so}(3)$. Esto implica que ambas álgebras de Lie son isomorfas.

2.2.4. El recubrimiento de $\mathrm{SO}(3)$ por $\mathrm{SU}(2)$

El objetivo de esta sección es encontrar un morfismo $f : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ que sea exhaustivo y cuyo núcleo sea[4] $(\pm E_2)$.
Sean

$$X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} iy_3 & -y_2 + iy_1 \\ y_2 + iy_1 & -iy_3 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

dos elementos de $\mathfrak{su}(2)$ tales que $\mathrm{Ad}_g(X) = Y$ para un cierto $g \in \mathrm{SU}(2)$, es decir, $Y = gXg^{-1}$. Esta igualdad implica que los coeficientes y_1, y_2, y_3 se pueden escribir como combinación lineal de los coeficientes x_1, x_2, x_3,

$$y_j = \sum_{k=1}^{3} f(g)_{jk} x_k, \tag{2.30}$$

donde $f : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ es una función dependiente de g. Como Ad es una representación, tenemos que f es un morfismo de grupos. Observemos además que el hecho de $Y = gXg^{-1}$ implica que $\det(X) = \det(Y)$, o lo que es lo mismo, que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Esta condición es suficiente para afirmar que se cumple la inclusión $f(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{O}(3)$. Además, por ser f continua y $\mathrm{SU}(2)$ conexo tenemos que $\det(f(X)) = 1$, o lo que es lo mismo, $f(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(3)$.

[4] Denotamos por E_k a la matriz identidad de dimensión $k \times k$.

Comprobemos ahora que este morfismo es exhaustivo. Sea $A \in \mathrm{SO}(3)$ y sean X, Y definidas como en (2.29) tales que

$$y_j = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} x_k. \tag{2.31}$$

Es fácil comprobar que las matrices iX y iY son hermíticas y que ambas tienen $\pm i \det(X) (= \pm i \det(Y))$ como valores propios. En consecuencia, existe una matriz unitaria B tal que $Y = BXB^{-1}$, por lo que existe una matriz $B' \in \mathrm{SU}(2)$ tal que $\det B' = 1$ y $Y = B'XB'^{-1}$, que es lo que queríamos ver.
Finalmente, para ver que el núcleo de f es $(\pm E_2)$ basta con observar que se cumplen las igualdades $f(-X) = f(X)$ y $f^{-1}(E_3) = (\pm E_2)$, condiciones suficientes para afirmar que $\mathrm{SO}(3)$ es isomorfo a $\mathrm{SU}(2)/(\pm E_2)$.
Esto implica que se cumple la sucesión exacta

$$1 \to (\pm E_2) \to \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \to 1. \tag{2.32}$$

2.3. Representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$

Consideremos las tres matrices η_1, η_2, η_3, que forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, y sea $\mathbf{T}$ una representación de este álgebra de Lie. Las matrices $\mathbf{T}(\eta_i)$ tendrán las mismas reglas de conmuntación que las de la base del álgebra $\mathfrak{su}(2)$, debido a la ecuación (2.14). Además, como se cumple que $\eta_i^* = -\eta_i$, tendremos una condición análoga para las matrices de la representación: $(\mathbf{T}(\eta_i))^* = \mathbf{T}(\eta_i^*) = -\mathbf{T}(\eta_i)$.
Definamos ahora las matrices

$$H_+ := i\mathbf{T}(\eta_1) - \mathbf{T}(\eta_2), \quad H_- := i\mathbf{T}(\eta_1) + \mathbf{T}(\eta_2), \quad H_3 := i\mathbf{T}(\eta_3), \tag{2.33}$$

que también forman una base de $\mathbf{T}(\mathfrak{su}(2))$. Se puede comprobar sin dificultad que las reglas de conmutación entre éstas son

$$[H_+, H_-] = 2H_3, \quad [H_-, H_3] = H_-, \quad [H_3, H_+] = H_+ \tag{2.34}$$

y que

$$H_+^* = H_-, \quad H_-^* = H_+, \quad H_3^* = H_3. \tag{2.35}$$

Proposición 2.4 *Sea v_λ un vector propio de H_3 con valor propio λ. Entonces, $H_+ v_\lambda$ y $H_- v_\lambda$ también serán vectores propios de H_3 pero con valores propios $\lambda + 1$ y $\lambda - 1$ respectivamente.*

Demostración: Tan solo nos tenemos que ayudar de las reglas de conmutación. Aplicándolas, obtenemos directamente

$$H_3 H_+ v_\lambda = (H_+ H_3 + H_+) v_\lambda = (\lambda + 1) H_+ v_\lambda, \tag{2.36}$$

$$H_3 H_- v_\lambda = (H_- H_3 - H_-) v_\lambda = (\lambda - 1) H_- v_\lambda. \tag{2.37}$$

□

Teorema 2.4 *Sea j el mayor valor propio de H_3. Entonces, H_3 tiene $2j+1$ valores propios distintos, estando distanciados en una unidad entre ellos y siendo $-j$ el menor. A este valor j se le denomina* **peso** *de la representación, y cumple que $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.*

Demostración: Supongamos que todos los vectores propios v_λ de H_3 están normalizados. De la proposición anterior podemos deducir las igualdades $H_+ v_\lambda = \beta_\lambda v_{\lambda+1}$ y $H_- v_\lambda = \alpha_\lambda v_{\lambda-1}$, donde β_λ y α_λ son números complejos.
Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.35), obtenemos

$$\beta_k \langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle = \langle H_+ v_k, v_{k+1} \rangle = \langle v_k, H_- v_{k+1} \rangle = \alpha_{k+1} \langle v_k, v_k \rangle. \tag{2.38}$$

Sea ahora $k < j$. Entonces,

$$\beta_{k-1} v_k = H_+ v_{k-1} = \frac{1}{\alpha_k} H_+ H_- v_k = \frac{1}{\alpha_k} (H_- H_+ + 2H_3) v_k = \frac{1}{\alpha_k} (\alpha_{k+1} \beta_k + 2k) v_k. \tag{2.39}$$

Utilizando estas dos igualdades que acabamos de encontrar,

$$\beta_k = \alpha_{k+1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\alpha_{k+1} \beta_k + 2k}{\alpha_k}, \tag{2.40}$$

obtenemos la relación de recurrencia $\beta_k^2 + 2k = \beta_{k-1}^2$.
Ahora, como j es el mayor valor propio de H_3, tendremos que $H_+ v_j = 0$, por lo que $\beta_{j-1}^2 = 2j$. De hecho, a partir de la relación de recurrencia obtenemos que para cada $k < j$ tendremos

$$\beta_k^2 = \sum_{l=k+1}^{j} 2l = 2 \left[\sum_{l=k_<}^{j} l - \sum_{l=k_<}^{k} l \right] = j(j+1) - k(k+1), \tag{2.41}$$

donde $k_<$ es el valor propio más pequeño de H_3. En consecuencia,

$$\alpha_k^2 = \beta_{k-1}^2 = j(j+1) - k(k-1), \tag{2.42}$$

y obtenemos los valores

$$\alpha_k = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)}, \quad \beta_k = \sqrt{j(j+1) - k(k+1)}. \tag{2.43}$$

Como $H_- v_k = \sqrt{j(j+1) - k(k-1)} v_{k-1}$, tendremos que $v_{-j-1} = 0$ y $v_{-j} \neq 0$, por lo que deducimos que H_3 solo tiene vectores propios con los valores propios $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$, que suman un total de $2j+1$ valores propios. Por lo tanto, j solo puede ser un entero o un semientero.

□

Con esta demostración, además de lo que queríamos ver, también hemos demostrado que el espacio vectorial generado por los vectores propios de H_3 es invariante bajo las transformaciones H_-, H_+ y H_3. Esto significa que existe una representación de $\mathfrak{su}(2)$ que tiene a este espacio como espacio de representación, y esta representación es $\mathbf{T}$.

Proposición 2.5 *La representación de* $\mathfrak{su}(2)$ *en el espacio de representación que acabamos de encontrar es irreducible.*

Demostración: Llamemos R_{2j+1} al espacio vectorial generado por los vectores propios de H_3 y supongamos que existe un subespacio invariante R' respecto a H_-, H_+ y H_3. Sea h un vector propio de H_3 con valor propio j. Este vector propio o bien pertenecerá a R' o bien a $R'^{\perp}$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que pertenece a R'. Tendremos:

$$0 = H_+ h = H_+ \sum_{k=-j}^{j} c_k v_k = \sum_{k=-j}^{j} c_k \beta_k v_{k+1}. \tag{2.44}$$

Como $v_{-j}, \ldots, v_j$ son linealmente independientes, de esta igualdad deducimos que todos los coficientes, a excepción del c_j, tienen que ser nulos, y $h = c_j v_j \in R'$. Aplicando H_- repetidamente, obtenemos que todos los vectores de la base tienen que pertenecer a R', lo que implica que R' tiene que ser igual a R_{2j+1}.

□

Ahora ya estamos en disposición de poder determinar las matrices $\mathbf{T}(\eta_i)$ en la base $v_{-j}, \ldots, v_j$. Primero observemos que

$$\mathbf{T}(\eta_1) = -\frac{i}{2}(H_+ + H_-), \quad \mathbf{T}(\eta_2) = \frac{H_- - H_+}{2}, \quad \mathbf{T}(\eta_3) = -iH_3. \tag{2.45}$$

Apliquemos ahora cada una de estas matrices a cada uno de los vectores de la base.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\eta_1)v_k &= -\frac{i}{2}\left(\sqrt{j(j+1)-k(k+1)}v_{k+1} + \sqrt{j(j+1)-k(k-1)}v_{k-1}\right), \\ \mathbf{T}(\eta_2)v_k &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{j(j+1)-k(k-1)}v_{k-1} - \sqrt{j(j+1)-k(k+1)}v_{k+1}\right), \\ \mathbf{T}(\eta_3)v_k &= -ikv_k. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Si las escribimos en forma matricial, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\eta_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}\alpha_{-j+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\alpha_{-j+1} & 0 & -\frac{i}{2}\alpha_{-j+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\alpha_{-j+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{i}{2}\alpha_{j-1} & 0 & -\frac{i}{2}\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{i}{2}\alpha_j & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}(\eta_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\alpha_{-j+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_{-j+1} & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_{-j+2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha_{-j+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}\alpha_{j-1} & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\alpha_j & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}(\eta_3) &= \begin{pmatrix} ij & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i(j-1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -ij \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Con estas tres matrices podemos generar cualquier elemento de la imagen de la representación $\mathbf{T}$ de $\mathfrak{su}(2)$ de peso j, a la que denotaremos por $\mathbf{T}^j$.

2.4. Representaciones irreducibles de SO(3)

A continuación intentaremos encontrar representaciones irreducibles del grupo SU(2), y veremos que sus imágenes son las mismas que las imágenes de las representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ que hemos encontrado en la sección anterior. Esto nos ayudará a acabar deduciendo, con la ayuda de la sección 2.2.4, cómo son las representaciones irreducibles de SO(3).

Intentemos encontrar pues representaciones irreducibles del grupo SU(2).

2.4. Representaciones irreducibles de SO(3)

Sea V^j, con $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, el espacio vectorial de los polinomios homogéneos de dos variables (z_1, z_2) con coeficientes en $\mathbb{C}$, de grado $2j$. Éste es un espacio de dimensión $2j+1$, y $\{z_1^{j+m} z_2^{j-m}\}$, con $m \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$, es una base del mismo. Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ y consideremos la representación ρ definida por

$$\rho(g)f = f \circ g^{-1}, \tag{2.48}$$

que es representación por cumplir $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$ para todo $g, g' \in G$. Denotaremos por ρ^j a la representación de este tipo con espacio de representación V^j. Definamos también las funciones

$$\begin{aligned} f_m^j :\ & \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \\ & (z_1, z_2) \mapsto z_1^{j+m} z_2^{j-m}. \end{aligned}$$

Consideremos el elemento $g = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ de SU(2), con $t \in \mathbb{R}$. Las funciones f_m^j son los vectores propios de la representación ρ^j, y tienen valor propio e^{-2imt}:

$$\rho^j(g) f_m^j (z_1, z_2) = f_m^j \left(e^{-it} z_1, e^{it} z_2\right) = \left(e^{-it} z_1\right)^{j+m} \left(e^{it} z_2\right)^{j-m} = e^{-2imt} f_m^j (z_1, z_2). \tag{2.49}$$

Proposición 2.6 *La representación ρ^j es una representación de* SU(2) *cuya imagen coincide con la imagen de la representación $\mathbf{T}^j$ de $\mathfrak{su}(2)$.*

Consideremos la base de $\mathfrak{su}(2)$

$$J_3 = i\eta_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J_+ = i\eta_1 - \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; J- = i\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Estas tres matrices cumplen las mismas reglas de conmutación que las matrices H_3, H_+, H_-. Entonces,

$$\begin{aligned} \left((D\rho^j)(J_3) f_m^j\right)(z_1, z_2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\rho\left(\exp(tJ_3)\right) f_m^j\right)(z_1, z_2)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f_m^j \circ \exp(-tJ_3)\right)(z_1, z_2)\Big|_{t=0}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

Expresemos la matriz $\exp(-tJ_3)$ en función de parámetros dependientes de t:

$$\exp(-tJ_3) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Obviamente, tendremos $a(0) = d(0) = 1$ y $b(0) = c(0) = 0$, y como además $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(-tJ_3)\big|_{t=0} = -J_3$, tendremos también que $a'(0) = -\frac{1}{2}$, $d'(0) = \frac{1}{2}$ y que $b'(0) = c'(0) = 0$. Utilizando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left((D\rho^j)(J_3)f^j_m\right)(z_1, z_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f^j_m(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)\right)\big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((az_1 + bz_2)^{j+m}(cz_1 + dz_2)^{j-m}\right)\big|_{t=0} \\
&= (j+m)(a(0)z_1 + b(0)z_2)^{j+m-1}(c(0)z_1 + d(0)z_2)^{j-m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(az_1 + bz_2)\big|_{t=0} + \\
&+ (j-m)(a(0)z_1 + b(0)z_2)^{j+m}(c(0)z_1 + d(0)z_2)^{j-m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cz_1 + dz_2)\big|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{2}(j+m)z_1 z_1^{j+m-1} z_2^{j-m} + \frac{1}{2}(j-m)z_2 z_1^{j+m} z_2^{j-m-1} \\
&= m f^j_m(z_1, z_2).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

De manera similar podemos obtener

$$(D\rho^j)(J_+)f^j_m = (j-m)f^j_{m+1}, \quad (D\rho^j)(J_-)f^j_m = (j+m)f^j_{m-1}. \tag{2.54}$$

Si ahora definimos

$$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} f^j_m, \tag{2.55}$$

obtendremos las igualdades

$$\begin{aligned}
(D\rho^j)(J_3)|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\
(D\rho^j)(J_+)|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle, \\
(D\rho^j)(J_-)|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

que son exactamente las mismas que habíamos obtenido al aplicar las matrices H_3, H_+ y H_- respectivamente a cada uno de los vectores v_m de R_{2j+1}.
Por lo tanto, y utilizando la proposición (2.3), podemos afirmar que la representación ρ^j es equivalente a la representación $\mathbf{T}^j$ con espacio de representación R_{2j+1}, con j entero o semientero.

□

Proposición 2.7 *Toda representación irreducible de* SO(3) *proviene de una representación irreducible de* SU(2) *de peso* $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea f : SU(2) $\to$ SO(3) un morfismo exhaustivo y sea ρ^j una representación de SU(2) de peso j. Sea σ : SO(3) $\to$ GL(V) un morfismo tal que $\sigma \circ f = \rho^j$, con V un espacio vectorial. Entonces, σ es una representación de SO(3). Sin embargo, para que esta definición de σ tenga sentido, se tiene que cumplir que el núcleo de ρ^j sea igual a $(\pm E_2)$, como consecuencia del resultado visto en la sección 2.2.4. Esta condición tan solo se cumple cuando j es entero, como se puede comprobar fácilmente sustituyendo g por $-E$ en la ecuación (2.48). Por lo tanto, las representaciones de SO(3) son las ρ^j con $j \in \mathbb{N}$.

$\square$

En esta proposición hemos acabado deduciendo que podemos descartar los casos en que $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Estos casos también pueden ser tratados si se definen y estudian las denominadas representaciones proyectivas, que son homomorfismos en el grupo proyectivo lineal en lugar de en el grupo lineal. Sin embargo, en este trabajo no trataremos este tipo de representaciones.

Producto de las representaciones irreducibles de SO(3)

Sean **T** y **T**' dos representaciones irreducibles del grupo SO(3) de pesos j y j' respectivamente. Entonces, debido a la proposición 1.5, deducimos que $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ es una representación irreducible del grupo SO(3) $\times$ SO(3).
Sean $\{v_{-j} \ldots, v_j\}$ los vectores propios de la H_3 relacionada con **T** como en la ecuación (2.33) con valores propios $-j, \ldots, j$, y sean $\{v'_{-j'} \ldots, v'_{j'}\}$ los vectores propios de H'_3, relacionada con **T**', con valores propios $-j', \ldots, j'$. Entonces, los vectores $v_k \otimes v'_m$, con $k \in \{-j, \ldots, j\}$ y $m \in \{-j', \ldots, j'\}$, serán propios de la matriz

$$H''_3 := H_3 \otimes E_{2j'+1} + E_{2j+1} \otimes H'_3. \tag{2.57}$$

Comprobemos cuáles serán sus valores propios:

$$H''_3 v_k \otimes v'_m = H_3 v_k \otimes E_{2j'+1} v'_m + E_{2j+1} v_k \otimes H'_3 v'_m = (k+m) v_k \otimes v'_m. \tag{2.58}$$

Así pues, $v_k \otimes v'_m$ tiene valor propio $k+m$. Se ve en seguida pues que existen diferentes vectores propios a los que les corresponde el mismo valor propio. Esto implica que en esta base la representación es reducible.
Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $j \geq j'$. Entonces, está claro que el mayor valor propio de H''_3 es $j + j'$, y tiene multiplicidad 1. $j + j' - 1$ es el

siguiente, y con multiplicidad 2. Y así sucesivamente hasta llegar a $j - j'$, que tendrá multiplicidad $2j' + 1$. Ésta es la máxima multiplicidad posible, ya que es el número de valores propios de H_3'. Todos los valores propios mayores o iguales que cero y menores o iguales que $j - j'$ tendrán esta misma multiplicidad. Por simetría, si λ es uno de estos valores propios con multiplicidad m_λ, entonces $-\lambda$ también será un valor propio de H_3'' con multiplicidad m_λ.

Consideremos el vector propio con valor propio $j + j'$. Este vector será propio de una representación de SO(3) de peso $j + j'$. Aplicando el operador H_-'' correspondiente, podemos obtener una base de un subespacio invariante del espacio de representación de esta representación. Todos los vectores de esta base son vectores propios de H_3'' que ya hemos encontrado. La representación de peso $j + j'$ que acabamos de construir se realiza en un espacio de dimensión $2(j + j') + 1$ que queda invariante bajo la misma.

Consideremos ahora su espacio ortogonal. De la misma manera que antes, podemos encontrar una representación de SO(3), esta vez de peso $j + j' - 1$, tal que deje invariante un espacio de dimensión $2(j + j') - 1$. Y así sucesivamente hasta que únicamente nos quede un conjunto de vectores propios de H_3'' que formen una base de un espacio en el que exista una representación de SO(3) de peso $|j - j'|$.

La construcción que acabamos de realizar se puede expresar mediante la igualdad

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}' = \mathbf{T}^{(j+j')} \oplus \cdots \oplus \mathbf{T}^{(|j-j'|)}, \tag{2.59}$$

donde $\mathbf{T}^{(i)}$ es una representación de SO(3) de peso i.

Capítulo 3

Representaciones del grupo de Lorentz

3.1. El grupo de Lorentz, $\mathrm{O}(1,3)$

Definición 3.1 *Definimos el* **espacio de Minkowski** *como el espacio real de cuatro dimensiones dotado de la métrica definida por (2.24), y lo denotaremos por* $\mathbb{R}^{(1,3)}$. *Sus elementos se denominan* **cuadrivectores**.

Este espacio, en física, también es conocido como el *espacio-tiempo de Minkowski*. Esto se debe a que si se interpreta la primera coordenada de un vector de este espacio como el tiempo, y las tres otras coordenadas como las tres dimensiones espaciales, se puede obtener la descripción del movimiento de un cuerpo que está en movimiento rectilineo uniforme respecto a otro según la teoría de la relatividad especial.

Definición 3.2 *Una* **transformación de Lorentz** *es una aplicación lineal de* $\mathbb{R}^{(1,3)}$ *a* $\mathbb{R}^{(1,3)}$ *que respeta la métrica dada por* G.

Consideremos el cuadrivector $X = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, con x_0 la coordenada temporal y x_1, x_2, x_3 las coordenadas espaciales. Toda transformación de Lorentz, por definición, deja invariante la forma cuadrática $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Consideremos una transformación de Lorentz con matriz asociada Λ. La condición de invariancia de la forma cuadrática significa que si definimos otro cuadrivector como $Y := \Lambda X$, entonces se cumple $X^T G X = Y^T G Y$.
Sustituyendo Y por ΛX en la última igualdad, obtenemos:

$$X^T G X = (\Lambda X)^T G \Lambda X = X^T \Lambda^T G \Lambda X, \tag{3.1}$$

Lo que implica que $\Lambda^T G \Lambda = G$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.3 *El* **grupo general de Lorentz** *o simplemente grupo de Lorentz,* $L = \mathrm{O}(1,3)$*, es el grupo de transformaciones lineales reales cuyas matrices* Λ *cumplen* $\Lambda^T G \Lambda = G$*.*

Comprobemos que, efectivamente, L es un grupo. Sean Λ, Λ' dos matrices asociadas a dos transformaciones de Lorentz distintas. Entonces,

$$(\Lambda\Lambda')^T G \Lambda\Lambda' = \Lambda'^T \Lambda^T G \Lambda\Lambda' = G. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, la operación es interna. Las otras condiciones de grupo son también claras.

De la definición de grupo general de Lorentz se ve claro que el determinante de todo elemento Λ de este grupo cumple que $\det(\Lambda)^2 = 1$, lo que implica que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Además, imponiendo que el elemento situado en la primera fila y en la primera columna de la matriz $\Lambda^T G \Lambda$ sea -1, obtenemos $\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{20}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1$, de donde se deduce la desigualdad $\Lambda_{00}^2 \geq 1$. En consecuencia, o bien tendremos $\Lambda_{00} \geq 1$ o bien $\Lambda_{00} \leq -1$.
De estas condiciones deducimos que el grupo general de Lorentz se compone de los siguientes cuatro conjuntos disjuntos:

1. L_+^+ , con $\Lambda_{00} \geq 1$ y $\det(\Lambda) = 1$,

2. L_+^- , con $\Lambda_{00} \leq -1$ y $\det(\Lambda) = 1$,

3. L_-^+ , con $\Lambda_{00} \geq 1$ y $\det(\Lambda) = -1$,

4. L_-^- , con $\Lambda_{00} \leq -1$ y $\det(\Lambda) = -1$.

De entre estos cuatro conjuntos, el único posible candidato a ser un subgrupo de L es L_+^+, ya que es el único que contiene a la matriz identidad.

Proposición 3.1 L_+^+ *es un grupo.*

Demostración: Además de la igualdad $\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{20}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1$ encontrada anteriormente, a partir de la expresión[1] $\Lambda G \Lambda^T = G$ podemos encontrar también la igualdad $\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{01}^2 - \Lambda_{02}^2 - \Lambda_{03}^2 = 1$. Sean $\Lambda, \lambda \in L_+^+$. Si comprobamos que

$$(\Lambda\lambda)_{00} = \Lambda_{00}\lambda_{00} + \Lambda_{01}\lambda_{10} + \Lambda_{02}\lambda_{20} + \Lambda_{03}\lambda_{30} \geq 1 \tag{3.3}$$

[1] $\left(\Lambda^T G \Lambda\right)^T = G$

y que $\Lambda^{-1} \in L_+^+$ habremos demostrado que L_+^+ es un grupo. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}(\Lambda_{01}\lambda_{10} + \Lambda_{02}\lambda_{20} + \Lambda_{03}\lambda_{30})^2 \leq \left(\Lambda_{01}^2 + \Lambda_{02}^2 + \Lambda_{03}^2\right)\left(\lambda_{10}^2 + \lambda_{20}^2 + \lambda_{30}^2\right) = \\ = \left(\Lambda_{00}^2 - 1\right)\left(\lambda_{00}^2 - 1\right) < \Lambda_{00}^2\lambda_{00}^2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por lo tanto, $(\Lambda\lambda)_{00} > 0$. Como la matriz $\Lambda\lambda$ pertenece a L, deducimos que $(\Lambda\lambda)_{00} \geq 1$.
Para ver que $\Lambda^{-1} \in L_+^+$, tan solo tenemos que observar que si multiplicamos la expresión $\Lambda^T G\Lambda = G$ por Λ^{-1} por la derecha y por G por la izquierda, obtenemos la igualdad $\Lambda^{-1} = G\Lambda^T G$, por lo que $\Lambda_{00} = \Lambda_{00}^T = \Lambda_{00}^{-1}$ y $\det(\Lambda^{-1}) = 1$, es decir, $\Lambda^{-1} \in L_+^+$.

□

Este grupo se denomina **grupo propio de Lorentz**, y es también puede ser expresado como $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

3.1.1. Isomorfismo local entre $\mathrm{SO}^+(1,3)$ y $\mathrm{SO}(4)$

A continuación vamos a establecer una relación entre el grupo propio de Lorentz y SO(4), el grupo de rotaciones en el espacio euclideo tetradimensional $\mathbb{R}^4$, con el fin de obtener las representaciones irreducibles del álgebra de Lie del grupo propio de Lorentz.
El hecho de que la matriz G sea simétrica, hace que la relación $\Lambda^T G\Lambda = G$ nos dé 10 condiciones y, en consecuencia, que Λ tenga 6 grados de libertad. Esto significa que las transformaciones de Lorentz son hexaparamétricas. En otras palabras, $\mathrm{SO}^+(1,3)$ es un grupo de Lie de dimensión 6, como ya hemos visto en la sección 2.2.2.
Escojamos como parámetros independientes los ángulo de giro en los 6 planos bidimensionales (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), designando estos parámetros mediante φ_{01}, φ_{02}, φ_{03}, ψ_{12}, ψ_{13}, ψ_{23}, respectivamente. Está claro que las transformaciones que fijan la coordenada x_0 son idénticas a las transformaciones en SO(3). Consideremos una rotación en el plano (x_0, x_1). Si estuviésemos considerando el grupo SO(4), esta rotación, digamos de ángulo φ, vendría dada por el cambio de coordenadas

$$x_0' = x_0 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi,\ x_1' = x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3. \tag{3.5}$$

Si ahora en estas igualdades realizamos los cambios de variable resultantes de multiplicar x_0, x_0' y φ por i, obtendremos

$$x_0' = x_0 \cosh\varphi + x_1 \sinh\varphi,\ \ x_1' = x_0 \sinh\varphi + x_1 \cosh\varphi. \tag{3.6}$$

Observemos que ahora este cambio de variable tiene la propiedad de que deja la expresión $-x_0^2 + x_1^2$ invariante. O lo que es lo mismo (por haber dejado x_2 y x_3 inalteradas), deja la forma cuadrática $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariante, que es la condición que define a toda transformación de Lorentz. Por simetría sucederá lo mismo con las rotaciones en los planos (x_0, x_2) y (x_0, x_3). Este tipo de rotaciones espacio-temporales son conocidas como *boosts*. Esto significa que podemos establecer una correspondencia biunívoca en un entorno del elemento unidad entre los elementos de SO(4) y los del grupo de Lorentz. Tan solo podemos encontrar este tipo de correspondencia en un entorno del elemento unidad a causa de la periodicidad de las funciones seno y coseno, propiedad que no tienen las funciones seno hiperbólico ni coseno hiperbólico.

Sea $O \in \mathrm{SO}(4)$. Entonces, teniendo en cuenta la transformación que acabamos de describir, se puede ver que esta correspondencia vendrá dada por la expresión

$$\Lambda(O) = V^{-1}O'V, \tag{3.7}$$

donde O' es la matriz O pero sustituyendo los parámetros φ_{0j} por $i\varphi_{0j}$ $(j = 1, 2, 3)$ y V es la matriz

$$V = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

3.1.2. El álgebra de Lie del grupo de Lorentz

En esta sección intentaremos encontrar el álgebra de Lie del grupo propio de Lorentz. Por ser $\mathrm{SO}^+(1,3)$ la componente conexa de la unidad de $\mathrm{O}(1,3)$, las álgebras de Lie $\mathfrak{o}(1,3)$, $\mathfrak{so}(1,3)$ y $\mathfrak{so}^+(1,3)$ coinciden. Habitualmente nos referiremos a ella como $\mathfrak{so}(1,3)$. Para ello, y ya que hemos encontrado una relación entre $\mathrm{SO}^+(1,3)$ y SO(4), nos ayudaremos del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4)$ y de su base, descrita en la sección 2.2.2.
Observemos primero que la matriz A_{23}, por ejemplo, es la matriz infinitesimal del elemento

$$A_{23}' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(4). \tag{3.9}$$

Utilizando la ecuación (3.7), vemos que la matriz del grupo de Lorentz relacionada con A_{23}', a la que llamaremos B_{23}', es ella misma, por lo que su matriz infinitesimal

será $B_{23} = A_{23} \in \mathfrak{so}(1,3)$. Exactamente del mismo modo podemos encontrar las matrices $B_{13} = A_{13}, B_{12} = A_{12} \in \mathfrak{so}(1,3)$.
Consideremos ahora la matriz

$$A'_{01} := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(4), \tag{3.10}$$

cuya matriz infinitesimal es A_{01}. La matriz de L relacionada con A'_{01} mediante (3.7) es

$$B'_{01} := \begin{pmatrix} \cos(i\alpha) & i\sin(i\alpha) & 0 & 0 \\ i\sin(i\alpha) & \cos(i\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Si ahora calculamos su matriz infinitesimal, nos queda

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

De manera análoga encontramos

$$B_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

lo que nos hace tener ya completa una base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$. Se puede comprobar que las matrices $B_{01}, B_{02}, B_{03}, B_{12}, B_{13}, B_{23}$ cumplen las mismas reglas de conmutación que las matrices $iA_{01}, iA_{02}, iA_{03}, A_{12}, A_{13}, A_{23}$.

3.2. El grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Definición 3.4 *El* **grupo especial lineal**, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, *está formado por el conjuto de las matrices de dimensión $n \times n$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ definido por*

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}. \tag{3.14}$$

El grupo de las matrices 2×2 de determinante igual a 1 y con coeficientes en $\mathbb{C}$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, nos será de especial interés gracias a su relación con el grupo propio de

Lorentz $L_+^\uparrow$. Mediante la expresión (2.16) se puede demostrar que el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ está formada por el conjunto de las matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{C}$ de traza igual a cero.
Por lo tanto, las seis matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ iH,\ iX_+,\ iX_- \tag{3.15}$$

forman una base sobre $\mathbb{R}$ de este álgebra de Lie.

Proposición 3.2 *El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es isomorfa a la complexificación de $\mathfrak{su}(2)$.*

Acabamos de encontrar una base sobre $\mathbb{R}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Consideremos la siguiente base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, obtenida simplemente de hacer un cambio de base:

$$iH, \quad H, \quad X_+ - X_-, \quad iX_+ - iX_-, \quad X_+ + X_-, \quad iX_+ + iX_-. \tag{3.16}$$

Estas seis matrices son exactamente las mismas que las matrices

$$2\eta_3, \quad -2i\eta_3, \quad -2\eta_2, \quad -2i\eta_2, \quad -2i\eta_1, \quad 2\eta_1, \tag{3.17}$$

respectivamente, con η_1, η_2, η_3 definidas en (2.27).

□

En consecuencia, con la ayuda de la proposición 2.1 vemos que las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ son las mismas que las de $\mathfrak{su}(2)$.

3.3. El recubrimiento de $\mathrm{SO}^+(1,3)$ por $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Proposición 3.3 *Se cumple la siguiente sucesión exacta:*

$$1 \to (\pm E) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow \to 1. \tag{3.18}$$

Demostración: Daremos solamente una idea de la demostración. Consideremos el conjunto de las matrices 2×2 antihermitianas, es decir, que cumplen $X = -\overline{X}^T$, al que denotaremos por $\mathcal{S}$. Todo elemento de este conjunto puede ser escrito de forma única mediante la expresión

$$X = \begin{pmatrix} i(x_0 - x_1) & ix_2 - x_3 \\ ix_2 + x_3 & i(x_0 + x_1) \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le 3. \tag{3.19}$$

Sea ahora $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f:\ &\mathcal{S} \to \mathcal{S}, \\ &X \mapsto AX\overline{A}^T, \end{aligned}$$

que está bien definida, ya que

$$\overline{f(X)}^T = -AX\overline{A}^T. \tag{3.20}$$

También podemos expresar $Y := f(X)$ de una manera similar:

$$Y = \begin{pmatrix} i(y_0 - y_1) & iy_2 - y_3 \\ iy_2 + y_3 & i(y_0 + y_1) \end{pmatrix},\ y_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le 3. \tag{3.21}$$

Como el determinante de A es 1, el determinante de Y será el mismo que el de X, que es $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Podemos escribir y_0, y_1, y_2, y_3 como combinación lineal de x_0, x_1, x_2, x_3,

$$y_i = \sum_{k=1}^{4} R(A)_{ik} x_k, \quad 0 \le i \le 3. \tag{3.22}$$

Consideremos la aplicación $R : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$, definida por la ecuación anterior. La imagen de esta aplicación tiene que pertenecer a la componente conexa del elemento unidad del grupo de Lorentz, es decir, a L_+^+, por ser continua y por dejar la forma cuadrática $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ invariante. Es decir, que R es una aplicación que va de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ a L_+^+, que son los dos grupos que nos interesan.
El núcleo de esta aplicación R, que va de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ a L_+^+, es $(\pm E)$, y encontrando una parametrización del grupo L_+^+ se puede comprobar que R es un epimorfismo de grupos.

□

Proposición 3.4 *Las álgebras de Lie* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *y* $\mathfrak{so}(1,3)$ *son isomorfas.*

Demostración: Ya hemos encontrado tanto una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ como de $\mathfrak{so}(1,3)$. Sin embargo, se puede comprobar que las reglas de conmutación de las matrices que forman la base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ no coinciden con las que hemos visto que cumplen las matrices $B_{01}, B_{02}, B_{03}, B_{12}, B_{13}, B_{23}$. Nos bastará con hacer un cambio de base para encontrar matrices que cumplan dichas reglas de conmutación. Las matrices

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix},\ ib_1,\ ib_2,\ ib_3 \tag{3.23}$$

también forman una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, y se puede comprobar que cumplen las mismas reglas de conmutación que las matrices $B_{01}, B_{02}, B_{03}, B_{12}, -B_{13}, B_{23}$. Es decir, que existe un isomorfismo $f: \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}(1,3)$ tal que $f(b_k) = B_{0k}$, con $k = 1,2,3$, $f(ib_1) = B_{12}$, $f(ib_2) = B_{13}$ y $f(ib_3) = B_{23}$.

□

3.4. Representaciones irreducibles del grupo propio de Lorentz

Proposición 3.5 *Toda representación de $\mathfrak{so}(4)$ es isomorfa a una representación de $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$.*

Demostración: Sea $\mathbf{T}: \mathfrak{so}(4) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ una representación compleja de $\mathfrak{so}(4)$. Definamos las matrices

$$\begin{aligned} M_1^+ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(A_{23}) + \mathbf{T}(A_{01})\right), \quad M_1^- = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(A_{23}) - \mathbf{T}(A_{01})\right), \\ M_2^+ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(-A_{13}) + \mathbf{T}(A_{02})\right), \quad M_2^- = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(-A_{13}) - \mathbf{T}(A_{02})\right), \\ M_3^+ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(A_{12}) + \mathbf{T}(A_{03})\right), \quad M_3^- = \frac{1}{2}\left(\mathbf{T}(A_{12}) - \mathbf{T}(A_{03})\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Estas matrices, pertenecientes a la imagen de la representación $\mathbf{T}$, cumplen las reglas de conmutación

$$[M_i^\alpha, M_j^\beta] = \sum_{k=1}^{3} M_k^\alpha \epsilon_{ijk}\delta_{\alpha\beta}, \tag{3.25}$$

donde $\{\alpha,\beta\} = \{+,-\}$ y $\delta_{\alpha,\beta}$ es la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{++} = \delta_{--} = 1$ y $\delta_{+-} = \delta_{-+} = 0$.
Esto significa que las matrices M^+ por una parte y las M^- por la otra cumplen las mismas reglas de conmutación que las tres matrices de la base del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Además, como todas las M^+ conmutan con todas las M^-, existe una base en la que las podemos expresar de la siguiente manera:

$$M_i^+ = \mathbf{T}^j(I_i) \otimes E_{2j'+1}, \quad M_i^- = E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_i), \tag{3.26}$$

donde $\mathbf{T}^j$ y $\mathbf{T}^{j'}$ son dos representaciones irreducibles de $\mathfrak{so}(3)$ de pesos j y j' respectivamente. Gracias a la proposición 1.5 deducimos que la representación $\mathbf{T}^j \otimes \mathbf{T}^{j'} : \mathfrak{so}(4) \to \mathrm{GL}\left((2j+1)(2j'+1), \mathbb{C}\right)$ es una representación irreducible de $\mathfrak{so}(4)$.

□

Por lo tanto, toda representación irreducible de $\mathfrak{so}(4)$ estará caracterizada por dos enteros o semienteros j, j'. Llamaremos $\mathbf{T}^{(j,j')}$ a la representación $\mathbf{T}^j \otimes \mathbf{T}^{j'}$ caracterizada por j y j'.
Supongamos ahora dada una representación $\mathbf{T}^{(j,j')}$ de $\mathfrak{so}(4)$. Entonces tendremos que las matrices de la base de $\mathfrak{so}(4)$ vendrán representadas como

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{01}) &= \mathbf{T}^j(I_1) \otimes E_{2j'+1} - E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_1),\\
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{02}) &= \mathbf{T}^j(I_2) \otimes E_{2j'+1} - E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_2),\\
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{03}) &= \mathbf{T}^j(I_3) \otimes E_{2j'+1} - E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_3),\\
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{12}) &= \mathbf{T}^j(I_3) \otimes E_{2j'+1} + E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_3),\\
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{13}) &= -\mathbf{T}^j(I_2) \otimes E_{2j'+1} - E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_2),\\
\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{23}) &= \mathbf{T}^j(I_1) \otimes E_{2j'+1} + E_{2j+1} \otimes \mathbf{T}^{j'}(I_1).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Gracias a la relación que hemos encontrado en el apartado anterior entre las reglas de conmutación de las matrices A y las de las matrices B, podemos deducir que $\mathbf{T}^{(j,j')}$ también es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$. Las imágenes de las matrices de la base de $\mathfrak{so}(1,3)$ que hemos dado antes serán entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}^{(j,j')}(B_{01}) = i\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{01}),\ \mathbf{T}^{(j,j')}(B_{02}) = i\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{02}),\ \mathbf{T}^{(j,j')}(B_{03}) = i\mathbf{T}^{(j,j')}(A_{03})\\
&\mathbf{T}^{(j,j')}(B_{12}) = \mathbf{T}^{(j,j')}(A_{12}),\ \mathbf{T}^{(j,j')}(B_{13}) = \mathbf{T}^{(j,j')}(A_{13}),\ \mathbf{T}^{(j,j')}(B_{23}) = \mathbf{T}^{(j,j')}(A_{23}).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.4.1. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ como recubrimiento universal de $\mathrm{SO}^+(1,3)$

Proposición 3.6 (cf.[6]) *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea $A \subset \mathfrak{g}$ un entorno del 0. Entonces, la aplicación* $\exp : A \to \exp(A)$ *es un difeomorfismo que va de A a un entorno del elemento unidad $E \in G$.*

Proposición 3.7 (cf.[6]) *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El subgrupo de G generado por* $\exp \mathfrak{g}$ *es la componente conexa de la identidad de G. En particular, si G es conexo, cada elemento de G es producto de un número finito de exponenciales.*

Definición 3.5 *Una subálgebra de Lie $\mathfrak{g}'$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice que es un* **ideal** *si $[a,b] \in \mathfrak{g}'$ para todo $a \in \mathfrak{g}'$ y $b \in \mathfrak{g}$.*

Definición 3.6 *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g} \neq 0$ se dice que es* **simple** *si no es abeliana y no contiene ningún ideal no trivial.*

Definición 3.7 *Un álgebra de Lie se dice* **semisimple** *si no contiene una subálgebra abeliana invariante. Un grupo de Lie se dice semisimple si y solo si su álgebra de Lie real es semismple.*

De estas dos últimas definiciones se deduce que si un álgebra de Lie es simple, entonces también es semisimple.

Teorema 3.1 (Criterio de Cartan) (cf.[8]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sea también $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de la misma. Definamos las constantes de estructura de este álgebra c_{ij}^l como*

$$[a_i, a_j] = \sum_{l=1}^{n} c_{ij}^l a_l. \tag{3.29}$$

Entonces, $\mathfrak{g}$ es semisimple si y solo si $\det(F) \neq 0$, donde F es la matriz de componentes $F_{ik} = \sum_{l,j=1}^{n} c_{ij}^l c_{kl}^j = F_{ki}$.

En el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, por ejemplo, si cogemos como base la dada en (3.15), obtenemos que la matriz F es

$$F = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

cuyo determinante es claramente no nulo, por lo que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es semisimple.

Teorema 3.2 (cf.[4]) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real semisimple. Entonces, existe un único (salvo isomorfismo) grupo de Lie lineal semisimple y conexo G que satisface las tres propiedades siguientes:*

(a) El álgebra de Lie real de G es isomorfa a $\mathfrak{g}$.

(b) Cada grupo de Lie lineal semisimple y conexo cuyo álgebra de Lie sea isomorfa a $\mathfrak{g}$ es isomorfa a G/K, donde K es un subgrupo finito y normal del centro de G.

(c) Cada representación de $\mathfrak{g}$ proporciona, mediante su exponenciación, una representación de G.

En el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, el grupo descrito por el teorema anterior resulta ser $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. En lo que sigue se dan argumentos en favor de ello.

Definición 3.8 *Un espacio topológico X se dice* **simplemente conexo** *si es arco conexo y su grupo fundamental es la identidad.*

Definición 3.9 *Sea X un espacio topológico. Un* **recubrimiento** *de X es un par $(\tilde{X}, p)$, con $\tilde{X}$ un espacio topológico y $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación continua, tal que se cumple que para todo $x \in X$ existe un entorno U de x tal que la imagen de cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ por p está contenida en U.*

Definición 3.10 *Sea X un espacio topológico. Un recubrimiento $(\tilde{X}, p)$ de X se dice que es un recubrimiento* **universal** *si $\tilde{X}$ es simplemente conexo.*

Los recubrimientos universales de un espacio topológico X tienen la propiedad de ser únicos salvo isomorfismo. Además si $(\tilde{X}', p')$ es otro recubrimiento de X, entonces, existe una aplicación φ tal que $(\tilde{X}, p)$ es un recubrimiento de $\tilde{X}'$.

Ya hemos dicho anteriormente que los grupos de Lie pueden ser vistos como espacios topológicos. Utilizando argumentos topológicos, vamos a ver que el grupo de Lie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo, para poder encontrar como consecuencia de ello representaciones de este grupo.

Lema 3.1 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *es simplemente conexo.*

Demostración: Sea $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ y definamos las dos matrices $H := (g^* g)^{\frac{1}{2}}$ y $U := (g^* g)^{-\frac{1}{2}} g$, de manera que $g = HU$. Se puede comprobar (cf.[12]) que U es una matriz unitaria y H es una matriz tal que se puede escribir en la forma $H = \exp(kh)$, con $k \in \mathbb{R}$ y h una matriz hermitiana de traza nula, por lo que nos queda la expresión

$$g = \exp(h)\, U. \tag{3.31}$$

Si expresamos las matrices U y h en función de parámetros reales, obtenemos

$$U = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

con $d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1$, y

$$h = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

sin que los parámetros a, b y c tengan restricción alguna. Es decir, que el conjunto de matrices 2×2 hermitianas de traza nula es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ y el conjunto de matrices 2×2 unitarias es isomorfo a S^3. Por lo tanto se cumple que

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^3 \times S^3. \tag{3.34}$$

Como tanto $\mathbb{R}^3$ como S^3 son simplemente conexos, deducimos que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ también lo es. $\square$

Como $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es simplemente conexo, y como se cumple (3.18), deducimos que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es el recubrimiento universal de $L_+^\uparrow$. Además, también se deduce que el grupo fundamental de $L_+^\uparrow$ es isomorfo al grupo cíclico de orden 2.

3.4.2. Las representaciones irreducibles de $\mathrm{SO}^+(1,3)$ a partir de las de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Teorema 3.3 (cf.[9]) *Sean G, H dos grupos de Lie, con G simplemente conexo. Entonces, para todo homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ existe un homomorfismo de grupos de Lie $f : G \to H$ tal que $df = \varphi$.*

En particular, si consideramos que $\varphi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ es una representación de álgebras de Lie de dimensión finita, entonces sabemos que existe un homomorfismo $f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, o lo que es lo mismo, una representación de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{d}f = \varphi$. De hecho, se puede ver (cf.[9]) que se cumple $f\left(\exp(X)\right) = \exp\left(\varphi(X)\right)$ para todo $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Es decir, que a partir de una representación de dimensión finita cualquiera de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hemos encontrado, simplemente exponenciándola, una representación de la misma dimensión de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.
En consecuencia, deducimos que exponenciado la representación $\mathbf{T}^{(j,j')}$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ obtenemos una representación irreducible del grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, que denotaremos por $\mathbf{D}^{(j,j')}$. Es decir, que si consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, el grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es el único grupo que cumple las condiciones dadas por el teorema 3.2. De estas representaciones, solo algunas de ellas serán también representaciones del grupo propio de Lorentz. Para ver cuáles lo son, nos ayudaremos del siguiente teorema.

Teorema 3.4 *Las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo propio de Lorentz son las representaciones $\mathbf{D}^{(j,j')}$ tales que $j + j' \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Debido a la proposición (3.3), lo único que tenemos que comprobar es que $\mathbf{D}^{(j,j')}(-E) = E$ si y solo si $j + j' \in \mathbb{N}$.
Sea V el espacio vectorial de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$ de los polinomios que tienen z y $\overline{z}$ como variables, con $z \in \mathbb{C}$, y de orden $2j$ en la primera variable y $2j'$ en la segunda. Sea también

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

una matriz perteneciente a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Se puede comprobar (cf.[8]) que la expresión

$$\left(\mathbf{T}(A)f\right)(z,\overline{z}) = (bz+d)^{2j}\left(\overline{bz+d}\right)^{2j'} f\left(\frac{az+c}{bz+d}, \frac{\overline{a}\overline{z}+\overline{c}}{\overline{b}\overline{z}+\overline{d}}\right) \tag{3.36}$$

define una representación de dimensión $(2j+1)(2j'+1)$ en el espacio de representación V equivalente a la representación $\mathbf{D}^{(j,j')}$. Es inmediato comprobar que si evaluamos esta representación $\mathbf{T}$ en $-E$, obtenemos

$$(\mathbf{T}(-E)f)(z,\overline{z}) = (-1)^{2j}\cdot(-1)^{2j'}f(z,\overline{z}) = (-1)^{2(j+j')}f(z,\overline{z}), \tag{3.37}$$

por lo que la imagen de la matriz $-E$ será E si y solo si $j+j'\in\mathbb{N}$, que es lo que queríamos demostrar.

□

3.5. Representaciones del grupo de Lorentz

En las secciones previas hemos conseguido encontrar las representaciones irreducibles de la componente conexa de la unidad del grupo de Lorentz, lo que nos ayudará a describir las aplicaciones que se estudiarán en el capítulo siguiente. Aunque no se vaya a utilizar en este trabajo, también es posible e interesante encontrar las representaciones del grupo de Lorentz, y en esta sección daremos una idea de cómo hacerlo. Para ello nos tendremos que ayudar de los elementos de L

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

conocidos como matriz de inversión espacial, inversión temporal e inversión total, respectivamente.

Lema 3.2 *Se cumplen las igualdades*

$$L_-^+ = \Pi L_-^+, \quad L_+^- = \Pi\tau L_+^+, \quad L_-^- = \tau L_+^+. \tag{3.39}$$

Demostración: Demostraremos solamente la primera igualdad. Las otras dos se demuestran de manera muy similar.
Sea $\Lambda\in L_+^+$. Entonces, $\det(\Pi\Lambda)=\det(\Pi)=-1$. Además, $(\Pi\Lambda)_{00}=\Lambda_{00}\geq 1$, por lo que $\Pi\Lambda\in L_-^+$, y $\Pi L_+^+\subseteq L_-^+$. Supongamos ahora que $\Lambda\in L_-^+$. Está claro que $\Pi\Lambda=\Lambda'\in L_+^+$. Utilizando ahora que $\Pi^2=E$, obtenemos que $\Lambda=\Pi\Lambda'$, por lo que ya tenemos la otra inclusión que buscábamos, $L_-^+\subseteq\Pi L_+^+$. Consecuentemente, la igualdad queda demostrada. □

Ahora que ya hemos encontrado las representaciones irreducibles del grupo propio Lorentz, podemos ayudarnos de ellas y de las relaciones que acabamos de describir entre las commponentes conexas del grupo de Lorentz para encontrar todas las representaciones irreducibles de L.
Sea $\mathbf{T}^{(j,j')}$ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$. De la misma manera en que antes hemos encontrado las matrices definidas en (2.33), podemos encontrar ahora una base del espacio de representación, $\{u_{m,m'}\} := \{u_m \otimes u_{m'}\}$, con $-j \leq m \leq j$ y $-j' \leq m' \leq j'$, y seis matrices pertenecientes a la imagen de la representación, a las que llamaremos $H_3, H_+, H_-, H'_3, H'_+, H'_-$ tales que se cumpla

$$\begin{aligned} H_{\pm}u_{m,m'} &= \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}u_{m+1,m'}, \\ H_3 u_{m,m'} &= m u_{m,m'}, \\ H'_{\pm}u_{m,m'} &= \sqrt{j'(j'+1)-m'(m\pm 1)}u_{m+1,m'}, \\ H'_3 u_{m,m'} &= m' u_{m,m'}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Proposición 3.8 *Los vectores $u_{m,m'}$, $\tau u_{m,m'}$, con $j \leq m \leq j$ y $-j' \leq m' \leq j'$, generan un espacio vectorial que queda invariante bajo la acción de cualquier elemento de L.*

Demostración: Se puede demostrar (cf.[5]) que los vectores $\delta\tau u_{m,m'}$, con $\delta = (-1)^{j+j'-m-m'}$ se comportan exactamente de la misma manera que los vectores $u_{m,m'}$ bajo la acción de las seis matrices H, y lo mismo pasa con Π Además, como $\Pi\tau$ conmuta con todo transformación de Lorentz, por el primer lema de Schur, y por el hecho de que $(\Pi\tau)^2 = E$, tenemos que $\Pi\tau$ solo puede ser representada por la matriz identidad o por menos la identidad. Por lo tanto, $\Pi u_{m,m'} = \tau(\Pi\tau)u_{m,m'} = \pm\tau u_{m,m'}$. Teniendo en cuenta el lema 3.2 vemos que la proposición queda demostrada.

□

A partir de ahora construiremos las representaciones del grupo de Lorentz a partir de una cierta representación $\mathbf{T}^{(j,j')}$ del grupo propio de Lorentz, diferenciando dos casos distintos.

(a) $j = j'$:

Los vectores $U_{m,m'} := u_{m,m'} + \delta\tau u_{-m',-m}$ por una parte, y los vectores $V_{m,m'} := u_{m,m'} - \delta\tau u_{-m',-m}$ por otra, con $j \leq m \leq j$ y $-j' \leq m' \leq j'$, que cumplen $\tau U_{m,m'} = \delta U_{-m',-m}$ y $\tau V_{m,m'} = -\delta V_{-m',-m}$, generan dos espacios vectoriales diferentes, de dimensión $(2j+1)^2$ cada uno, que son espacios de representación de una representación de L. En cada uno de los casos existe la posibilidad de representar a $\Pi\tau$ por E o por $-E$. Por lo tanto, tendremos cuatro representaciones no equivalentes. Éstas vendrán dadas por

$$\mathbf{T}^{(j,j';r)}(\Pi) = \beta_s E', \quad \mathbf{T}^{(j,j';r)}(\tau) = \beta_t E', \quad \mathbf{T}^{(j,j';r)}(\Pi\tau) = \beta_s\beta_t E', \tag{3.41}$$

con E' la matriz antidiagonal cuyos elementos no nulos son todos 1, con $r = 1,2,3,4$ y con $\beta_s = 1$ para $r = 1,2$; $\beta_s = -1$ para $r = 3,4$; $\beta_t = 1$ para $r = 1,3$; $\beta_t = -1$ para $r = 2,4$. El resto de elementos vienen dados por la representación $\mathbf{T}^{(j,j')}$ de $L_+^\uparrow$ y utilizando el lema 3.2.

(b) $j \neq j'$ y $j + j' \in \mathbb{N}$:

En este caso, el espacio vectorial que queda invariante bajo L es el espacio de $2(2j+1)(2j'+1)$ dimensiones generado por los vectores $u_{m,m'}$ y $\tau u_{m,m'}$, con $j \leq m \leq j$ y $-j' \leq m' \leq j'$. Ahora solo tendremos dos representaciones partiendo de cada $\mathbf{T}^{(j,j')}$, diferenciadas otra vez por la imagen de $\Pi\tau$, mientras que τ estará siempre representado por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta el lema 3.2 ya podemos encontrar la imagen de todas las representaciones de L.

Capítulo 4

La ecuación de Dirac

En este último capítulo utilizaremos los resultados obtenidos sobre las representaciones del grupo propio de Lorentz en el capítulo anterior para analizar la ecuación de Dirac, cuya solución corresponde a una partícula de masa m_0, spin $\frac{1}{2}$ y que conserva la paridad. Las partículas de spin $\frac{1}{2}$ se denominan **leptones**. No existen muchas partículas con esta característica; de hecho, las únicas son el electrón, el muón, la partícula τ, los neutrinos y sus respectivas antipartículas.

4.1. Ecuaciones invariantes

Consideremos primero un sistema de ecuaciones diferenciales a primer orden que describe los estados de una partícula libre. En forma general, podemos suponer que este sistema de ecuaciones es de la forma

$$\left(L_0\frac{\partial}{\partial t} + L_1\frac{\partial}{\partial x} + L_2\frac{\partial}{\partial y} + L_3\frac{\partial}{\partial z} + i\chi\right)\psi(x) = 0, \tag{4.1}$$

donde ψ es una función de onda de, supongamos, n componentes, y L_0, L_1, L_2, L_3, χ son matrices $n \times n$ que supondremos constantes. También supondremos por simplicidad que el determinante de χ es no nulo. Es más, consideraremos que χ es un múltiplo de la matriz unidad, es decir, que la podemos tratar como si fuese simplemente un escalar. Nos interesa saber bajo qué condiciones esta ecuación es invariante respecto a las transformaciones de Lorentz.

Proposición 4.1 *La ecuación 4.1 es invariante bajo las transformaciones de Lorentz si y solo si las matrices L_0, L_1, L_2, L_3 cumplen la condición*

$$L_k = \sum_{i=0}^{3} \Lambda_{ki}\mathbf{D}(\Lambda)L_i\mathbf{D}(\Lambda)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{4.2}$$

donde Λ es un elemento de L_+^+ y $\mathbf{D}$ es una representación de este grupo.

Demostración: Sea X un punto del espacio tiempo y sea $X' := \Lambda X$, con $\Lambda \in L_+^+$ el mismo punto pero en otro sistema de referencia. La relación entre las funciones de onda es de la forma $\psi'(x') = \mathbf{D}(\Lambda)\psi(x)$, con $\mathbf{D} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Sea X'' el mismo punto del espacio tiempo pero en otro sistema de referencia, de manera que $X'' = \Lambda'' X$ y $X'' = \Lambda' X'$ y supongamos que la función de onda ψ tiene n componentes. Entonces se cumple que

$$\psi''(x)_i = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{D}(\Lambda')_{ij}\psi'_j(x') = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{D}(\Lambda')_{ij}\mathbf{D}(\Lambda)_{jk}\psi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{D}(\Lambda'')\psi_k(x), \tag{4.3}$$

con $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, que la aplicación $\mathbf{D} : L_+^+ \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo y, en consecuencia, una representación.
Escribamos ahora la ecuación (4.1) en las coordenadas primas. La función de onda $\psi(x)$ será $\mathbf{D}^{-1}(\Lambda)\psi'(x')$, y como se cumple que

$$x'_i = \sum_{k=0}^{3} \Lambda_{ik} x_k, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

tendremos que las derivadas parciales se escribirán

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{3} \Lambda_{ki} \frac{\partial}{\partial x'_k}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{4.5}$$

donde hemos utilizado que

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \sum_{k=0}^{3} \Lambda_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \Lambda_{ij}. \tag{4.6}$$

Si sustituimos estas expresiónes en la dada al principio del capítulo, obtenemos que en el nuevo sistema de referencia las ecuaciones vienen dadas por

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \left(L_i \mathbf{D}(\Lambda)^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_k} \Lambda_{ki} \right) + i\chi \mathbf{D}(\Lambda)^{-1}\psi' = 0. \tag{4.7}$$

Si tenemos en cuenta que χ lo podemos expresar como un múltiplo de la matriz unidad y multiplicamos por $\mathbf{D}(\Lambda)$ por la izquierda, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \left(\mathbf{D}(\Lambda) L_i \mathbf{D}(\Lambda)^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_k} \Lambda_{ki} \right) + i\chi\psi' = 0. \tag{4.8}$$

Esta ecuación será idéntica a (4.1) si y solo si las matrices L_i cumplen que

$$L_k = \sum_{i=0}^{3} \Lambda_{ki} \mathbf{D}(\Lambda) L_i \mathbf{D}(\Lambda)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{4.9}$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

4.2. La ecuación de Dirac

En la sección anterior hemos visto qué forma tiene que tomar un cierto tipo de ecuaciones diferenciales para que sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Aquí nos centraremos en un caso concreto, correspondiente a la representación no trivial más sencilla posible, conocido como la **ecuación de Dirac**. Esta representación resulta ser la representación cuadridimensional $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{D}^{(0,\frac{1}{2})}$, que es equivalente a la representación $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$. Por razones dimensionales, la función de onda ψ que se transforma según esta representación tendrá pues cuatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

A esta función de onda se la conoce como **biespinor de Dirac**.

Proposición 4.2 *Unas matrices que cumplen la condición de invariancia (4.2) para la representación* $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{D}^{(0,\frac{1}{2})}$ *son las siguientes:*

$$\begin{gathered} L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Demostración: Observemos primero de todo que la ecuación (4.2) también la podemos escribir como

$$\mathbf{D}^{-1}(\Lambda)L_k\mathbf{D}(\Lambda) = \sum_{i=0}^{3} \Lambda_{ki}L_i, \quad k = 0,1,2,3. \tag{4.12}$$

Comprobaremos simplemente que si utilizamos las matrices dadas en el enunciado de la proposición, esta ecuación se cumple para dos de los elementos pertenecientes a L_+^+, uno correspondiente a una rotación espacial y otro correspondiente a una rotación espacio-temporal. Comprobar que los otros elementos de L_+^+ también la cumplen se realiza de manera muy similar.

Empecemos con la rotación espacial. Consideremos el elemento B_{23} del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Para encontrar la representación $(\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(B_{23})$, encontremos primero cómo es la representación $\mathbf{T}^{\frac{1}{2}}(I_1)$. Utilizando la primera de las matrices de las iguadades (2.47) obtenemos que es

$$\mathbf{T}^{\frac{1}{2}}(I_1) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta las ecuaciones (3.28) y (3.27) y que la representación de peso 0 es igual a 1,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(B_{23}) &= (\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(A_{23}) = \\
&= \Big(\mathbf{T}^{\frac{1}{2}}(I_1) \otimes E_1 + E_2 \otimes \mathbf{T}^0(I_1)\Big) \oplus \Big(\mathbf{T}^0(I_1) \otimes E_2 + E_1 \otimes \mathbf{T}^{\frac{1}{2}}(I_1)\Big) = \\
&= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Hemos visto en el capítulo anterior que exponenciando una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ podemos obtener una representación de L_+^+. Por lo tanto, si exponenciamos la matriz que acabamos de encontrar, obtendremos un elemento de la imagen de la representación $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{D}^{(0,\frac{1}{2})}$ de L_+^+. Hagámoslo pues.

$$\exp\left((\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(B_{23})\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{(2t)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2t}\right] + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{(2t+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2t+1}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\right) + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{2}\right) =: D. \tag{4.15}$$

Comprobemos ahora que con esta matriz D que hemos obtenido se cumple la igualdad (4.12), con Λ una rotación espacial de L_+^+. Lo comprobaremos para $k = 3$, es decir, tendremos DL_3D^{-1} en la parte izquierda de la igualdad. Teniendo en cuenta que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ -i\sin\left(\frac{1}{2}\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{1}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & -i\sin\left(\frac{1}{2}\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

obtenemos que

$$D^{-1}L_3D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(1) & -i\sin(1) \\ 0 & 0 & i\sin(1) & -\cos(1) \\ -\cos(1) & i\sin(1) & 0 & 0 \\ -i\sin(1) & \cos(1) & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\sin(1)L_2 + \cos(1)L_3. \tag{4.17}$$

Por lo tanto, deducimos que el elemento $\Lambda \in L_+^+$ cuya imagen es D cumple que

$$\Lambda_{30} = 0, \quad \Lambda_{31} = 0, \quad \Lambda_{32} = -\sin(1), \quad \Lambda_{33} = \cos(1). \tag{4.18}$$

Podemos proceder de manera similar con las matrices L_0, L_1 y L_2, y acabamos obteniendo que también se cumplen igualdades del tipo (4.17) y que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) & -\sin(1) \\ 0 & 0 & \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \in L_+^+, \tag{4.19}$$

que es una rotación espacial.

Comprobemos ahora que con una rotación espacio-temporal sucede lo mismo. Partamos esta vez de $B_{01} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Si hacemos con B_{01} lo mismo que acabamos de hacer con B_{23} en (4.14), nos queda

$$(\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(B_{23}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Exponenciando,

$$\begin{aligned} \exp\left((\mathbf{T}^{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathbf{T}^{(0,\frac{1}{2})})(B_{01})\right) &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(2t)!} \frac{1}{2^{2t}}\right] &+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)!} \frac{1}{2^{2t+1}}\right] \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh\left(\frac{1}{2}\right) &+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sinh\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Si ahora llamamos a esta matriz D y calculamos, por ejemplo $D^{-1}L_0D$, obtenemos que esta expresión es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cosh(1) & -\sinh(1) \\ 0 & 0 & -\sinh(1) & \cosh(1) \\ \cosh(1) & \sinh(1) & 0 & 0 \\ \sinh(1) & \cosh(1) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cosh(1)L_0 + \sinh(1)L_1. \tag{4.22}$$

Prosiguiendo de la misma manera, acabamos obteniendo igualdades como esta última y que el elemento Λ es, en este caso,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) & 0 & 0 \\ \sinh(1) & \cosh(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^+, \tag{4.23}$$

que, como esperábamos, corresponde a una rotación espacio-temporal.

Como ya hemos dicho, se puede comprobar de manera similar a como lo acabamos de hacer con estos dos elementos que la igualdad (4.12) se cumple para todos los elementos relacionados con la base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ que habíamos encontrado en la sección 3.1.2.

$\square$

Cabe destacar que habitualmente la ecuación de Dirac también se escribe de una manera diferente. Si realizamos el cambio de base determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

la ecuación de Dirac toma la forma

$$\left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + i\chi \right) \psi(x) = 0, \tag{4.25}$$

con ψ una función de onda de cuatro componentes y las matrices γ_i definidas como

$$\begin{gathered} \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4.26}$$

y conocidas como las **matrices de Dirac**.

4.2.1. Soluciones de la ecuación de Dirac

Otra manera de escribir la ecuación de Dirac es

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\nabla} + \beta m_0\right)\psi, \tag{4.27}$$

donde

$$\overrightarrow{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{4.28}$$

y

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Aquí σ_x, σ_y y σ_z son las **matrices de Pauli**, definidas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Escribiremos además $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Como hemos comentado al inicio de este capítulo, si a χ le damos un valor m_0, la solución de la ecuación de Dirac corresponde a una partícula de masa m_0, spin[1] $\frac{1}{2}$ y que conserva la paridad. Esto no acaba de ser estrictamente cierto, ya que ψ es un vector de cuatro componentes, y cada componente en sí es la función de onda de una partícula. Veamos cómo es cada una de estas componentes.
Supongamos que esta función de onda solución de la ecuación de Dirac corresponde a una partícula libre y tiene la forma

$$\psi = \omega e^{-ipx}, \tag{4.31}$$

donde $p = (E, \overrightarrow{p})$ es el denominado cuadrimomento de la partícula en cuestión, E es su energía, $\overrightarrow{p}$ es su momento y ω es un vector real de cuatro componentes (spinor). Por conveniencia, expresemos ω como

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \rho \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

donde tanto ϕ como ρ son vectores de dos componentes.

[1] Que las soluciones de la ecuación de Dirac corresponden a partículas de spin $\frac{1}{2}$ se deduce del hecho que las matrices de Pauli describen el spin de partículas que tienen spin $\frac{1}{2}$.

Teniendo ahora en cuenta que el sistema de ecuaciones diferenciales definido por (4.27) es

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - m_0\psi_1 = -i\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_4}{\partial y}\right) \\ i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - m_0\psi_2 = -i\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_4}{\partial z}\right) \\ i\frac{\partial\psi_3}{\partial t} + m_0\psi_3 = -i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) \\ i\frac{\partial\psi_4}{\partial t} + m_0\psi_4 = -i\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{4.33}$$

y que

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = -iE\psi_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x} = -ip_x\psi_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial y} = -ip_y\psi_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial z} = -ip_z\psi_i, \tag{4.34}$$

es fácil ver que se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} (E - m_0)\phi &= \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{p}\rho \\ (E + m_0)\rho &= \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{p}\phi \end{aligned} \tag{4.35}$$

y que, en consecuencia, podemos expresar ρ como

$$\rho = \frac{\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{p}}{E + m}\phi. \tag{4.36}$$

Sustituyendo ahora esto en la primera igualdad de (4.35), y teniendo en cuenta que se cumple la igualdad

$$(\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{p})^2 = \begin{pmatrix} \overrightarrow{p}^2 & 0 \\ 0 & \overrightarrow{p}^2 \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

obtenemos

$$(E - m)(E + m)\phi = \overrightarrow{p}^2\phi. \tag{4.38}$$

Si aislamos la energía, nos queda la expresión

$$E = \pm\sqrt{\overrightarrow{p}^2 + m_0^2}, \tag{4.39}$$

es decir, que existen estados permitidos tanto de energía positiva como negativa. De hecho, a dos componentes de ψ les corresponde una solución con $E > 0$ y a las otras dos con $E < 0$. Por el principio de exclusión de Pauli, es imposible que dos **fermiones**[2] estén exactamente en el mismo estado, por lo que deducimos que las cuatro componentes de ψ corresponden a cuatro partículas de masa m_0 y

[2]Un fermión es una partícula de spin semientero.

(I) spin $\frac{1}{2}$, energía $E > 0$,

(II) spin $-\frac{1}{2}$, energía $E > 0$,

(III) spin $\frac{1}{2}$, energía $-E > 0$,

(IV) spin $-\frac{1}{2}$, energía $-E > 0$.

Sin embargo, tal y como están establecidas las leyes de la física, es imposible que exista una partícula con energía negativa. Pero una vez encontrada la ecuación de Dirac y sus soluciones, en 1928, era obvio que este tipo de soluciones para dos de las componentes de la ecuación de Dirac existían, solo que no se comprendía su sentido físico. Se predijo que estas ecuaciones podrían corresponder a una partícula aún no descubierta idéntica al electrón, pero con carga positiva en vez de negativa, de manera que estas ecuaciones de onda ya tendrían un sentido físico.
Poco después, en 1932, el físico Carl David Anderson observó por primera vez la antipartícula del electrón, denominada actualmente positrón, confirmando así la existencia de la antimateria.

Índice alfabético

Índice alfabético

Bibliografía

[1] Aitchinson, I.J.R., Hey, A.J.G.: *Gauge Theories in Particle Physics.* Adam Hilger LTD, Bristol, 1982, (pp. 3-15).

[2] Axler, S.: *Linear Algebra Done Right.* Springer-Verlag, 1996, (pp. 92-95).

[3] Cornwell, J. F.: *Group Theory in Physics (Volume 1).* Academic Press Limited, 1984, (pp. 44-67).

[4] Cornwell, J. F.: *Group Theory in Physics (Volume 2).* Academic Press Limited, 1984, (pp. 667-703).

[5] Heine, V.: *Irreducible Representations of the Full Lorentz Group.* Physical Review. Volume 107, Number 2. 1957.

[6] Kosmann-Schwarzbach, Y.: *Groups and Symmetries. From Finite Groups to Lie Groups.* Springer, 2010, (pp. 9-92).

[7] Massey, W.S.: *Algebraic Topology: An Introduction.* Springer-Verlag, 1967, (pp. 145-164).

[8] Miller, W.: *Symmetry Groups and Their Applications.* Academic Press, Inc, 1972, (pp. 61-320).

[9] Onishchik, A. L., Vinberg, E. B.: *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer-Verlag, 1988, (pp. 30-33).

[10] Onishchik, A. L., Vinberg, E. B.: *Lie Groups and Lie Algebras III.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 41. Springer-Verlag, 1990, (pp. 23-26).

[11] Pietráshen, M. I., Trífonov, Ie. D.: *Teoría de Grupos. Aplicación a la Mecánica Cuántica.* Editorial URSS, 2000, (pp. 26-62, 143-180, 297-318).

[12] Thaller, B.: The Dirac equation. Springer, 1992, (pp. 69-70).