Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

DELS REALS ALS HIPERREALS

Albert Villalgordo Núñez

Director: Josep Maria Font Llovet
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística. UB

Barcelona, 29 de gener de 2015

Agraïments

Voldria agrair a totes les persones que, amb la seva ajuda i col·laboració, han fet possible la realització d'aquest treball de fi de grau.

En primer lloc, a Josep Maria Font Llovet, tutor d'aquest projecte, pel seu consell, temps i dedicació durant el desenvolupament d'aquest treball.

Així com a Sonia Almero Molina i a Enric López Jara per la seva inestimable ajuda a l'hora de redactar la memòria.

Abstract

The purpose of this project is to present the definitions of sets of real and hyperreal numbers, highlighting some similarities and differences between the two cases.
Both cases are mathematical objects that appear intuitively since ancient times, but not fully formalised until many centuries later. In both cases, they have axiomatic definitions and several constructions. For real numbers, the axioms are strong enough to fully characterise the concept (all models are isomorphic), while in the case of hyperreal numbers, this is not so.
In the real numbers section, we will expose the axiomatic definition and observe the constructions made by Dedekind and Cantor. Proving that the fields that satisfy the axioms of real numbers are isomorphic.
On the other side, in the hyperreal numbers section, we will see the axiomatic definition and the ultrapower constructions. Finally, we will check that this construction satisfies the axiomatic definition.

Índex

Introducció

L‘objectiu d‘aquest treball és exposar les definicions dels conjunts dels nombres reals i dels nombres hiperreals, posant de manifest alguns paral·lelismes i algunes diferències entre els dos casos.

Tant els uns com els altres són objectes matemàtics que apareixen de manera intuïtiva o implícita de d‘èpoques molt antigues, però que no es formalitzen completament fins molt segles després. També en els dos casos, es tenen definicions axiomàtiques i vàries construccions. Mentre que en el cas dels nombres reals els axiomes són prou forts com per caracteritzar completament el concepte (tots els models són isomorfos), en el cas dels hiperreals això no és així, ja que pel teorema de Löwenheim-Skolem per força hi ha d‘haver models no isomorfs del conjunt dels hiperreals.

Els nombres reals tenen el seu origen a la Grècia antiga. Tot i que els matemàtics grecs utilitzaven els nombres naturals, van intuir els nombres reals. Per exemple, els pitagòrics van veure l‘existència de magnituds “irracionals” a l‘hora de mesurar la longitud de la diagonal d‘un triangle rectangle.
En el llibre X de *Els elements*, es defineixen magnituds commensurables com *aquelles que es mesuren amb la mateixa mesura*, i incommensurables *aquelles de les quals no és possible trobar una mesura comuna.* Euclides va demostrar que els segments de longitud $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \cdots, \sqrt{17}$ són incommensurables amb el segment de longitud 1. El que no van fer els grecs és assignar un nombre a aquestes “magnituds”.

No va ser fins a finals segle XIX quan es van definir amb rigor els nombres reals. L‘any 1872 es van publicar dues construccions del conjunt dels nombres reals: Georg Cantor a partir de successions de Cauchy de nombres racionals i Richard Dedekind a partir de talladures.

La idea de Cantor va ser definir una relació d‘equivalència entre dues successions de Cauchy. És a dir, dues successions eren equivalents si la seva diferència tendia a zero.

El conjunt quocient de les successions de Cauchy amb aquesta relació se li diu R i la va dotar d'una relació d'ordre. Finalment, va demostrar que R és un cos ordenat, arquimedià i complet per sucessions.
Dedekind, en canvi, va definir R com el conjunt de totes les talladures racionals i va demostrar que R és un cos ordenat i que satisfà l'axioma del suprem.

Finalment, l'any 1900, David Hilbert va formalitzar els nombres reals a partir de divuit axiomes. Setze d'aquests axiomes defineixen què és un cos ordenat, i els altres dos són la propietat arquimediana i ser complet per successions.

Tant l'axiomàtica dels nombres reals, com les construccions de Cantor i de Dedekind, les veurem amb detall a les seccions 1.1, 1.2 i 1.3 respectivament. També demostrarem que tant la caracterització del cos dels nombres reals que va utilitzar Cantor com la que va utilitzar Dedekind defineixen el mateix cos, $\mathbb{R}$. De fet, demostrarem que tots els cossos que compleixen els axiomes dels nombres reals són isomorfs (Teorema 1.2.20).

Tal com succeeix amb els nombres reals, la noció d'infinitesimal ja va ser intuïda a l'antiga Grècia. Tant Eudox com Arquimedes, mitjançant el mètode de l'esgotament per calcular àrees i longituds de corbes, ja utilitzaven implícitament aquest concepte.

Al segle XVII, Gottfried Leibniz i Isaac Newton van desenvolupar el càlcul infinitesimal. Va ser Leibniz qui va utilitzar variacions infinitament petites, formalitzant molts resultats sobre els infinitesimals, manipulant-los com si fossin nombres. Aquesta pràctica va continuar en els analistes dels segle XVIII, sobretot Euler.

No va ser fins l'any 1966, quan Abraham Robinson va publicar el seu llibre *Non-standard Analysis*, on es formalitza un sistema de nombres que contenen als infinitesimals i als nombres infinits. Emprant la teoria de models i la lògica formal, va desenvolupar la construcció dels nombres hiperreals per ultraproductes. Al càlcul realitzat amb nombres hiperreals també se l'anomena anàlisi no estàndard. El conjunt dels nombres hiperreals ${}^*\mathbb{R}$ és un cos ordenat no arquimedià i conté una còpia del conjunt dels nombres reals.

En les seccions 2.1 i 2.3 veurem la definició de ${}^*\mathbb{R}$ i la construcció per ultraproductes respectivament. A diferència dels nombres reals, aquí no es pot demostrar que totes les construccions són isomorfes, però això requereix teoremes sofisticats de teoria de models i està fora de l'abast d'aquest treball.

Capítol 1

Els nombres reals

1.1 Axiomàtica dels nombres reals

1.1.1 Definició

Un *anell* és un conjunt A amb dues operacions binàries, $+$ i $\cdot$, que anomenarem suma i producte respectivament, que compleixen les propietats següents:

(1) Propietat associativa de la suma:
Per tot $x, y, z \in A$ es compleix que $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(2) Propietat commutativa de la suma:
Per tot $x, y \in A$, es compleix que $x + y = y + x$.

(3) Existència d'element neutre de la suma:
Existeix un element d'A, al que anomenarem 0, tal que per tot $x \in A$ es compleix que $x + 0 = 0 + x = x$.

(4) Existència d'element oposat de la suma:
Per tot $x \in A$ existeix un element d'A, al que anomenarem $-x$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(5) Propietat associativa del producte:
Per tot $x, y, z \in A$ es compleix que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

(6) Propietat distributiva del producte respecte de la suma:
Per tot $x, y, z \in A$ es compleix que $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

1.1.2 Definició

Direm que un anell A és *commutatiu* si per tot $x, y \in A$ es compleix que $x \cdot y = y \cdot x$.

1.1.3 Definició

Direm que un anell A és un *anell amb unitat* si existeix un element d'A, al que anomenarem 1, tal que per tot $x \in A$ es compleix que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

1.1.4 Definició

Un *cos* és un anell commutatiu i amb unitat que compleix que, per tot $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, existeix un element de $\mathbb{K}$, al que anomenarem x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
És a dir, tot element no nul de $\mathbb{K}$ té invers pel producte.

1.1.5 Definició

Direm que un cos $\mathbb{K}$ és un *cos ordenat* si existeix una relació $< \subseteq \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ que compleix les propietats següents:

(i) Llei de tricotomia:
Per tot $x, y \in \mathbb{K}$, es compleix una, i només una, de les possibilitats següents:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x$$

(ii) Propietat transitiva:
Per tot $x, y, z \in \mathbb{K}$ tal que $x < y$ i $y < z$, es compleix que $x < z$.

(iii) Per tot $x, y, z \in \mathbb{K}$ tal que $x < y$, es compleix que $x + z < y + z$.

(iv) Per tot $x, y \in \mathbb{K}$ tal que $0 < x$ i $0 < y$, es compleix que $0 < x \cdot y$.

Direm que "x és menor que y" o que "x és més petit que y" si $x < y$. També escriurem $x \leq y$, "x és menor o igual que y" o "x és més petit o igual que y", per dir que es compleix $x < y$ o $x = y$. Sovint, escriurem $y > x$ i $y \geq x$, en comptes de $x < y$ i $x \geq y$, respectivament.
Si un conjunt A satisfà (i) i (ii) de la definició anterior, aleshores es diu que és un *conjunt totalment ordenat*.

1.1.6 Definició

Una *fita superior* d'un subconjunt A d'un conjunt ordenat K és un element $k \in K$ tal que per tot $x \in A$ es compleix que $x \leq k$.
Direm que un conjunt *està afitat superiorment* si té alguna fita superior.
El *suprem* d'un conjunt A, $\sup(A)$, és el mínim del conjunt de totes les fites superiors.
Una *fita inferior* d'un subconjunt A d'un conjunt ordenat K és un element $k \in K$ tal que per tot $x \in A$ es compleix que $x \geq k$.
Direm que un conjunt *està afitat inferiorment* si té alguna fita inferior.
L'*ínfim* d'un conjunt A, $\inf(A)$, és el màxim del conjunt de totes les fites inferior.
Direm que un conjunt A està *afitat* si està afitat inferiorment i superiorment.

1.1.7 Observació

Notem que un cos ordenat $\mathbb{K}$ qualsevol conté una còpia del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ja que $1 \in \mathbb{K}$ i la suma és una operació tancada.
Denotem $n := 1 + \overset{(n}{\cdots} + 1$. Així, $1 \in \mathbb{K}$, $1 + 1 = 2 \in \mathbb{K}$, $1 + 2 = 3 \in \mathbb{K}$, $\ldots$.

1.1.8 Observació

Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Com que $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, aleshores per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix que $-n \in \mathbb{K}$ (per l'existència de l'element oposat). Notem que $0 \in \mathbb{K}$ ja que 0 és l'element neutre de la suma. Per tant, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$.

1.1.9 Observació

Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat. Com que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$, aleshores per tot $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ es compleix que existeix $\frac{1}{m} \in \mathbb{K}$. Per tant, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z},\, m \neq 0 \right\} \subset \mathbb{K}$, on $\frac{n}{m}$ denota $n \cdot \frac{1}{m}$.
Aquesta immersió respecta el valor absolut, l'ordre i les operacions de $\mathbb{Q}$.

1.1.10 Definició

Direm que un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *arquimedià* si per tot $x, y \in \mathbb{K}$ amb $x > 0$ existeix un nombre natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Una definició equivalent és que per tot $z \in \mathbb{K}$ existeix un nombre natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > z$.

1.1.11 Observació

Notem que el cos ordenat $\mathbb{Q}$ és arquimedià:
Sigui $z \in \mathbb{Q}$ tal que $z > 0$ i $z \notin \mathbb{N}$. Per tant, existeixen $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \frac{n}{m}$. Si $n, m > 0$ aleshores $n > z$ i $n \in \mathbb{N}$. Si $n, m < 0$ aleshores $-n > z$ i $-n \in \mathbb{N}$.
Si $z \leq 0$ aleshores $1 > z$ i $1 \in \mathbb{N}$.

1.1.12 Definició

Una *successió* d'elements de $\mathbb{K}$, $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$, és una aplicació

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned}$$

1.1.13 Definició

Direm que una successió $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ és *creixent* si per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix que $a_{n+1} \geq a_n$. Direm que és *decreixent* si per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix que $a_{n+1} \leq a_n$.

1.1.14 Definició

El *valor absolut* d'un element x d'un cos ordenat $\mathbb{K}$ és $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

1.1.15 Proposició

Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i $x, y \in \mathbb{K}$. Aleshores es compleix que

(i) $|x| < y$ si, i només si, $-y < x < y$.

(ii) $|x - y| \leq |x| + |y|$.

1.1.16 Definició

Direm que una successió $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ *convergeix cap a* l o que *té per límit* l, amb $l \in \mathbb{K}$, si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un nombre natural n_0 tal que per tot $n \geq n_0$ es compleix que $|a_n - l| < \varepsilon$.

1.1.17 Definició

Direm que una successió *és de Cauchy* si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un nombre natural n_0 tal que per tots $n, m \geq n_0$ es compleix que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1.1.18 Proposició

Tota successió de Cauchy està afitada.

Demostració

Sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy. Aleshores, per tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per tot $n, m \geq n_0$.
La desigualtat $|a_n - a_m| < \varepsilon$ és equivalent a $a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$ per tot $n, m \geq n_0$. En particular, si $m = n_0$ obtenim que $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$ per tot $n \geq n_0$.
Aleshores, l'element $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + \varepsilon\}$ és una fita superior de tots els a_n i l'element $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - \varepsilon\}$ és una fita inferior de tots els a_n. Per tant, la successió $\{a_n\}$ està afitada.

1.1.19 Proposició

Tota successió convergent en un cos ordenat $\mathbb{K}$ és de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Demostració

Sigui una successió $\{a_n\}$ convergent cap a $l \in \mathbb{K}$. Aleshores, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_0$ es compleix que $|a_n - l| < \varepsilon$.
Siguin $n, m \geq n_0$, aleshores es compleix que

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Per tant, $\{a_n\}$ és de Cauchy.

1.1.20 Definició

Direm que un cos ordenat $\mathbb{K}$ *és complet per successions* si tota successió de Cauchy té límit.

1.1.21 Definició

Un *cos dels nombres reals* és un cos ordenat, arquimedià i complet per successions.

1.1.22 Definició

Direm que un cos ordenat $\mathbb{K}$ és *Dedekind-complet* si compleix l'axioma del suprem: Tot subconjunt no buit de $\mathbb{K}$ i afitat superiorment té suprem.

1.1.23 Proposició

Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i Dedekind-complet i sigui $\{a_n\}$ una successió d'elements de $\mathbb{K}$. Si $\{a_n\}$ és creixent i afitada superiorment, aleshores $\{a_n\}$ és convergent i $\lim\{a_n\} = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Anàlogament, si $\{a_n\}$ és decreixent i afitada inferiorment, aleshores $\{a_n\}$ és convergent i $\lim\{a_n\} = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Demostració

Sigui $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ una successió creixent i afitada superiorment. Aleshores, com que $\mathbb{K}$ és Dedekind-complet, existirà $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Per $\varepsilon > 0$, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_m$.
Aleshores, per tot $n \geq m$ es compleix que $\alpha < a_m \leq a_n \leq \alpha < \alpha - \varepsilon$ i, per tant, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.
Per demostrar el resultat per successions decreixents i afitades inferiorment, utilitzarem que la successió $\{-a_n\}$ és creixent i afitada superiorment.
En la secció 1.2, demostrarem que dos cossos de nombres reals són isomorfs. Així doncs, notarem $\mathbb{R}$ el cos dels nombres reals.
La demostració de l'existéncia del cos dels nombres reals la farem a les seccions 1.2 i 1.3, on farem la construcció de $\mathbb{R}$ a partir de les successions de Cauchy i de les talladures de Dedekind, respectivament.
A continuació, donem una caracterització alternativa del concepte de cos dels nombres reals.

1.1.24 Teorema

Un cos ordenat és Dedekind-complet si, i només si, és arquimedià i complet per successions.

Demostració

Anem a veure que si un cos ordenat $\mathbb{K}$ és Dedekind-complet aleshores és arquimedià i complet per successions:
Suposem que $\mathbb{K}$ no és arquimedià, és a dir, existeixen $x, y \in \mathbb{K}$ amb $x > 0$ tals que per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix $nx < y$.
Sigui $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. El conjunt A té y com a fita superior i, per tant, A té suprem, $\alpha = \sup(A)$. Per tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix que $nx = \underbrace{(n+1)x}_{\in A} - x \leq \alpha - x$. Aleshores, $\alpha - x$ és fita superior d'A i $\alpha - x < \alpha$ ja que $x > 0$. Per tant, α no és la mínima fita superior i això és una contradicció.

Sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy en $\mathbb{K}$. Aleshores, per la Proposició 1.1.18, $\{a_n\}$ està afitada superiorment. Com que en $\mathbb{K}$ es compleix l'axioma del suprem, per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix $b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.
La successió b_n formada per elements de $\mathbb{K}$ és decreixent ja que $\{a_k \mid k \geq n+1\} \subset \{a_k \mid k \geq n\}$. Notem que també està afitada inferiorment ja que per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix que $a_n \leq b_n$. Per la Proposició 1.1.23 , existeix $\beta = \lim\{b_n\}$.
Per tant, per $\varepsilon > 0$ existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_1$ es compleix $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy, existirà $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que per tots $n, m \geq n_2$ es compleix que $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Com que $b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$, aleshores existeix $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_3$ es compleix que $b_n - a_n \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Per tant, per tots $n, m \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ se satisfà que

$$|a_n - \beta| \leq |a_n - a_m| + |a_m - b_m| + |b_m - \beta| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

En conclusió, $\lim\{a_n\} = \beta$.

Ara, anem a demostrar que si un cos ordenat $\mathbb{K}$ és arquimedià i complet per successions, aleshores és Dedekind-complet:
Sigui $A \neq \emptyset$ un conjunt de $\mathbb{K}$ afitat superiorment. Sigui s aquesta fita superior.
Com que $\mathbb{K}$ és arquimedià, existeix $j \in \mathbb{N}$ tal que $s < j$. Per tant, j també és fita superior de A.
Sigui $a \in A$. Prenem $i \in \mathbb{Z}$ tal que $i < a$ (si $a > 0$, prenem $i = 0$ i si $a < 0$, com que $\mathbb{K}$ és arquimedià, existeix $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > -a$ i, aleshores $i = -k$).
Per a cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunt de nombres racionals amb denominador n entre i i j és finit i, per tant, hi ha almenys un que és fita superior d'A.
Sigui $\frac{m+1}{n}$ la més petita d'aquestes fites. Aleshores, definim la successió $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{m}{n}$.
Anem a veure que aquesta successió és de Cauchy:

Siguin $a_{n_1} = \frac{m_1}{n_1}$ i $a_{n_2} = \frac{m_2}{n_2}$. Es compleix que $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2+1}{n_2}$ i $\frac{m_2}{n_2} < \frac{m_1+1}{n_1}$, ja que $\frac{m_1+1}{n}$ i $\frac{m_2+1}{n_2}$ són fites superiors d'A i $\frac{m_1}{n_1}$ i $\frac{m_2}{n_2}$ no ho són.
Per tant, si $a_{n_1} \leq a_{n_2}$ es compleix que

$$0 \leq a_{n_2} - a_{n_1} = \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1+1}{n_1} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{n_1}.$$

Si $a_{n_2} \leq a_{n_1}$ es compleix que $0 \leq a_{n_1} - a_{n_2} < \frac{1}{n_2}$.
Com que $\mathbb{K}$ és arquimedià, per cada $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{K}$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Aleshores, per tots $n_1, n_2 \geq n_0$ es compleix que $\frac{1}{n_1} \leq \frac{1}{n_0}$ i $\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n_0}$ i, per tant, $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
En conclusió, la successió $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{K}$.
Com que $\mathbb{K}$ és complet per successions, existeix $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha = \lim \{a_n\}$.
Vegem que α és una fita superior d'A:
Suposem que existeix $b \in A$ tal que $b > \alpha$. Aleshores, $b - \alpha > 0$ i, com que $\mathbb{K}$ és arquimedià, existeix $n' \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{b-\alpha} < n'$. Per tant, $\alpha < b - \frac{1}{n'}$.
Com que $\lim \{a_n\} = \alpha$, existeix $n'' \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b - \frac{1}{n'}$ si $n \geq n''$.
Aleshores, si $n \geq \max \{n', n''\}$ es compleix que $a_n = \frac{m}{n} < b - \frac{1}{n'} < b - \frac{1}{n}$.
Per tant, $b > \frac{m+1}{n}$. Això és una contradicció ja que $\frac{m+1}{n}$ és fita superior d'A. Així doncs, α és fita superior d'A.
Falta veure que α és la mínima de les fites superiors:
Sigui $\beta < \alpha$. Com que $\alpha = \lim \{a_n\}$, existeixen termes de $\{a_n\}$ tals que $a_n > \beta$ i, com que cap a_n és fita superior de A, tampoc ho és β.
En conclusió, hem vist que $\alpha = \sup A$.

1.1.25 Observació

Utilitzant alguns resultats de la secció següent, podem veure que el cos dels racionals, $\mathbb{Q}$, no és complet per successions, ja que existeixen successions de Cauchy de nombres racionals que no tenen límit en $\mathbb{Q}$.
Per exemple, sigui $\{a_n\}$ la successió de Fibonacci definida per:

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ si } n \geq 2.$$

Sigui $\{q_n\}$ la successió definida per $q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Aquesta successió convergeix cap a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\mathbb{R}$ i, per tant, per la Proposició 1.1.19, és de Cauchy en $\mathbb{R}$. Per la Proposició 1.2.19, també és de Cauchy en $\mathbb{Q}$.
Si $\{q_n\}$ convergís en $\mathbb{Q}$ cap a un $r \in \mathbb{Q}$, per la Proposició 1.2.18, convergiria cap a r en $\mathbb{R}$ i per la unicitat del límit seria $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ però sabem que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Construcció de $\mathbb{R}$ per successions de Cauchy

En aquesta secció, demostrarem l'existència i la unicitat d'un cos ordenat, arquimedià i complet per successions. Ho farem seguint els passos del mètode de Cantor a partir de les successions de Cauchy de nombres racionals.

1.2.1 Definició

Donades dues successions de Cauchy $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, definim les operacions suma i producte com:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$
$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$$

1.2.2 Teorema

El conjunt de les successions de Cauchy de nombres racionals, amb les operacions suma i producte, té estructura d'anell commutatiu amb element unitat.

Demostració

Primer de tot, hem de veure veure que la suma i el producte de successions de Cauchy són operaciones internes. És a dir, que donades dues successions de Cauchy $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, aleshores $\{a_n + b_n\}$ i $\{a_n b_n\}$ també són de Cauchy.
Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dues successions de Cauchy. Aleshores per tot $\varepsilon > 0$, existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ talque:

$$|a_n - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ per tots } n, m \geq n_1.$$
$$|b_n - b_m| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ per tots } n, m \geq n_2.$$

Sigui $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$, aleshores per tots $n, m \geq n_0$ se satisfà que

$$|(a_n - b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i per tant, $\{a_n + b_n\}$ és de Cauchy.
Per provar que el producte de dues successions de Cauchy també ho és, utilitzarem que tota successió de Cauchy està afitada. Per tant, donades dues successions de Cauchy $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, existeixen $M_1, M_2 \in \mathbb{Q}$ tals que

$$|a_n| < M_1 \text{ i } |b_n| < M_2 \text{ per tot } n \in \mathbb{N}.$$

A més, per tot $\varepsilon > 0$ existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que

$$|a_n - a_m| < \tfrac{\varepsilon}{2M_1} \text{ per tots } n, m \geq n_1.$$
$$|b_n - b_m| < \tfrac{\varepsilon}{2M_2} \text{ per tots } n, m \geq n_2.$$

Sigui $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$, aleshores per tots $n, m \geq n_0$ es compleix que
$|a_n b_n - a_m b_m| = |(a_n - a_m)b_n + (b_n - b_m)a_m| \leq |a_n - a_m|\,|b_n| + |b_n - b_m|\,|a_m| < \frac{\varepsilon}{2M_1}M_1 + \frac{\varepsilon}{2M_2}M_2 = \varepsilon.$
Per tant, la successió $\{a_n b_n\}$ és de Cauchy.
La suma de successions de Cauchy és associativa i commutativa perquè també ho és la suma dels nombres racionals. És obvi que la successió constant $\{0\}$ és l'element neutre de la suma i l'element oposat de $\{a_n\}$ és la successió $\{-a_n\}$.
El producte de successions de Cauchy és associatiu i commutatiu, ja que el producte de nombres racionals també ho és, i satisfà la propietat distributiva respecte de la suma perquè també es compleix pels nombres racionals. L'element neutre del producte és la successió constant $\{1\}$.
Per tant, el conjunt de les successions de Cauchy és un anell commutatiu amb unitat.

1.2.3 Observació

Notem que el conjunt de les successions de Cauchy amb les operacions suma i producte no és un cos ja que, per exemple, la successió $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ no té invers (el candidat natural és la successió $\{n\}$ i no és de Cauchy).

1.2.4 Definició

Direm que una successió de Cauchy és *nul·la* si convergeix cap a 0.
Anomenarem S a l'anell de successions de Cauchy i N al conjunt de les successions de Cauchy nul·les.

1.2.5 Definició

Direm que una successió de Cauchy és *positiva* si existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n > \delta$ per tot $n \geq n_0$.
Direm que una successió de Cauchy és *negativa* si existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n < -\delta$ per tot $n \geq n_0$.

1.2.6 Proposició

Els conjunts de les successions de Cauchy positives S^+, negatives S^- i nul·les N formen una partició de S.

Demostració

Per demostrar que $S = S^+ \cup N \cup S^-$, veurem que si una successió de Cauchy no és ni positiva ni negativa, aleshores és nul·la.
Sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy, aleshores per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ es compleix que $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. A més, com que $\{a_n\}$ no és positiva, existirà $n_1 \geq n_0$ tal que $a_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Així doncs, per $n \geq n_0$, se safisfà que $a_n = a_n - a_{n_1} + a_{n_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Anàlogament, com que $\{a_n\}$ no és negativa, existirà $n_2 \geq n_0$ tal que $a_{n_2} > -\frac{\varepsilon}{2}$ i per tant, si $n \geq n_0$, es compleix que $a_n = a_n - a_{n_2} + a_{n_2} > -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$.
Aleshores, per tot $n \geq n_0$, es compleix que $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$, que és equivalent a $|a_n| < \varepsilon$. És a dir, $\{a_n\}$ és nul·la.

Falta veure que $S^+ \cap N = \emptyset$, $S^- \cap N = \emptyset$ i $S^+ \cap S^- = \emptyset$:

- Per veure que $S^+ \cap N = \emptyset$, suposem que existeix $\{a_n\} \in S^+ \cap N$.
  Com que $\{a_n\} \in S^+$, existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_+ \in \mathbb{N}$ tals que si $n \geq n_+$ es compleix que $a_n > \delta$.
  Com que $\{a_n\} \in N$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\delta}{2}$ si $n \geq n_1$.
  Sigui $n_0 = max\,\{n_+, n_1\}$. Aleshores, per tot $n \geq n_0$ es compleix que $\delta < a_n < \frac{\delta}{2}$. Això és una contradicció que prové de suposar que $S^+ \cap N \neq \emptyset$.

- Suposem, ara, que existeix $\{a_n\} \in S^- \cap N$.
  Com que $\{a_n\} \in S^-$, existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_- \in \mathbb{N}$ tals que si $n \geq n_-$ es compleix que $a_n < -\delta$.
  Com que $\{a_n\} \in N$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\delta}{2}$ si $n \geq n_1$.
  Sigui $n_0 = max\,\{n_-, n_1\}$. Aleshores, per tot $n \geq n_0$ es compleix que $-\frac{\delta}{2} < a_n < -\delta$. Això és una contradicció que prové de suposar que $S^- \cap N \neq \emptyset$.

- Per veure que $S^+ \cap S^-$, suposem, com abans, que existeix $\{a_n\} \in S^+ \cap S^-$.
  Com que $\{a_n\} \in S^+$, existeixen $\delta_+ > 0$, $\delta_+ \in \mathbb{Q}$ i $n_+ \in \mathbb{N}$ tals que $a_n > \delta_+$ si $n \geq n_+$.
  Com que $\{a_n\} \in S^-$, existeixen $\delta_- > 0$, $\delta_- \in \mathbb{Q}$ i $n_- \in \mathbb{N}$ tals que $a_n < -\delta_-$ si $n \geq n_-$.
  Sigui $n_0 = max\,\{n_+, n_-\}$. Aleshores, per $n \geq n_0$ se satisfà que $\delta_+ < a_n < -\delta_-$, que

és una contradicció i prové de suposar que $S^+ \cap S^- \neq \emptyset$.

Per tant, S^+, N i S^- formen una partició de S.

1.2.7 Teorema

El conjunt de les successions de Cauchy nul·les N és un ideal de l'anell de les successions de Cauchy S.

Demostració

Hem de veure que:

(i) Donades $\{a_n\}, \{b_n\} \in N$ es compleix que $\{a_n - b_n\} = \{a_n\} + (-\{b_n\}) \in N$.
Per tot $\varepsilon > 0$ existeixen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que

$$|a_n| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ per tot } n \geq n_1.$$
$$|b_n| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ per tot } n \geq n_2.$$

Sigui $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ aleshores per tot $n \geq n_0$ es compleix que

$$|a_n - b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Per tant, la successió $\{a_n - b_n\}$ és nul·la.

(ii) Donades $\{a_n\} \in N$ i $\{b_n\} \in S$ es compleix que $\{a_n\} \cdot \{b_n\} \in N$.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy aleshores està afitada. Per tant, existeix $M \in \mathbb{Q}$ tal que $|b_n| < M$ per tot $n \in \mathbb{N}$.
Com que $\{a_n\} \in N$ aleshores per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ per tot $n \geq n_0$.
Aleshores, per tot $n \geq n_0$ es compleix que $|a_n b_n| \leq |a_n| |b_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.
Per tant, la successió $\{a_n b_n\}$ és nul·la.

Així doncs, N és un ideal de S.

1.2.8 Definició

Definim en S la relació següent: siguin $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$, aleshores $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si, i només si, $\{a_n - b_n\} = \{a_n\} - \{b_n\} \in N$.

1.2.9 Observació

La relació $\sim$ és d'equivalència, ja que és la relació associada a tot ideal d'un anell commutatiu.

Anomenarem R al conjunt quocient $\frac{S}{N}$ i $\overline{\{a_n\}}$ a l'element de R format per totes les successions equivalents a la successió $\{a_n\}$.
Aquest conjunt, amb les operacions induïdes per les de S,

$$\overline{\{a_n\}} + \overline{\{c_n\}} = \overline{\{a_n + c_n\}}$$
$$\overline{\{a_n\}} \cdot \overline{\{c_n\}} = \overline{\{a_n \cdot c_n\}}$$

té estructura d'anell commutatiu amb element unitat $\overline{\{1\}}$.
Notem que el conjunt de les successions nul·les $N = \overline{\{0\}}$.

1.2.10 Teorema

L'anell R té estructura de cos.

Demostració

Hem de veure que tota classe $\overline{\{a_n\}}$ tal que $\overline{\{a_n\}} \neq \overline{\{0\}}$ té invers. Com que $\overline{\{a_n\}} \neq \overline{\{0\}}$ aleshores $\{a_n\}$ és una successió de Cauchy i no és nul·la. Per tant, existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tals que $|a_n| > \delta$ per tot $n \geq n_1$.
Ara, definim la successió $\{b_n\}$ tal que:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \leq n_1, n \neq 0 \\ a_n & \text{si } n > n_1 \end{cases}$$

Notem que $\{b_n\} \sim \{a_n\}$ i que $\{b_n\}$ no té cap terme igual a zero. Per tant, la successió $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ està ben definida i $\overline{\left\{\frac{1}{b_n}\right\}} \cdot \overline{\{a_n\}} \sim \overline{\{1\}}$. Només hem de veure que $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ és de Cauchy.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy aleshores per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que per tots $n, m \geq n_2$ es compleix que $|a_n - a_m| < \delta^2\varepsilon$. Sigui $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Per tots $n, m > n_0$ se satisfà que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_m}\right| = \frac{|b_m - b_n|}{|b_n b_m|} = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n a_m|} \leq \frac{|a_m - a_n|}{|a_n|\,|a_m|} < \frac{\delta^2\varepsilon}{\delta^2} = \varepsilon.$$

Per tant, $\overline{\left\{\frac{1}{b_n}\right\}}$ és l'invers de $\overline{\{a_n\}}$.

1.2.11 Definició

Direm que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}$ si $\{b_n - a_n\} \in S^+$.

1.2.12 Teorema

El cos R és un cos ordenat.

Demostració

Hem de veure que la relació definida satisfà la definició 1.1.5:

(i) Llei de tricotomia:
Donades $\overline{\{a_n\}}, \overline{\{b_n\}} \in R$, es compleix exactament una:

$$\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}, \qquad \overline{\{a_n\}} = \overline{\{b_n\}}, \qquad \overline{\{a_n\}} > \overline{\{b_n\}}$$

Això és equivalent a que la successió $\{b_n - a_n\}$ sigui positiva, negativa o nul·la i és cert ja que els conjunts d'aquestes successions formen una partició de S, segons la proposició 1.2.6.

(ii) Propietat transitiva:
Per cada $\overline{\{a_n\}}, \overline{\{b_n\}}, \overline{\{c_n\}} \in R$ tals que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}$ i $\overline{\{b_n\}} < \overline{\{c_n\}}$ es compleix que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{c_n\}}$.
Com que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}$ i $\overline{\{b_n\}} < \overline{\{c_n\}}$ aleshores $\{b_n - a_n\}, \{c_n - b_n\} \in S^+$.
Per tant, existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}$ i $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que $c_n - a_n = c_n - b_n + b_n - a_n > \delta_1 + \delta_2$ per tot $n \geq max\{n_1, n_2\}$. Així, doncs, hem vist que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{c_n\}}$.

(iii) Per tota $\overline{\{a_n\}}, \overline{\{b_n\}}, \overline{\{c_n\}} \in R$ tals que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}$, es compleix que $\overline{\{a_n\}} + \overline{\{c_n\}} < \overline{\{b_n\}} + \overline{\{c_n\}}$.
Hem de veure que $\{c_n + b_n - (c_n + a_n)\} \in S^+$.
Com que $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{b_n\}}$, aleshores $\{c_n + b_n - (c_n + a_n)\} = \{b_n - a_n\} \in S^+$.

(iv) Per tota $\overline{\{a_n\}}, \overline{\{b_n\}} \in R$ tals que $0 < \overline{\{a_n\}}$ i $0 < \overline{\{b_n\}}$, es compleix que $0 < \overline{\{a_n b_n\}}$.
Hem de veure que $\{a_n b_n\} \in S^+$.
Com que $\{a_n\}, \{b_n\} \in S^+$, existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}$ i $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tals que $a_n b_n > \delta_1 \delta_2$ per tot $n \geq max\{n_1, n_2\}$. Per tant, la successió $\{a_n b_n\}$ és positiva.

Hem demostrat que R és un cos ordenat.

1.2.13 Teorema

El cos ordenat R és arquimedià.

Demostració

Notem que, per l'observació 1.1.7, $\mathbb{N} \subset R$ ja que R és un cos ordenat, concretament n s'identifica amb $\overline{\{1\}} + \overset{(n}{\cdots} + \overline{\{1\}} = \overline{\{n\}}$.
Anem a veure que per tota $\overline{\{a_n\}} \in R$, existeix un nombre natural m més gran que $\overline{\{a_n\}}$.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy, aleshores està afitada i per tant, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < m$ per tot $n \in \mathbb{N}$. Aleshores, $\overline{\{a_n\}} < \overline{\{m\}} = m$.
Per tant, per tot element de R existeix un nombre natural més gran i R és arquimedià.

1.2.14 Proposició

Siguin $a, b \in R$ tal que $a < b$. Aleshores, existeix $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

Demostració

Com que $a < b$, aleshores $b - a > 0$.
Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dos representants de a i b respectivament. Aleshores $\{b_n - a_n\}$ és representant de $b - a$ i $\{b_n - a_n\}$ és una successió positiva. Per tant, existeixen $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{Q}$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tals que $b_n - a_n > \delta$ per tot $n \geq n_1$.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy, existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{\delta}{4}$ si $n, m \geq n_2$.
Com que $\{b_n\}$ és de Cauchy, existeix $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b_m| < \frac{\delta}{4}$ si $n, m \geq n_3$.
Sigui $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Definim la successió constant $\{q_n\}$ com $q_n = \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}$ per tot $n \in \mathbb{N}$. Aquest element $q := \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}$ és de R.
Vegem que $a < q < b$:
Per provar que $a < q$, basta veure que $\{q_n - a_n\}$ és positiva. En efecte,

$$\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} - a_n = \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} + a_{n_0} - a_{n_0} - a_n = \frac{b_{n_0}-a_{n_0}}{2} + a_{n_0} - a_n.$$

Per tant, per tot $n \geq n_0$, es compleix que

$$\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} - a_n \geq \frac{b_{n_0}-a_{n_0}}{2} - |a_n - a_{n_0}| > \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}.$$

Falta veure que $q < b$. És suficient veure que $\{b_n - q_n\}$ és positiva. En efecte,

$$b_n - \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} = b_n - b_{n_0} + b_{n_0} - \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} = b_n - b_{n_0} + \frac{b_{n_0}-a_{n_0}}{2}.$$

Per tant, per tot $n \geq n_0$, es compleix que

$$b_n - \frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2} \geq \frac{b_{n_0}-a_{n_0}}{2} - |b_n - b_{n_0}| > \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}.$$

1.2.15 Proposició

Sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Aleshores, $\{a_n\}$ és convergent en R i el seu límit és l'element $a \in R$, que té per representant la successió $\{a_n\}$.

Demostració

Volem veure que per tot $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ per tot $n \geq n_0$.
Prenem $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$. Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{Q}$, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \delta$ si $n, m \geq n_1$.
El nombre natural n_1 satisfà la primera condició:
Sigui $n \in \mathbb{N}$ fix tal que $n \geq n_1$. L'element $a_n - a$ de R té com a representant la successió

$$a_n - a_1,\, a_n - a_2,\, \cdots,\, a_n - a_m,\, \cdots$$

Per tot $m \geq n_1$ es compleix que $|a_n - a_m| < \delta$.
Com que l'element $a_n - a$ de R té com a representant la successió $\{a_n - a_m\}$, aleshores $|a_n - a| < \delta < \varepsilon$.

1.2.16 Teorema

El cos ordenat R és complet per successions.

Demostració

Sigui $\{a_n\}$ una successió de Cauchy en R.
Suposem que dos elements consecutius de la successió són diferents.
Si existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a_{n+1}$ per tot $n \geq n_0$, aleshores $\lim\{a_n\} = a_{n_0}$ i, R seria complet. Si no fos així, prenem una successió parcial tal que $a_n \neq a_{n+1}$ per tot $n \in \mathbb{N}$.
Aleshores, per la Proposició 1.2.14, existeix un element $b_n \in \mathbb{Q}$ tal que $a_n < b_n < a_{n+1}$ o $a_{n+1} < b_n < a_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$.
Vegem que la successió de racionals $\{b_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{Q}$:
Per tot $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, com que $\{a_n\}$ és de Cauchy en R, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$|a_n - a_m| < \varepsilon$ si $n, m \geq n_1$. Notem que ε s'identifica amb l'element corresponent en R.
Aleshores, $|b_n - b_m| < |a_N - a_M|$, on N és n o $n+1$ i M és m o $m+1$.
Per tant, $|b_n - b_m| < \varepsilon$ per tots $n, m \geq n_1$.
La successió $\{b_n\}$, que és de Cauchy en $\mathbb{Q}$, és representant d'un element $b \in R$. Vegem ara que $b = \lim \{a_n\}$.
Per tot $n \in \mathbb{N}$, es compleix que $|a_n - b| < |a_n - b_n| + |b_n - b|$.
Per la proposició 1.2.15, $\lim b_n = b$, per tant, per tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq n_2$.
Com que $\{a_n\}$ és de Cauchy, existeix $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b_n| < |a_n - a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq n_3$.
Per tant, $|a_n - b| \leq |a_n - b_n| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ si $n \geq \max\{n_2, n_3\}$.

Hem demostrat l'existència d'un cos ordenat, arquimedià i complet per successions. Aquest cos és el cos dels nombres reals $\mathbb{R}$. Només ens falta veure que aquest cos és únic. Però, abans de demostrar la unicitat, veurem tres resultats que necessitarem per fer la demostració.
Recordem que, per la proposió 1.1.9, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ i aquesta immersió respecta el valor absolut, l'ordre i les operacions de $\mathbb{Q}$.

1.2.17 Proposició

Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià. Aleshores, tot element $a \in \mathbb{K}$ és límit d'una successió de nombres racionals.

Demostració

Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià i $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha > 0$.
Considerem $\frac{1}{n} \in \mathbb{K}$. Com que $\mathbb{K}$ és arquimedià, existeix $m_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $m_\alpha \frac{1}{n} > \alpha$. Per tant, existirà $m_{n,\alpha} \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{m_{n,\alpha}}{n} < \alpha < \frac{m_{n,\alpha}+1}{n} < \ldots < \frac{m_\alpha}{n}.$$

Així, considerem la successió de nombres racionals $\{a_n\}$ definida com $a_n = \frac{m_{n,\alpha}}{n}$. Només ens falta veure que aquesta successió convergeix cap a α.
Per tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Aleshores es compleix que

$$|\alpha - a_n| < \tfrac{m_{n,\alpha}+1}{n} - \tfrac{m_{n,\alpha}}{n} = \tfrac{1}{n} < \varepsilon \text{ si } n \geq n_0.$$

Si $\alpha < 0$, hauríem de considerar la successió $\{a_n\}$ convergent a $-\alpha$ i, aleshores, la successió $\{-a_n\}$ seria convergent cap a α.

Si $\alpha = 0$ aleshores $0 = \lim \{0\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2.18 Proposició

Sigui $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià i sigui $l \in \mathbb{Q}$. Aleshores, tota successió de racionals $\{a_n\}$ convergeix cap a l en $\mathbb{Q}$ si, i només si, $\{a_n\}$ convergeix cap a l en $\mathbb{K}$.

Demostració

Donat $\varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$, com que $\mathbb{K}$ és arquimedià existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\varepsilon > 1$.
Sigui una successió de racionals $\{a_n\}$ convergent cap a $l \in \mathbb{Q}$. Aleshores, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per tot $n \geq n_0$ es compleix que $|a_n - l| < \frac{1}{m} < \varepsilon$.
Per tant, $\{a_n\}$ és convergent cap a l en $\mathbb{K}$.

1.2.19 Proposició

Siguin $\mathbb{K}$ un cos ordenat i arquimedià i $\{a_n\}$ una successió de nombres racionals. Aleshores, $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{Q}$ si, i només si, $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Demostració

Sigui $\varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$. Com que $\mathbb{K}$ és arquimedià aleshores existeix n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Si $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{Q}$ aleshores existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ per tot $n, m \geq n_1$. Per tant, $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{K}$.

1.2.20 Teorema

Dos cossos ordenats, arquimedians i complets per successions són isomorfs.

Demostració

Siguin R_1 i R_2 tals cossos.
Definim l'aplicació $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ de la forma següent:.
Sigui $\alpha \in R_1$. Aleshores, com que R_1 és arquimedià, per la proposició 1.2.17, existeix una successió de nombres racionals $\{a_n\}$ convergent cap a α. Com que aquesta successió és convergent en R_1 aleshores també és de Cauchy en R_1. Per la proposició 1.2.19, $\{a_n\}$ és de Cauchy en $\mathbb{Q}$ i també ho serà a R_2. Com que R_2 és complet per successions, aleshores

la successió $\{a_n\}$ té límit a R_2. Aquest límit serà $\beta = \varphi(\alpha)$.
Com que $\mathbb{Q}$ està inclòs en R_1 i en R_2 ja que són cossos ordenats, és fàcil veure que φ identifica un nombre racional p de R_1 amb ell mateix en R_2. Per tant, φ deixa invariants els nombres racionals.

Aquesta definició no depèn de la successió $\{a_n\}$ escollida. Sigui $\{b_n\}$ una altra successió convergent cap a α, aleshores la successió de nombres racionals $\{a_n - b_n\}$ convergeix cap a 0 en R_1. Com que és una successió de racionals i R_2 és arquimedià aleshores, per la proposició 1.2.18, també convergirà cap a 0 en R_2. Per tant, $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tenen el mateix límit en R_2, $\varphi(\alpha)$.
Ara, volem demostrar que per tot $\alpha_1, \alpha_2 \in R_1$, se satisfà que:

(i) $\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2)$.

(ii) $\varphi(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \varphi(\alpha_1) \cdot \varphi(\alpha_2)$.

(iii) $\alpha_1 < \alpha_2$ si, i només si, $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$.

Primer de tot, si $\{a_n\}$ és una successió de nombres racionals convergent en R_1, tenint en compte que φ respecta els racionals, resulta que $\varphi(\lim\limits_{R_1} a_n) = \lim\limits_{R_2} \varphi(a_n) = \lim\limits_{R_2} a_n$ Amb aquest fet i per les propietats de límit:

(i) Siguin dues successions de nombres racionals $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ que convergeixen cap a α_1 i α_2 en R_1 respectivament, aleshores:
$\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = \varphi(\lim\limits_{R_1} a_n + \lim\limits_{R_1} b_n) = \varphi(\lim\limits_{R_1}(a_n + b_n)) = \lim\limits_{R_2} \varphi(a_n + b_n) = \lim\limits_{R_2}(\varphi(a_n) + \varphi(b_n)) = \lim\limits_{R_2} \varphi(a_n) + \lim\limits_{R_2} \varphi(b_n) = \varphi(\lim\limits_{R_1} a_n) + \varphi(\lim\limits_{R_1} b_n) = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2)$.

(ii) Siguin dues successions de nombres racionals $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ que convergeixen cap a α_1 i α_2 en R_1 respectivament, aleshores:
$\varphi(\alpha_1\alpha_2) = \varphi(\lim\limits_{R_1} a_n \cdot \lim\limits_{R_1} b_n) = \varphi(\lim\limits_{R_1}(a_n b_n)) = \lim\limits_{R_2} \varphi(a_n b_n) = \lim\limits_{R_2}(\varphi(a_n)\varphi(b_n)) = \lim\limits_{R_2} \varphi(a_n) \cdot \lim\limits_{R_2} \varphi(b_n) = \varphi(\lim\limits_{R_1} a_n)\varphi(\lim\limits_{R_1} b_n) = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)$.

(iii) Ens basta veure que donat $\alpha \in R_1$, $\alpha > 0$ si, i només si, $\varphi(\alpha) > 0$.
Sigui $\alpha \in R_1$, aleshores, per la Proposició 1.2.17, existeix una successió de nombres racionals $\{a_n\}$ convergent cap a α.
Si $\alpha > 0$, és fàcil veure que $\{a_n\}$ és positiva. Per tant, existeixen $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tals que per tot $n \geq n_0$ es compleix que $a_n > b > 0$.
Sigui la successió de nombres racionals $\{b_n\}$ definida com $b_n = a_{n_0+n}$. Notem que $\{b_n\}$ també convergeix a α i que per tot $n \in \mathbb{N}$ se satisfà que $b_n > b$. Aleshores

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim_{R_1} b_n) = \lim_{R_2} \varphi(b_n) = \lim_{R_2} b_n > b > 0.$$

Per demostrar l'altra implicació, veurem que si $\alpha \leq 0$ aleshores $\varphi(\alpha) \leq 0$:
Si $\alpha = 0$, aleshores $\varphi(0) = 0$.
Si $\alpha < 0$, és fàcil veure que $\{a_n\}$ és negativa. Per tant, existeixen $c \in \mathbb{Q}$, $c < 0$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tals que per tot $n \geq n_1$ es compleix que $a_n < c < 0$.
Sigui la successió de racionals $\{c_n\}$ definida com $c_n = a_{n_0+n}$. Aquesta successió també convergeix cap a α i per tot $n \in \mathbb{N}$ se satisfà que $c_n < c$.
Aleshores

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim_{R_1} c_n) = \lim_{R_2} \varphi(c_n) = \lim_{R_2} c_n < c < 0.$$

Ens falta veure que φ és bijectiva:
Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ aleshores $\alpha_1 > \alpha_2$ o $\alpha_1 < \alpha_2$. Per (iii), es compleix que $\varphi(\alpha_1) > \varphi(\alpha_2)$ o $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$. Per tant, $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$ i φ és injectiva.
Ara, veurem que φ és exahustiva. Sigui $\beta \in R_2$ i sigui $\{b_n\}$ una successió de nombres racionals que convergeix cap a β. Com que $\{b_n\}$ és convergent en un cos ordenat R_2, també serà de Cauchy en R_2, segons la proposició 1.1.19. Aquesta successió també és de Cauchy en $\mathbb{Q}$ i per tant, per la proposició 1.2.19, també ho és en R_1. Ara, com que R_1 és complet, la successió $\{b_n\}$ convergeix en R_1. Sigui α aquest límit en R_1, aleshores $\varphi(\alpha) = \beta$. Per tant, φ és exhaustiva.

Hem demostrat que dos cossos de nombres reals són isomorfs com a cossos ordenats.

1.3 Construcció de $\mathbb{R}$ per talladures de Dedekind

En aquesta secció demostrarem l'existència d'un cos R ordenat i Dedekind-complet. Farem la demostració seguint els passos de la construcció que va fer Dedekind (1872). Els elements de R són subconjunts de $\mathbb{Q}$ anomenats talladures. Així, abans de tot, hem de definir que és una talladura.

1.3.1 Definició

Una *talladura* és un conjunt $\alpha \subset \mathbb{Q}$ que satisfà les propietats següents:

(i) $\alpha \neq \emptyset$ i $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Siguin $p \in \alpha$ i $q \in \mathbb{Q}$ tals que $q < p$, aleshores es compleix que $q \in \alpha$.

(iii) Sigui $p \in \alpha$, aleshores existeix $q \in \alpha$ tal que $p < q$.

1.3.2 Observació

Siguin α una talladura i $p, q \in \mathbb{Q}$. De la definició, es dedueix que:

(i) Per tot $p \in \alpha$ i $q \notin \alpha$, es compleix que $p < q$.

(ii) Per tot $p \notin \alpha$, si $p < q$ aleshores $q \notin \alpha$.

1.3.3 Proposició

Sigui $r \in \mathbb{Q}$. Aleshores el conjunt $r^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ és una talladura.
El conjunt r^* es diu que és la *talladura associada a* r i és el subconjunt de $\mathbb{Q}$ de la forma $(-\infty, r)$.

Demostració

Hem de veure que r^* satisfà les tres condicions de la definició:

(i) Com que $r \in \mathbb{Q}$, aleshores $r - 1 \in \mathbb{Q}$ i $r - 1 < r$. Per tant, $r^* \neq \emptyset$ ja que $r - 1 \in r^*$. Per altra banda, $r + 1$ també és un nombre racional i $r < r + 1$. Per tant, $r^* \neq \mathbb{Q}$ ja que $r + 1 \notin r^*$.

(ii) Siguin $p \in r^*$ i $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < p$. Com que $p \in r^*$ aleshores $q < p < r$ i per tant, $q \in r^*$.

(iii) Sigui $p \in r^*$. Aleshores, existeix $q = \frac{p+r}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in r^*$ i $p < q < r$.

1.3.4 Proposició

Sigui $r \in \mathbb{Q}$ i sigui α una talladura. Aleshores, existeixen $p \in \alpha$ i $q \notin \alpha$ tals que $r = q - p$.

Demostració

Sigui $t \in \alpha$. Considerem tots els nombres racionals de la forma $t + nr$ per tot $n \in \mathbb{Z}$.
Per tot $s \notin \alpha$ existeix $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nr > s - t$. Aleshores, es compleix que $t + nr > s$ i, per tant, $t + nr \notin \alpha$.
Sigui $m = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid t + nr \notin \alpha\}$.
Si $m = 1$, aleshores $p = t$ i $q = t + r$.
Si $m > 1$, aleshores $p = t + (m-1)r$ i $q = t + mr$.

1.3.5 Definició

Siguin α i β dues talladures, aleshores $\alpha + \beta := \{p + q \mid p \in \alpha, q \in \beta\}$.

1.3.6 Teorema

La suma de talladures de Dedekind satisfà (1), (2), (3) i (4) de la definició de cos.

Demostració

Primer de tot, hem de veure que la suma de talladures és una operació interna.
Siguin $\alpha, \beta \in R$, vegem que $\alpha + \beta$ és una talladura:

(i) $\alpha + \beta \neq \emptyset$ i $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$:
Com que α i β no són conjunts buits, aleshores $\alpha + \beta \neq \emptyset$.
Siguin $r, s \in \mathbb{Q}$ tals que $r \notin \alpha$ i $s \notin \beta$, aleshores satisfan que $r + s > p + q$ per tot $p \in \alpha$ i per tot $q \in \beta$. Per tant, $r + s \notin \alpha + \beta$ i $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Siguin $p \in \alpha + \beta$ i $q \in \mathbb{Q}$ tals que $q < p$, aleshores $q \in \alpha + \beta$:
Com que $p \in \alpha + \beta$, aleshores $p = r + s$ amb $r \in \alpha$ i $s \in \beta$. Si $q < p$, $q \in \mathbb{Q}$, se satisfà que $q - s < r$ i, per tant, $q - s \in \alpha$. Aleshores, $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$.

(iii) Sigui $p \in \alpha + \beta$, aleshores existeix $q \in \alpha + \beta$ tal que $p < q$:
Com que $p \in \alpha + \beta$ aleshores $p = r + s$ amb $r \in \alpha$ i $s \in \beta$. Sigui $t \in \alpha$ tal que $r < t$. Aleshores $p < t + s$ i $t + s \in \alpha + \beta$.

Ara, veurem que se satisfan les propietats següents:

(1) Propietat associativa de la suma:
Siguin $\alpha, \beta, \delta \in R$. Aleshores $(\alpha+\beta)+\delta$ és el conjunt de tots els $(p+q)+r$ amb $p \in \alpha$, $q \in \beta$ i $r \in \delta$. Com que la suma és associativa en $\mathbb{Q}$, aleshores $(p+q)+r = p+(q+r)$ i per tant, $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$.

(2) Propietat commutativa de la suma:
Siguin $\alpha, \beta \in R$. Aleshores $\alpha + \beta$ és el conjunt de tots els $p + q$ amb $p \in \alpha$ i $q \in \beta$. Com que $p + q = q + p$ per tots $p, q \in \mathbb{Q}$, aleshores $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(3) Existència d'element neutre de la suma:
Sigui $\alpha \in R$. Si $p \in \alpha$ i $q \in 0^*$, aleshores se satisfá que $p+q < p$ i, per tant, $p+q \in \alpha$. Així, tenim $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Sigui $r \in \alpha$ tal que $r > p$. Com que $p - r < 0$ aleshores $p - r \in 0^*$ i $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$. Per tant, obtenim que $\alpha \subset \alpha + 0^*$.
En conclusió, $\alpha + 0^* = \alpha$. Per tant, 0^* és l'element neutre de la suma.

(4) Existència d'element oposat de la suma:
Sigui $\alpha \in R$ i sigui $\beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists r > 0 : -p - r \notin \alpha\}$. Demostrarem que β és una talladura i que $\alpha + \beta = 0^*$. Vegem que β compleix les condicions de la definició:

(i) Sigui $s \notin \alpha$ i prenem $p = -s - 1$. Aleshores $-p - 1 \notin \alpha$. Per tant, $p \in \beta$ i $\beta \neq \emptyset$. Si $q \in \alpha$, aleshores $-q \notin \beta$ i, per tant, $\beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Sigui $p \in \beta$. Aleshores existeix un nombre racional $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Sigui $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < p$, aleshores es compleix que $-p - r < -q - r$ i, per l'apartat (ii) de l'observació 1.3.2, $-q - r \notin \alpha$ i $q \in \beta$.

(iii) Sigui $p \in \beta$, aleshores existeix un racional $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Sigui $q = p + \frac{r}{2}$, aleshores $q > p$. Per tant, es compleix que $-q - \frac{r}{2} = -p - r \notin \alpha$ i $q \in \beta$. En conclusió, hem demostrat que donat un $p \in \beta$, existeix $q \in \beta$ tal que $p < q$.

Ara, hem de demostrar que $\alpha + \beta = 0^*$:
Siguin $p \in \alpha$ i $q \in \beta$. Aleshores $-q \notin \alpha$ i, per tant, per l'apartat (i) de l'observació 1.3.2, $p < -q$. Així, $p + q < 0$ i $\alpha + \beta \subset 0^*$.
Per veure que $0^* \subset \alpha + \beta$, considerem $r \in 0^*$ i $s = -\frac{r}{2}$. Aleshores, $s > 0$ i existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que $ns \in \alpha$ i $(n + 1)s \notin \alpha$.
Sigui $t = -(n + 2)s$. Aleshores $t \in \beta$ ja que $-t - s = (n + 2)s - s = (n + 1)s \notin \alpha$ i $r = -2s = ns + t \in \alpha + \beta$. Així doncs, $0^* \subset \alpha + \beta$.
En conclusió, hem demostrat que per tota talladura α existeix una altra talladura β tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Aquesta β és l'oposat de α i la denotarem per $-\alpha$.

1.3.7 Definició

Siguin α i β dues talladures. Direm que $\alpha < \beta$ si $\alpha \subset \beta$, és a dir, α és un subconjunt propi de β.

1.3.8 Teorema

El conjunt de les talladures dotat de $<$ és un conjunt totalment ordenat.

Demostració

Vegem que se satisfan les dues condicions de la definició de conjunt totalment ordenat:

(i) Hem de veure que per dues talladures α i β qualssevol es compleix una, i només una, de les següents:

$$\alpha < \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \beta < \alpha$$

Suposem que no es compleix ni $\alpha < \beta$ ni $\alpha = \beta$. Aleshores, α no és un subconjunt de β. Això implica que existeix $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p \in \alpha$ i $p \notin \beta$.
Sigui $q \in \beta$, aleshores $q < p$ i, per tant, $q \in \alpha$.
Així doncs, $\beta \subset \alpha$ i es compleix que $\beta < \alpha$.

(ii) Siguin α, β i δ talladures tals que $\alpha < \beta$ i $\beta < \delta$. Hem de veure que $\alpha < \delta$.
És evident ja que $\alpha \subset \beta$ i $\beta \subset \delta$ i per tant, $\alpha \subset \delta$.

El producte de talladures és més complicat de definir que la suma ja que el producte de nombres racionals negatius és positiu. Per això, primer, definirem el producte de dues talladures α i β tals que $\alpha, \beta > 0^*$.

1.3.9 Definició

Direm que una talladura α és *positiva* (resp. *negativa*) si $\alpha > 0^*$ (resp. $\alpha < 0^*$).

1.3.10 Definició

Siguin $\alpha, \beta \in R$ tals que $\alpha, \beta > 0^*$. Aleshores

$$\alpha\beta := \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq rs, \text{ per alguns } r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0\}.$$

1.3.11 Teorema

El producte de la definició anterior satisfà les propietats (5), (6), (7), (8) i (9) de la definició de cos, per a talladures positives.

Demostració

Primer de tot, hem de veure que el producte que hem definit és una operació interna. Siguin $\alpha, \beta \in R$ tals que $\alpha, \beta > 0^*$. Vegem que $\alpha\beta$ és una talladura:

(i) $\alpha\beta \neq \emptyset$ i $\alpha\beta \neq \mathbb{Q}$:
Com que α i β són conjunts no buits, aleshores $\alpha\beta \neq 0$.
Siguin $q, t \in \mathbb{Q}$ tals que $q \notin \alpha$ i $t \notin \beta$. Aleshores, satisfan que $qt > rs$ per tot $r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0$. Per tant, $qt \notin \alpha\beta$ i $\alpha\beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Siguin $p \in \alpha\beta$ i $q \in \mathbb{Q}$ tals que $q < p$. Aleshores es compleix $q \in \alpha\beta$:
Com que $p \in \alpha\beta$, aleshores $p \leq rs$ amb $r \in \alpha$, $s \in \beta$, $r, s > 0$.
Com que $q < p$, se satisfà que $q < rs$ i $q \in \alpha\beta$.

(iii) Sigui $p \in \alpha\beta$. Aleshores existeix $q \in \alpha\beta$ tal que $p < q$:
Com que $p \in \alpha\beta$, aleshores $p \leq rs$ amb $r \in \alpha$, $s \in \beta$, $r, s > 0$.
Sigui $t \in \alpha$ tal que $t > r$. Aleshores $p \leq rs < ts$. Sigui $u \in \beta$ tal que $u > s$. Aleshores $p \leq rs < ts < tu$. Per tant, $ts \in \alpha\beta$ i $ts > p$.

Ara, veurem que se satisfan les propietats següents:

(1) Propietat associativa del producte:
Siguin $\alpha, \beta, \delta \in R$. Aleshores, $(\alpha\beta)\delta$ és el conjunt de tots els nombres racionals més petits o iguals que $(pq)r$ amb $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $r \in \delta$ i $p, q, r > 0$. Com que el producte de nombres racionals és associatiu, aleshores $(pq)r = p(qr)$ i per tant, $(\alpha\beta)\delta = \alpha(\beta\delta)$.

(2) Propietat commutativa del producte:
Siguin $\alpha, \beta \in R$. Aleshores, $\alpha\beta$ és el conjunt de tots els nombres racionals més petits o iguals que pq amb $p \in \alpha$, $q \in \beta$ i $p, q > 0$. Com que el producte de nombres racionals és commutatiu, aleshores $pq = qp$ i per tant, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(3) Existència d'element neutre del producte:
Sigui $\alpha \in R$. Si $p \in \alpha$, $q \in 1^*$ i $p, q > 0$, se satisfà que $pq < p$ i, per tant, $pq \in \alpha$. Així, tenim $\alpha 1^* \subset \alpha$.
Sigui $r \in \alpha$ tal que $r > p$. Com que $\frac{p}{r} < 1$, aleshores $\frac{p}{r} \in 1^*$ i $p = r\frac{p}{r} \in \alpha 1^*$. Per tant, obtenim que $\alpha \subset \alpha 1^*$.
En conclusió, $\alpha 1^* = \alpha$. Per tant, 1^* és l'element neutre del producte.

(4) Existència d'element invers del producte:
Sigui una talladura α i sigui $\beta = \left\{p \in \mathbb{Q} \mid \exists s \notin \alpha, s > 0 : p < \frac{1}{s}\right\}$. Demostrarem que β és una talladura i que $\alpha\beta = 1^*$. Vegem que β satisfà les condicions de la definiciò de talladura:

(i) Com que α és una talladura, aleshores $\alpha \neq \mathbb{Q}$. Per tant, existeix $s \in \mathbb{Q}$, $s \notin \alpha$, $s > 0$ i, per tant, $q < s$ per tot $q \in \alpha$. Aleshores $\frac{1}{2s} < \frac{1}{s} < \frac{1}{q}$ i, per tant, $\beta \neq \emptyset$ i $\beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Sigui $p \in \beta$. Aleshores, existeix $s \notin \alpha, s > 0$ tal que $p < \frac{1}{s}$. Sigui $q < p$. Aleshores es compleix que $q < p < \frac{1}{s}$ i $q \in \beta$.

(iii) Sigui $p \in \beta$, aleshores existeix $s \notin \alpha, s > 0$ tal que $p < \frac{1}{s}$. Per tant, $p < \frac{p+\frac{1}{s}}{2} < \frac{1}{s}$.
En conclusió, hem demostrat que donat un $p \in \alpha$, existeix $q = \frac{p+\frac{1}{s}}{2} \in \beta$ tal que $p < q$.

Ara, hem de demostrar que $\alpha\beta = 1^*$:
Siguin $p \in \alpha$ i $q \in \beta$. Aleshores, existeix $s \notin \alpha, s > 0$ tal que $q < \frac{1}{s}$. Com que $s \notin \alpha$, aleshores $p < s$. Per tant, $pq < s\frac{1}{s} = 1$ i $\alpha\beta \subset 1^*$.
Sigui $t \in \mathbb{Q}$ tal que $t < 1$. Prenem $p \in \alpha$ tal que $p < t$. Per la Proposició 1.3.4, existeixen $q \in \alpha$ i $r \notin \alpha$ tals que $r - q = (1-t)p$. Aleshores, se satisfà que $r - q < (1-t)r$.
Per tant, obtenim que $(r-q)+rt < (1-t)r+rt = r = (r-q)+q$. Aleshores, $rt < q$ i, per tant, $r = \frac{1}{t}tr < \frac{1}{t}q$. Per tant, $\frac{q}{r} \notin \alpha$.
Com que $q \in \alpha$, aleshores $\frac{1}{q} \in \beta$. Aleshores, $\frac{1}{\frac{q}{t}} \in \beta$ ja que $\frac{1}{\frac{q}{t}} < \frac{1}{q}$.
Per tant, $t = q\frac{1}{\frac{q}{t}} \in \alpha\beta$.

(5) Propietat distributiva del producte respecte de la suma:
Siguin $\alpha, \beta, \delta \in R$ tal que $\alpha, \beta, \delta > 0^*$. Aleshores,

$$\alpha(\beta+\delta) = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq r(s+t), r \in \alpha, s \in \beta, t \in \delta, r > 0, s > 0, t > 0\}.$$

Com que en $\mathbb{Q}$ es compleix que $r(s+t) = (rs)+(rt)$, aleshores

$$\alpha(\beta+\delta) = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq (rs)+(rt), r \in \alpha, s \in \beta, t \in \delta, r > 0, s > 0, t > 0\}.$$

En conclusió, $\alpha(\beta+\delta) = (\alpha\beta)+(\alpha\delta)$.

1.3.12 Definició

Definim el producte entre dues talladures α i β, no ambdues positives:

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{si } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{si } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & \text{si } \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Si una de les dues talladures és 0^* aleshores $\alpha 0^* = 0^*\beta = 0^*$.

1.3.13 Observació

Notem que $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$. Usant la definició anterior, obtenim que

$$\alpha(-\beta) = \begin{cases} -(\alpha\beta) & \text{si } \alpha > 0^*, \beta < 0^* \\ -[(\alpha)\beta] = -(\alpha\beta) & \text{si } \alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^* \\ (-\alpha)[-(-\beta)] = -(\alpha\beta) & \text{si } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -[(-\alpha)(-\beta)] = -(\alpha\beta) & \text{si } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

1.3.14 Observació

El producte de talladures compleix les mateixes propietats que el producte de talladures positives. En la demostració dels altres casos s'utilitza que $\alpha = -(-\alpha)$ i que $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$; aquesta segona propietat és fàcil de comprovar, per cassos.
Com a exemple, farem la demostració de la propietat distributiva respecte de la suma. Anem a veure que se satisfá per tots els casos possibles:

- Si $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, $\delta < 0^*$ i $\beta + \delta \geq 0^*$:
  Aleshores $\beta = (\beta + \delta) + (-\delta)$. Com que la propietat distributiva es compleix per talladures positives, aleshores $\alpha\beta = \alpha(\beta+\delta)+\alpha(-\delta)$ i, per tant, $\alpha(\beta+\delta) = \alpha\beta+\alpha\delta$.

- Com que la suma és commutativa, també és compleix la propietat distributiva en el cas $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$, $\delta \geq 0^*$ i $\beta + \delta \geq 0^*$.

- Si $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, $\delta < 0^*$ i $\beta + \delta < 0^*$:
  Per la definició, $\alpha(\beta + \delta) = -[\alpha(-(\beta + \delta))]$. Com que la propietat distributiva es compleix per talladures positives, aleshores $\alpha(\beta + \delta) = -[-(\alpha\beta) - (\alpha\delta)] = (\alpha\beta) + (\alpha\delta)$.

- Com que la suma és commutativa, també és compleix la propietat distributiva en el cas $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$, $\delta \geq 0^*$ i $\beta + \delta < 0^*$.

- Si $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$ i $\delta < 0^*$:
  Per la definició, $\alpha(\beta + \delta) = -[\alpha(-(\beta + \delta))] = -[-(\alpha\beta) - (\alpha\delta)] = (\alpha\beta) + (\alpha\delta)$.

- Ens falten veure tots els casos amb $\alpha < 0^*$.
  Fem $\alpha(\beta + \delta) = -[(-\alpha)(\beta + \delta)]$. Com sabem que es compleix la propietat distributiva si $\alpha \geq 0^*$, aleshores $\alpha(\beta + \delta) = -[(-\alpha\beta) + (-\alpha\delta)] = (\alpha\beta) + (\alpha\delta)$.

1.3.15 Teorema

El cos R és un cos ordenat.

Demostració

Ens falta veure que se satisfan les propietats (iii) i (iv) de la Definició 1.1.5.

(iii) Hem de veure que per tot $\alpha, \beta, \delta \in R$ tals que $\alpha < \beta$, aleshores $\alpha + \delta < \beta + \delta$:
Siguin

$$\alpha + \delta = \{p \in \mathbb{Q} \mid p = q + r, q \in \alpha, r \in \delta\}$$
$$\beta + \delta = \{p \in \mathbb{Q} \mid p = s + r, s \in \beta, r \in \delta\}$$

Com que $\alpha < \beta$, aleshores $\alpha \subset \beta$. És obvi, aleshores, que $\alpha + \delta \subset \beta + \delta$.

(iv) Per la definició del producte de talladures positives, és obvi que per tot $\alpha, \beta \in R$ tals que $\alpha > 0^*$ i $\beta > 0^*$, es compleix que $\alpha\beta > 0^*$.

1.3.16 Teorema

El conjunt ordenat R és Dedekind-complet.

Demostració

Hem de veure que tot subconjunt no buit de $\mathbb{R}$ i afitat superiorment, té suprem.
Siguin $A \neq \emptyset$ un subconjunt de R i β una fita superior d'A.
Considerem $\gamma := \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Demostrarem que γ és una talladura i que $\gamma = \sup(A)$.
Primer, provarem que satisfà la definició de talladura:

(i) Com que $A \neq \emptyset$, aleshores existeix $\alpha \in A$ i, per tant, $\alpha \subset \gamma$ i $\gamma \neq \emptyset$.
Com que $\alpha \subset \beta$ per tot $\alpha \in A$, aleshores $\gamma \subset \beta$ i, per tant, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Siguin $p \in \gamma$ i $q \in \mathbb{Q}$ tals que $q < p$, aleshores existeix $\alpha \in A$ tal que $p \in \alpha$. Així doncs, $q \in \alpha$ ja que α és una talladura i, per tant, $q \in \gamma$.

(iii) Sigui $p \in \gamma$. Això implica que existeix $\alpha \in A$ tal que $p \in \alpha$.
Aleshores existeix $q \in \alpha$ tal que $p < q$, ja que α és una talladura i, com que $\alpha \subset \gamma$, $q \in \gamma$.

Per veure que $\gamma = \sup(A)$, suposem que existeix una fita superior δ d'A i que $\delta < \gamma$. Aleshores existeix p tal que $p \notin \delta$ i $p \in \gamma$. Degut a que $p \in \gamma$, existeix $\alpha \in A$ tal que $p \in \alpha$. Això implica que $\delta < \alpha$, ja que l'ordre és total a R, i per tant, δ no és una cota superior d'A.
En conclusió, hem demostrat que $\gamma = \sup(A)$.

Així doncs, hem demostrat l'existència d'un cos ordenat R que satisfà l'axioma del suprem.

Ara, anem a veure com s'opera amb talladures associades a nombres racionals.

1.3.17 Teorema

Siguin $r^*, s^* \in R$ dues talladures associades a $r \in \mathbb{Q}$ i $s \in \mathbb{Q}$ respectivament. Aleshores

(1) $r^* + s^* = (r+s)^*$.

(2) $r^*s^* = (rs)^*$.

(3) $r < s$ si, i només si, $r^* < s^*$.

Demostració

(1) Sigui $p \in r^* + s^*$. Aleshores, es compleix que $p = q + t$ amb $q < r$ i $t < s$. Per tant, se satisfà que $p < r + s$ i, per tant, $p \in (r+s)^*$.
Ara, sigui $p \in (r+s)^*$. Aleshores, es compleix que $p < r + s$. Considerem $t = \frac{r+s-p}{2} \in \mathbb{Q}$. Aleshores se satisfà que $p = (r-t) + (s-t)$ amb $r - t < r$ i $s - t < s$. Per tant, $p \in r^* + s^*$.

(2) Sigui $p \in r^*s^*$. Aleshores, es compleix que $p \leq qt$ amb $q \in r^*$ i $t \in s^*$. Per tant, $p \leq qt < rs$ i $p \in (rs)^*$.
Ara, sigui $p \in (rs)^*$. Considerem $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < q < rs$.
Aleshores, se satisfà que $\frac{p}{q} < 1$ i $\frac{q}{s} < r$. Per tant, $p = \frac{q}{s}\left(s\frac{p}{q}\right)$ amb $\frac{q}{s} \in r^*$ i $s\frac{p}{q} \in s^*$.
En conclusió, $p \in r^*s^*$.

(3) Si $r < s$, aleshores $r \in s^*$. Per tant, tot element de r^* també és de s^* i en conclusió, $r^* < s^*$.
Ara, si $r^* < s^*$, existeix p tal que $p \in s^*$ i $p \notin r^*$. Per tant, $r \leq p < s$.

Amb aquests resultats, sabem que l'invers del producte d'una talladura r^*, $r \neq 0$, és $\left(\frac{1}{r}\right)^*$ i l'oposat de la suma d'una talladura r^* és $(-r)^*$.

Capítol 2

Els nombres hiperreals

2.1 Axiomàtica dels nombres hiperreals

2.1.1 Definició

El *cos dels nombres hiperreals*, denotat per ${}^*\mathbb{R}$, és un cos ordenat tal que:

(i) Els nombres reals $\mathbb{R}$ formen un subconjunt dels nombres hiperreals ${}^*\mathbb{R}$ amb ${}^*\mathbb{R} \neq \mathbb{R}$ i la relació d'ordre dels nombres reals és un subconjunt de la relació d'ordre dels nombres hiperreals (ambdues les denotem per $<$).

(ii) Existeix un nombre hiperreal major que zero però menor que qualsevol nombre real positiu.

(iii) A cada funció real f li correspon una funció hiperreal f^* del mateix nombre de variables que f tal que $f^*(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$ si $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Aquesta funció f^* li direm *extensió natural* de f.

(iv) Principi de transferència:
Cada propietat elemental que satisfà una o més funcions reals també la compleixen les extensions naturals hiperreals d'aquestes funcions.

Una "propietat elemental" és una sentència en una lògica de primer ordre. Ara, definirem uns conceptes lògics necessaris per definir el què és una sentència en una lògica de primer ordre.
Un *llenguatge* és una terna $\mathcal{L} = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ tal que

- $\mathcal{R}$ és un conjunt de símbols relacionals i per cada $R \in \mathcal{R}$, té associat $0 < ar(R) \in \mathbb{N}$, arietat de R.
- $\mathcal{F}$ és un conjunt de símbols funcionals i per cada $f \in \mathcal{F}$, té associat $o < ar(f) \in \mathbb{N}$, arietat de f.
- $\mathcal{C}$ és un conjunt de símbols de constants.

A més també necessitarem els símbols següents:

- Connectives lògiques: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$.
- Quantificadors: $\exists$ i $\forall$.
- Parentesis: $(,)$ i $[,]$.
- Un conjunt numerable de variables: $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Un símbol d'igualtat: $\approx$.

El *conjunt de termes* d'un llenguatge $\mathcal{L}$ és el conjunt $Term\,(\mathcal{L})$ tal que:

(t.1) Les variables i constants són termes: $V \cup \mathcal{C} \subseteq Term\,(\mathcal{L})$.

(t.2) Siguin $f \in \mathcal{F}$ amb $ar(f) = n$ i $t_1, \cdots, t_n \in Term\,(\mathcal{L})$. Aleshores. $f\,(t_1, \cdots, t_n) \in Term\,(\mathcal{L})$.

(t.3) No hi ha més termes que els obtinguts per (t.1) i (t.2) en un nombre finit de passos.

El *conjunt de fórmules* de primer ordre sobre el llenguatge $\mathcal{L}$ és el conjunt $Form\,(\mathcal{L})$ tal que:

(f.1) Sigui $R \in \mathcal{R}$, $ar(R) = n > 0$ i siguin $t_1, \cdots, t_n \in Term(\mathcal{L})$. Aleshores, $R(t_1, \cdots, t_n$ és una fórmula atòmica. Totes les fórmules atòmiques són fórmules.

(f.2) Siguin $\varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})$. Aleshores, $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ i $\varphi \leftrightarrow \psi$ són fórmules.

(f.3) Siguin $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ i $v \in V$. Aleshores, $(\forall v)\varphi$ i $(\exists v)\varphi$ són fórmules.

Una ocurrència d'una variable v en una fórmula ψ no és lliure si es troba dins d'una fórmula de la forma $(\forall v)\varphi$ o $(\exists v)\varphi$ que és una part de ψ.
Una *sentència* és una fórmula sense variables lliures. En cada model, una sentència és verdadera o falsa.

2.1.2 Exemples

(1) Propietat associativa de la suma: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) = (x + y) + z)$.

(2) Propietat commutativa del producte: $(\forall x)(\forall y)(xy = yz)$.

(3) Existència d'element oposat per la suma: $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.

(4) Si $x < y$, aleshores es compleix que $(\forall z)(x + z < y + z)$.

(5) $(\forall x)(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$.

2.1.3 Definició

Direm que un nombre hiperreal ε és *infinitesimal* si es compleix que $-a < \varepsilon < a$ per tot $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

2.1.4 Observació

Notem que el zero és un infinitesimal. De fet, és l'únic nombre real que és infinitesimal, per la densitat dels nombres reals.

2.1.5 Definició

Direm que un nombre hiperreal ε és *infinitesimal positiu* si es compleix que $0 < \varepsilon < a$ per tot $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Anàlogament, direm que ε és *infinitesimal negatiu* si es compleix que $a < \varepsilon < 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

2.1.6 Definició

Direm que un nombre hiperreal b és *finit* si existeixen $r, s \in \mathbb{R}$ tals que $r < b < s$. En cas contrari, direm que b és *infinit*.

2.1.7 Observació

Els nombres reals i els infinitesimals són finits.

2.1.8 Definició

Direm que un nombre hiperreal és *apreciable* si és finit i no infinitesimal.

2.1.9 Definició

Direm que un nombre hiperreal H és *infinit positiu* si es compleix que $a < H$ per tot $a \in \mathbb{R}$. Anàlogament, direm que H és *infinit negatiu* si es compleix que $H < a$ per tot $a \in \mathbb{R}$.

2.1.10 Observació

Per l'apartat (i) de la definiciÓ de $^*\mathbb{R}$, la recta real està continguda a la recta hiperreal. Podem representar la recta hiperreal de la manera següent:

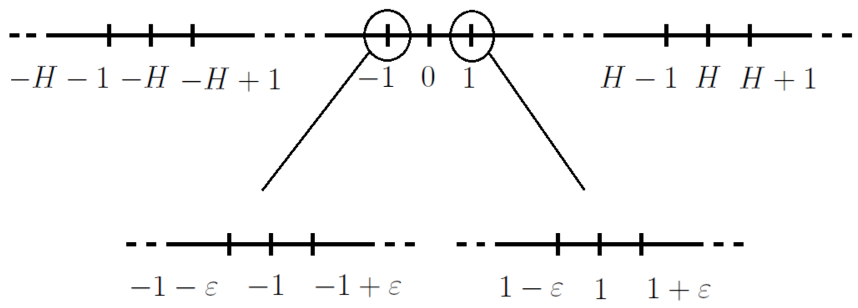

Figura 2.1: Recta hiperreal

On ε és un nombre infinitesimal positiu i H un nombre infinit positiu.
Per l'apartat (iii) de la definició de $^*\mathbb{R}$, podem aplicar funcions reals a nombres hiperreals. Usant les extensions naturals de la suma i dels producte de nombres reals, podem descriure l'àlgebra dels nombres hiperreals.

$+$	infinitesimal	apreciable	infinit
infinitesimal	infinitesimal	apreciable	infinit
apreciable	apreciable	finit	infinit
infinit	infinit	infinit	

Taula 2.1: Suma de nombres hiperreals

La suma de dos nombres apreciables serà un nombre finit: infinitesimal o apreciable.

$\cdot$	infinitesimal	apreciable	infinit
infinitesimal	infinitesimal	infinitesimal	
apreciable	infinitesimal	apreciable	infinit
infinit		infinit	infinit

Taula 2.2: Producte de nombres hiperreals

També podem descriure altres operacions. Siguin ε un nombre infinitesimal, b i c nombres apreciables i H un nombre infinit. Es compleix que:

(i) Oposat per la suma:

- $-\varepsilon$ és infinitesimal.
- $-b$ és apreciable.
- $-H$ és infinit.

(ii) Invers pel producte:

- Si $\varepsilon \neq 0$, $\frac{1}{\varepsilon}$ és infinit.
- $\frac{1}{b}$ és apreciable.
- $\frac{1}{H}$ és infinitesimal.

(iii) Quocients de nombres hiperreals:

- $\frac{\varepsilon}{b}$, $\frac{\varepsilon}{H}$ i $\frac{b}{H}$ són infinitesimals.
- $\frac{b}{c}$ és apreciable.
- $\frac{b}{\varepsilon}$, $\frac{H}{\varepsilon}$ i $\frac{H}{b}$ són infinits, on $\varepsilon \neq 0$.

(iv) Arrels de nombres hiperreals:

- Si $\varepsilon > 0$, $\sqrt[n]{\varepsilon}$ és infinitesimal.

- Si $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ és apreciable.
- Si $H > 0$, $\sqrt[n]{H}$ és infinit.

2.1.11 Observació

Siguin ε i δ dos nombres infinitesimals i H i K dos nombres infinits. No hem descrit les següents operacions:

(1) La suma de dos nombres infinits, $H + K$.

(2) El producte d'un nombre infinit i un infinitesimal, $H \cdot \varepsilon$.

(3) El quocient entre dos infinitesimals, $\frac{\varepsilon}{\delta}$.

(4) El quocient entre dos nombres infinits, $\frac{H}{K}$.

Cada una d'aquestes operacions depenen del que siguin ε, δ, H i K. Per això les anomenarem *indeterminacions* i el resultat de cada una pot ser infinitesimal, apreciable, o infinit.

2.1.12 Definició

Direm que dos nombres hiperreals x i y estan *infinitament a prop* un de l'altre, $x \approx y$, si $x - y$ és infinitesimal.

2.1.13 Teorema

La relació $\approx$ és d'equivalència.

Demostració

Hem de veure que $\approx$ és reflexiva, simètrica i transitiva:

(i) Per tot $x \in {}^*\mathbb{R}$, es compleix que $x \approx x$. Això és cert ja que $x - x = 0$ i 0 és infinitesimal.

(ii) Si $x \approx y$, aleshores es compleix que $y \approx x$ per tots $x, y \in {}^*\mathbb{R}$.
Si $x - y = \varepsilon$, ε és infinitesimal, aleshores se satisfà que $y - x = -\varepsilon$ i $-\varepsilon$ també és infinitesimal.

(iii) Si $x \approx y$ i $y \approx z$, aleshores es compleix que $x \approx z$.
Si $x-y = \varepsilon$ i $y-z = \delta$, on ε i δ són infinitesimals, aleshores $x-z = (x-y)+(y-z) = \varepsilon + \delta$ i $\varepsilon + \delta$ és infinitesimal.

2.1.14 Proposició

Es compleix que:

(i) Si ε és infinitesimal, aleshores $x \approx x + \varepsilon$ per tot $x \in {}^*\mathbb{R}$.

(ii) δ és infinitesimal si, i només si, $\delta \approx 0$.

(iii) Si $y, z \in \mathbb{R}$ i $y \approx z$, aleshores $y = z$.

Demostració

(i) Com que ε és infinitesimal, aleshores $x - (x+\varepsilon)$ és infinitesimal. Per tant, $x \approx x+\varepsilon$.

(ii) Sigui δ un nombre infinitesimal. Aleshores, $\delta - 0$ també és infinitesimal i, per tant, $\delta \approx 0$.
Ara, si $\delta \approx 0$, se satisfà que $\delta - 0 = \delta$ és infinitesimal.

(iii) Com que $y \approx z$, aleshores es compleix que $y - z$ és infinitesimal. Sigui $\varepsilon \neq 0$ tal que $y - z = \varepsilon$. Aleshores, es compleix que $y = z + \varepsilon$. Com que $z \in \mathbb{R}$, se satisfà que $z + \varepsilon \notin \mathbb{R}$ i això és una contradicció. Per tant, $\varepsilon = 0$ i $y = z$.

2.1.15 Proposició

Siguin $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ tals que $x \approx y$. Aleshores se satisfà que:

(i) Si x és infinitesimal, també ho és y.

(ii) Si x és finit, també ho és y.

(iii) Si x és infinit, també ho és y.

2.1.16 Teorema (Principi de la part estàndard)

Tot nombre hiperreal finit està infinitament a prop d‘un nombre real, i només un.

Demostració

Sigui b un nombre hiperreal finit. Considerem el conjunt $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r < b\}$. Com que b és finit, existeixen $r, s \in \mathbb{R}$ tals que $r < b < s$. Aleshores se satisfà que $A \neq \emptyset$ i A està afitat superiorment per s a $\mathbb{R}$. Com que $\mathbb{R}$ és Dedekind-complet, aleshores existeix $c = \sup A \in \mathbb{R}$.
Vegem que $b \approx c$:
Prenem ε un nombre real positiu. Com que $c = \sup A$, se satisfà que $c + \varepsilon \notin A$. Per tant, $b < c + \varepsilon$.
Si $b \leq c - \varepsilon$, aleshores $c - \varepsilon$ seria una fita superior, contràriament al fet de que $c = \sup A$. Per tant, es compleix que $b > c - \varepsilon$.
Així doncs, se satisfà que $c - \varepsilon < b < c + \varepsilon$. És a dir, se satisfà que $-\varepsilon < b - c < \varepsilon$ per tot $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Aleshores, $b - c$ és infinitesimal i, per tant, $b \approx c$.
Ara, suposem que b està infinitament a prop de dos nombres reals, és a dir, $b \approx a$ i $x \approx c$ per alguns $a, c \in \mathbb{R}$. Com que $\approx$ és transitiva, es compleix que $a \approx c$ i, per la proposició 2.1.14, se satisfà que $a = c$.

2.1.17 Definició

Sigui x un nombre hiperreal finit. La *part estàndard* de x, $st(x)$, és l'únic nombre real que està infinitament a prop de x, que existeix per la proposició 2.1.16.

2.1.18 Observació

Els nombres infinits únicament estan infinitament a prop de nombres infinits i aquests no són reals. Per tant, els nombres infinits no tenen part estàndard.

2.1.19 Proposició

- Si x és un nombre hiperreal finit, aleshores es compleix que $x = st(x) + \varepsilon$ per algun ε infinitesimal.
- Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores es compleix que $x = st(x)$.
- Si x és infinitesimal, aleshores es compleix que $st(x) = 0$.

Demostració

Si x és un nombre hiperreal finit, aleshores, per la definició 2.1.17, se satisfà que $x \approx st(x)$. És a dir, $x - st(x) = \varepsilon$ per algun ε infinitesimal. Per tant, $x = st(x) + \varepsilon$.
Si $x \in \mathbb{R}$, com que se satisfà que $x \approx st(x)$, i $st(x) \in \mathbb{R}$, per la proposició 2.1.14, es compleix que $x = st(x)$.
Si x és infinitesimal, es compleix que $x \approx 0$ i, per tant, $st(x) = 0$.

2.1.20 Proposició

Siguin x i y dos nombres hiperreals finits. Aleshores es compleix que:

(1) $st(-x) = -st(x)$.

(2) $st(x + y) = st(x) + st(y)$.

(3) $st(x - y) = st(x) - st(y)$.

(4) $st(xy) = st(x)st(y)$.

(5) Si $st(y) \neq 0$, aleshores $st(\frac{x}{y}) = \frac{st(x)}{st(y)}$.

(6) Si $x \leq y$, aleshores $st(x) \leq st(y)$.

Demostració

Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ la part estàndar de x i y respectivament. És a dir, $x = a + \varepsilon$ i $y = b + \delta$ per alguns ε, δ infinitesimals. Aleshores, es compleix que

(1) $-x = -a - \varepsilon \approx -a$ i, per tant, $st(-x) = -a = -st(x)$.

(2) $x+y = a+\varepsilon+b+\delta = a+b+(\varepsilon+\delta) \approx a+b$ i, per tant, $st(x+y) = a+b = st(x)+st(y)$.

(3) $x-y = a+\varepsilon-b-\delta = (a-b)+(\varepsilon-\delta) \approx a-b$ i, per tant, $st(x-y) = a-b = st(x)-xt(y)$.

(4) $xy = (a + \varepsilon)(b + \delta) = ab + a\delta + b\varepsilon + \varepsilon\delta \approx ab$ i, per tant, $st(xy) = ab = st(x)st(y)$.

(5) $\frac{x}{y} = \frac{a+\varepsilon}{b+\delta} \approx \frac{a}{b}$, ja que $\frac{a+\varepsilon}{b+\delta} - \frac{a}{b} = \frac{b\varepsilon-a\delta}{b(b+\delta)}$ que és infinitesimal per les regles de càlcul que hem vist abans. Per tant, $\frac{x}{y} \approx \frac{a}{b}$ i per tant, $st(\frac{x}{y}) = \frac{a}{b} = \frac{st(x)}{st(y)}$.

(6) Si $x \leq y$, aleshores $a + \varepsilon \leq b + \delta$. Per tant, $st(x) = a \leq b = st(y)$.

2.2 Filtres i ultrafiltres

En aquesta secció definirem conceptes i veurem resultats de la teoria de conjunts necessaris per poder fer la construcció de $^*\mathbb{R}$. En concret, demostrarem els resultats necessaris per poder demostrar el teorema de l'ultrafiltre:

Tot filtre propi de Ω es pot extendre a un ultrafiltre de Ω.

Usant això, demostrarem que existeix un ultrafiltre no principal en el conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals. Aquest fet és necessari per poder definir, en la secció següent, una relació entre successions de nombres reals.
Durant tota la secció, notarem A^c al complementari d'un conjunt A respecte de Ω.

2.2.1 Definició

Sigui Ω un conjunt no buit. Anomenarem *conjunt potència* o *conjunt de parts* de Ω al conjunt $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$.

2.2.2 Definició

Un *filtre* de Ω és una col·lecció no buida $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjunts que compleix les propietats següents:

(i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, es compleix que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B \subseteq \Omega$, es compleix que $B \in \mathcal{F}$.

2.2.3 Proposició

Tot filtre $\mathcal{F}$ de Ω conté a Ω.

Demostració

Com que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, aleshores existeix $A \in \mathcal{F}$. Com que $A \subseteq \Omega$, per l'apartat (ii) de la definició de filtre, $\Omega \in \mathcal{F}$.

2.2.4 Proposició

Un filtre $\mathcal{F}$ conté el conjunt buit si, i només si, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Demostració

Obviament, si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, se satisfà que $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Suposem que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Com que tot subconjunt $B \in \Omega$ conté a $\emptyset$ i, per tant, $\emptyset \subseteq B \subseteq \Omega$, per la definició de filtre, se satisfà que tot subconjunt B de Ω pertany a $\mathcal{F}$. En conclusió, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2.2.5 Definició

Direm que un filtre $\mathcal{F}$ és *propi* si $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

2.2.6 Definició

Un *ultrafiltre* és un filtre propi tal que per tot $A \subseteq \Omega$, se satisfà que $A \in \mathcal{F}$ o bé $A^c \in \mathcal{F}$.

2.2.7 Definició

Anomenarem *filtre de Fréchet*, o *filtre dels cofinits*, al conjunt

$$\mathcal{F}^{co}(\Omega) = \{A \subseteq \Omega \mid A^c \text{ és finit}\}.$$

2.2.8 Observació

Anem a veure que, efectivament, $\mathcal{F}^{co}(\Omega)$ és un filtre:

(i) Siguin $A, B \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$. Volem veure que $A \cap B \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$, és a dir, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ és finit. En efecte, com que A^c i B^c són finits, aleshores se satisfà que $A^c \cup B^c$ també és finit. Per tant, $A \cap B \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$.

(ii) Sigui $A \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$ i sigui B tal que $A \subseteq B \subseteq \Omega$. Volem veure que $B \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$. En efecte, com que $A \subseteq B$, se satisfà que $B^c \subseteq A^c$ i com que A^c és finit, es compleix que B^c també ho és. Per tant, $B \in \mathcal{F}^{co}(\Omega)$.

Hem vist que $\mathcal{F}^{co}(\Omega)$ és un filtre.

2.2.9 Proposició

$\mathcal{F}^{co}(\mathbb{N})$ no és un ultrafiltre a $\mathbb{N}$.

Demostració

Sigui A el conjunt dels nombres naturals parells. Aleshores, A^c és el conjunts dels nombres naturals senars. Com que A i A^c no són finits i $(A^c)^c = A$, aleshores $A, A^c \notin \mathcal{F}^{co}(\mathbb{N})$ i, per tant, no és un ultrafiltre a $\mathbb{N}$.

2.2.10 Definició

Sigui una col·lecció no buida $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Anomenarem *filtre generat per* $\mathcal{A}$ a

$$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{A \subseteq \Omega \mid A \supseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n \text{ per algun } n \text{ i alguns } B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{A}\}.$$

En particular, si $\mathcal{A} = \{A\}$, anomenarem *filtre principal generat per* A al conjunt

$$\mathcal{F}^A = \{B \subseteq \Omega \mid A \subseteq B\}.$$

Si $\mathcal{A} = \{\{a\}\}$, anomenarem *ultrafiltre principal generat per* a al conjunt

$$\mathcal{F}^a = \{B \subseteq \Omega \mid a \in B\}.$$

2.2.11 Observació

Vegem que $\mathcal{F}^a$ és un ultrafiltre:
Siguin $A, B \in \mathcal{F}^a$. Com que $a \in A$ i $a \in B$, es compleix que $a \in A \cap B$.
Si $a \in A$, es compleix que $a \in B$ per tot B tal que $A \subseteq B \subseteq \Omega$ i, per tant, $B \in \mathcal{F}^a$.
Hem vist que $\mathcal{F}^a$ és un filtre de Ω.
Notem que $\emptyset \notin \mathcal{F}^a$, ja que $a \notin \emptyset$. Per tant, $\mathcal{F}^a$ és un filtre propi.
$\mathcal{F}^a$ és un ultrafiltre de Ω, ja que per tot $A \subseteq \Omega$ es compleix que $a \in A$ o bé $a \in A^c$.

2.2.12 Proposició

Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre i sigui $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ una col·lecció de conjunts disjunts dos a dos tal que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Aleshores es compleix que $A_i \in \mathcal{F}$ per exactament un i, on $i = 1, \cdots, n$.

Demostració

Per $n = 2$, veurem que si $A, B \notin \mathcal{F}$, es compleix que $A \cup B \notin \mathcal{F}$:
Com que $A \notin \mathcal{F}$ i $B \notin \mathcal{F}$, aleshores se satisfà que $A^c \in \mathcal{F}$ i $B^c \in \mathcal{F}$. Per tant, $A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$ i, es compleix que $A \cup B \notin \mathcal{F}$.
Per $n \geq 3$, suposem que $A_1 \in \mathcal{F}$. Aleshores se satisfà que $A_2 \cup \cdots \cup A_n \notin \mathcal{F}$ i, per tant, es compleix que $A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathcal{F}$. Com que $A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c \subseteq A_i^c$ per tot $i = 2, \cdots, n$, es compleix que $A_i^c \in \mathcal{F}$ per tot $i = 2, \cdots, n$. Així doncs, $A_i \notin \mathcal{F}$.
Si $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_n) \in \mathcal{F}$ aleshores, pel cas $n = 2$, es compleix només un de $A_1 \in \mathcal{F}$ o $A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$.
Si $A_1 \in \mathcal{F}$ ja hem acabat la demostració. Si no, aleshores $A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Aleshores només es compleix un de $A_2 \in \mathcal{F}$ o $A_3 \cup \cdots \cup A_n$. Si $A_2 \in \mathcal{F}$ ja hem acabat.
Repetim el mateix raonament fins a arribar a $A_{n-1} \cup A_n \in \mathcal{F}$. Aleshores, pel cas $n = 2$, només un és cert, $A_{n-1} \in \mathcal{F}$ o $A_n \in \mathcal{F}$.
En conclusió, si $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$, aleshores només existeix un i tal que $A_i \in \mathcal{F}$, on $1 \leq i \leq n$.

2.2.13 Proposició

Si un ultrafiltre conté un conjunt finit, aleshores conté un conjunt d'un sol element i és principal.

Demostració

Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre de Ω i sigui $A \in \mathcal{F}$ un conjunt finit. Aleshores, A està format per un nombre finit d'elements $a_1, \cdots, a_n$, i $A = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\}$.
Com que $\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{F}$, es compleix, per la proposició 2.2.12, que exactament un d'aquests $\{a_i\}$ pertany a $\mathcal{F}$.
Si $\{a_i\} \in \mathcal{F}$ i $a_i \in B$, aleshores se satisfà que $\{a_i\} \subseteq B$. Així doncs, $B \in \mathcal{F}$, ja que $\mathcal{F}$ és filtre. Per tant, $\mathcal{F} = \{B \subseteq \Omega \mid a_i \in B\}$. En conclusió, hem vist que $\mathcal{F}$ conté a $\{a_i\}$ i és un ultrafiltre principal.

2.2.14 Corol·lari

Un ultrafiltre no principal ha de contenir a tots els conjunts cofinits.

2.2.15 Definició

Una col·lecció $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ té *la propietat de la intersecció finita* , o la *pif*, si per tot $n \in \mathbb{N}$ i per tot $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ es compleix que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$.

2.2.16 Proposició

Si una col·lecció $\mathcal{A}$ té la pif, aleshores el filtre $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ és propi.

Demostració

Veurem que si $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ no és propi, aleshores $\mathcal{A}$ no té la pif.
Com que $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ no és propi, se satisfà que $\emptyset \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$. Per tant, $\emptyset \supseteq B_1 \cap \cdots \cap B_n$ per algun $n \in \mathbb{N}$ i per alguns $B_i \in \mathcal{A}$, i això contradiu la pif.

2.2.17 Proposició

$\mathcal{F}$ és un filtre propi maximal de Ω si, i només si, $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre de Ω.

Demostració

Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre i suposem que existeix un filtre $\mathcal{F}'$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.
Sigui A tal que $A \in \mathcal{F}'$ i $A \notin \mathcal{F}$. Com que $A \notin \mathcal{F}$, aleshores es compleix que $A^c \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.
Com que $A, A^c \in \mathcal{F}'$, aleshores $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}'$ i, per tant, $\mathcal{F}'$ no és propi. En conclusió, $\mathcal{F}$ és un filtre propi maximal.
Sigui, ara, $\mathcal{F}$ un filtre propi maximal i sigui $A \notin \mathcal{F}$. Vegem que $A^c \in \mathcal{F}$:
La família de conjunts $\mathcal{A} = \mathcal{F} \cup \{A^c\}$ té la pif: si no, se satisfà que $A^c \cap B = \emptyset$ per algun $B \in \mathcal{F}$. Aleshores se satisfà que $B \subset A$ i, per tant, $A \in \mathcal{F}$, contra la hipòtesi.
Aleshores, $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ és un filtre propi i conté a $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ i, com que $\mathcal{F}$ és maximal, $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ ha de coincidir amb $\mathcal{F}$ i, en particular, $A^c \in \mathcal{A}$.

2.2.18 Proposició

Sigui $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ una col·lecció de filtres de Ω linealment ordenats per $\subseteq$, és a dir, tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ o $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$ per tot $i, j \in I$. Aleshores,

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i = \{A \mid \exists i \in I \text{ tal que } A \in \mathcal{F}_i\}$$

és un filtre de Ω.

Demostració

Siguin $A, B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Aleshores, existeixen $i, j \in I$ tals que $A \in \mathcal{F}_i$ i $B \in \mathcal{F}_j$.
Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$. Aleshores, se satisfà que $A, B \in \mathcal{F}_j$ i, com que $\mathcal{F}_j$ és un filtre, es compleix que $A \cap B \in \mathcal{F}_j$. Per tant, $A \cap B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.
Ara, sigui $A \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ i sigui $B \subseteq \Omega$ tal que $A \subseteq B$. Aleshores, existeix $i \in I$ tal que $A \in \mathcal{F}_i$ i, per tant, $B \in \mathcal{F}_i$. En conclusió, $B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

2.2.19 Teorema

Una col·lecció de subconjunts de Ω que tingui la pif es pot extendre a un ultrafiltre de Ω.

Demostració

Sigui $\mathcal{A}$ una col·lecció de subconjunts de Ω amb la pif. Aleshores, per la proposició 2.2.16, el filtre $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ és propi.
Sigui $\mathcal{B}$ la col·lecció de tots els filtres propis de Ω que contenen a $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, parcialment ordenada per $\subseteq$. Aleshores, cada subconjunt linealment ordenat de $\mathcal{B}$ té una fita superior en $\mathcal{B}$, ja que per la proposició 2.2.18 , la unió d'aquesta cadena està en $\mathcal{B}$. Per tant, pel Lema de Zorn, $\mathcal{B}$ té un element maximal. És fàcil veure que aquest element és un filtre propi maximal de Ω i, per la proposició 2.2.17 , és un ultrafiltre de Ω.

2.2.20 Corol·lari

Qualsevol conjunt infinit té un ultrafiltre no principal.

Demostració

Sigui Ω un conjunt infinit. Aleshores, el filtre dels cofinits $\mathcal{F}^{co}(\Omega)$ és propi i té la pif. Per tant, pel teorema 2.2.19 , es pot extendre a un ultrafiltre $\mathcal{F}$.
Per cada $a \in \Omega$ se satisfà que $\Omega \smallsetminus \{a\} \in \mathcal{F}^{co}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}$. Per tant, es compleix que $\{a\} \notin \mathcal{F}$. Com que $\{a\} \in \mathcal{F}^a$, se satisfà que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^a$. Per tant, $\mathcal{F}$ és no principal.
En particular, $\mathbb{N}$, el conjunt dels nombres naturals, té un ultrafiltre no principal. Això és concretament el que utilitzarem a la secció següent.

2.3 Construcció de ${}^*\mathbb{R}$ per ultraproductes

Sigui $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunt de totes les successions de nombres reals. Un element de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ és de la forma $r = \langle r_1, r_2, \cdots \rangle$, amb $r_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

2.3.1 Definició

En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definim les següents operacions binàries:

$$r \oplus s = \langle r_n + s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

$$r \odot s = \langle r_n \cdot s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

2.3.2 Teorema

$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot\right)$ és un anell commutatiu amb unitat.

Demostració

Vegem que es compleixen les propietats de la definició 1.1.1:

(1) Propietat associativa de la suma:
Per tot $r, s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es compleix que $(r \oplus s) \oplus t = \langle r_n + s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \oplus \langle t_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ $= \langle (r_n + s_n) + t_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle r_n + (s_n + t_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle r_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \oplus$ $\langle s_n + t_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = r \oplus (s_n \oplus t_n)$.

(2) Propietat commutativa de la suma:
Per tot $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es compleix que $r \oplus s = \langle r_n + s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle s_n + r_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle =$ $s \oplus r$.

(3) Existència d'element neutre de la suma:
Sigui $0 = \langle 0, 0, 0, \cdots \rangle = \langle 0 \mid n \in \mathbb{N} \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Aleshores, per tot $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es compleix que $0 \oplus r = r \oplus 0 = \langle r_n + 0 \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle r_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = r$.

(4) Existència d'element oposat de la suma:
Per tot $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'element $-r = \langle -r_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ és el seu oposat.
$(-r) \oplus r = r \oplus (-r) = \langle r_n + (-r_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \langle 0 \mid n \in \mathbb{N} \rangle = 0$.

(5) Propietat associativa del producte:
Per tot $r, s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es compleix que $(r \odot s) \odot t = \langle r_n \cdot s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \odot \langle t_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle =$

$\langle (r_n \cdot s_n) \cdot t_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle r_n \cot(s_n \cdot t_n) \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle r_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle \odot$
$\langle s_n \cdot t_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = r \odot (s_n \odot t_n)$.

(6) Propietat distributiva del producte respecte de la suma:
Per tot $r, s, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es compleix que $r \odot (s \oplus t) = \langle r_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle \oplus \langle s_n + t_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle =$
$\langle r_n(s_n + t_n) \mid n \in \mathbb{N}\rangle) = \langle r_n s_n + r_n t_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle r_n s_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle \oplus$
$\langle r_n t_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = (r \odot s) \oplus (r \odot t)$.

Hem vist que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot\right)$ és un anell. Ens falta veure que el producte és commutatiu i que $1 = \langle 1, 1, \cdots\rangle$ és l'element neutre del producte. En efecte:
Per tot $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es compleix que $r \odot s = \langle r_n s_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle s_n r_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = s \odot r$.
Per tot $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es compleix que $1 \odot r = r \odot 1 = \langle r_n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle r_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = r$.
En conclusió, hem demostrat que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot\right)$ és un anell commutatiu amb unitat.

2.3.3 Observació

Notem que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no és un cos, ja que, per exemple, $\langle 1, 0, 0, \cdots\rangle \neq 0$ no té invers en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De fet, qualsevol element de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ amb almenys un zero no té invers en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.3.4 Definició

Sigui $\mathcal{F}$ un ultrafiltre no principal del conjunt $\mathbb{N}$ (existeix pel corol·lari 2.2.20) i siguin $r, s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definim la relació següent:

$$\langle r_n\rangle \equiv \langle s_n\rangle \text{ si, i només si, } \{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$$

Si $\langle r_n\rangle \equiv \langle s_n\rangle$, direm que $r = s$ *gairebé arreu mòdul* $\mathcal{F}$.

2.3.5 Proposició

La relació $\equiv$ és d'equivalència.

Demostració

Hem de veure que $\equiv$ és reflexiva, simètrica i transitiva:

(i) Per tot $\langle r_n\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el conjunt $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = r_n\} = \mathbb{N}$ pertany a qualsevol ultrafiltre $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$. En conclusió, $\langle r_n\rangle \equiv \langle r_n\rangle$.

(ii) Per tots $\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, es compleix que

$$\langle r_n \rangle \equiv \langle s_n \rangle \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid s_n = r_n\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \langle s_n \rangle \equiv \langle r_n \rangle$$

(iii) Siguin $\langle r_n \rangle, \langle s_n \rangle, \langle t_n \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Hem de veure que si $\langle r_n \rangle \equiv \langle s_n \rangle$ i $\langle s_n \rangle \equiv \langle t_n \rangle$, aleshores es compleix que $\langle r_n \rangle \equiv \langle t_n \rangle$. En efecte, com que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid s_n = t_n\} \in \mathcal{F}$, per la definició 2.2.2, apartat (i), es compleix que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid s_n = t_n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n = t_n\} \in \mathcal{F}$. Ara, com que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n = t_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid r_n = t_n\} \subseteq \mathbb{N}$, per la definició 2.2.2, apartat (ii), es compleix que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = t_n\} \in \mathcal{F}$. En conclusió, $\langle r_n \rangle \equiv \langle t_n \rangle$.

Anomenarem $^*\mathbb{R}$ al conjunt quocient $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$. Per cada $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, anomenarem $[r]$ a l'element de $^*\mathbb{R}$ format per totes les successions de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ equivalents mòdul $\mathcal{F}$ a r. És a dir, $[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid r \equiv s\}$.

2.3.6 Teorema

El conjunt $^*\mathbb{R}$, amb les operacions induïdes per les de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$[r] + [s] = [r \oplus s]$$
$$[r] \cdot [s] = [r \odot s]$$

té estructura d'anell commutatiu amb element unitat [1].

Demostració

Vegem que $\equiv$ és compatible amb les operacions. És a dir, si $r' \equiv s'$ i $r'' \equiv s''$, es compleix que $r' + r'' \equiv s' + s''$ i $r'r'' \equiv s's''$.

Com que $r' \equiv s'$ i $r'' \equiv s''$, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n = s'_n\} \in \mathcal{F}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid r''_n = s''_n\} \in \mathcal{F}$.
Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n = s'_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid r''_n = s''_n\} \in \mathcal{F}$.
Notem que $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n = s'_n, r''_n = s''_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid r'_n + r''_n = s'_n + s''_n\}$ i que $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n = s'_n, r''_n = s''_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid r'_n r''_n = s'_n s''_n\}$. Per tant, es compleix que $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n + r''_n = s'_n + s''_n\} \in \mathcal{F}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid r'_n r''_n = s'_n s''_n\} \in \mathcal{F}$.
En conclusió, se satisfà que $r' + r'' \equiv s' + s''$ i $r'r'' \equiv s's''$.
Això mostra que les definicions de les operacions en $^*\mathbb{R}$ són correctes i és trivial comprovar que totes les propietats d'anell commutatiu amb unitat, que són equacions, es preserven al quocient.

2.3.7 Definició

Direm que $[r] < [s]$ si, i només si, $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\} \in \mathcal{F}$.

2.3.8 Teorema

$({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ té estructura de cos ordenat.

Demostració

Primer, hem de veure que és un cos. És a dir, que tota classe $[r] \neq [0]$ té invers. Com que $[r] \neq [0]$, aleshores $r \not\equiv 0$ i, per tant, $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = 0\} \notin \mathcal{F}$.
Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, es compleix que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n \neq 0\} \in \mathcal{F}$.
Ara, definim la successió $s = \langle s_n \rangle$ tal que:

$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{r_n} & \text{si } r_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } r_n = 0 \end{cases}$$

Aleshores, $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n s_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid r_n \neq 0\}$. Per tant, $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n s_n = 1\} \in \mathcal{F}$ i $r \odot s \equiv 1$. Així doncs, $[r] \cdot [s] = [r \odot s] = [1]$.
Anomenarem $[r]^{-1}$ a l'invers de $[r]$.

Ara, hem de veure que la relació $<$ satisfà la definició 1.1.5:

(i) Llei de tricotomia:
Siguin $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$. Notem que $\mathbb{N}$ és la unió disjunta dels conjunts $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n = s_n\}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n > s_n\}$. Per la proposició 2.2.12, només un d'ells pertany a $\mathcal{F}$ i es compleix exactament una:

$$[r] < [s], \qquad [r] = [s], \qquad [r] > [s]$$

(ii) Propietat transitiva:
Hem de veure que per cada $[r], [s], [t] \in {}^*\mathbb{R}$ tals que $[r] < [s]$ i $[s] < [t]$ es compleix que $[r] < [t]$.
Com que $[r] < [s]$ i $[s] < [t]$, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\} \in \mathcal{F}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid s_n < t_n\} \in \mathcal{F}$. Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid s_n < t_n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid r_n < t_n\} \in \mathcal{F}$ i, per tant, $[r] < [t]$.

(iii) Hem de veure que per tots $[r], [s], [t] \in {}^*\mathbb{R}$ tals que $[r] < [s]$, es compleix que $[r] + [t] < [s] + [t]$.

En efecte, com que $[r] < [s]$, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\} \in \mathcal{F}$. Notem que $\{n \in \mathbb{N} \mid r_n < s_n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid r_n + t_n < s_n + t_n\}$ i, per tant, $[r \oplus t] < [s \oplus t]$. En conclusió, $[r] + [t] < [s] + [t]$.

(iv) Hem de veure que per tots $[r], [s] \in {}^*\mathbb{R}$ tals que $0 < [r]$ i $0 < [s]$ es compleix que $0 < [r] \cdot [s]$.
En efecte, com que $0 < [r]$ i $0 < [s]$, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < r_n\} \in \mathcal{F}$ i $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < s_n\} \in \mathcal{F}$. Per tant, com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, es compleix que $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < r_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < s_n\} \in \mathcal{F}$.
Com que $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < r_n\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < s_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < r_n s_n\}$ i $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, se satisfà que $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < r_n s_n\} \in \mathcal{F}$. Per tant, es compleix que $0 < [r] \cdot [s]$.

Hem demostrat que $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ és un cos ordenat.

Associem un nombre real r amb la successió constant $\langle r, r, r, \cdots \rangle$ i, per tant, l'identifiquem amb l'element de ${}^*\mathbb{R}$

$$ {}^*r = [\langle r, r, \cdots \rangle] $$

2.3.9 Teorema

Siguin ${}^*r, {}^*s \in {}^*\mathbb{R}$ associats a dos nombres reals r i s respectivament. Aleshores

(1) ${}^*r + {}^*s = {}^*(r+s)$.

(2) ${}^*r\ {}^*s = {}^*(rs)$.

(3) $r < s$ si, i només si, ${}^*r < {}^*s$.

(4) Si $r \neq s$, aleshores se satisfà que ${}^*r \neq {}^*s$.

Per tant, la funció $r \mapsto {}^*r$ és una immersió de cossos ordenats que injecta $\mathbb{R}$ dintre de ${}^*\mathbb{R}$.

Demostració

(1) ${}^*r + {}^*s = [\langle r, r, \cdots \rangle] + [\langle s, s, \cdots \rangle] = [\langle r, r, \cdots \rangle \oplus \langle s, s, \cdots \rangle] = [\langle r+s, r+s, \cdots \rangle]$
$= {}^*(r+s)$.

(2) ${}^*r \cdot {}^*s = [\langle r, r, \cdots \rangle] \cdot [\langle s, s, \cdots \rangle] = [\langle r, r, \cdots \rangle \odot \langle s, s, \cdots \rangle] = [\langle r \cdot s, r \cdot s, \cdots \rangle]$
$= {}^*(rs)$.

(3) Si $r < s$, aleshores $\{n \in \mathbb{N} \mid r < s\} = \mathbb{N}$. Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ i, per tant, $[r] < [s]$. En conclusió, $^*r < {}^*s$.
Si $^*r < {}^*s$, aleshores $[r] < [s]$. És a dir, $\{n \in \mathbb{N} \mid r < s\} \in \mathcal{F}$. El conjunt $\{n \in \mathbb{N} \mid r < s\}$ és $\emptyset$ o bé $\mathbb{N}$. Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Aleshores, $\{n \in \mathbb{N} \mid r < s\} \in \mathcal{F}$ i, per tant, $r < s$.

(4) Si $r \neq s$, aleshores $\{n \in \mathbb{N} \mid r \neq s\} = \mathbb{N}$. Com que $\mathcal{F}$ és un ultrafiltre, $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ i, per tant, $[r] \neq [s]$. En conclusió, $^*r \neq {}^*s$.

2.3.10 Teorema

El cos $^*\mathbb{R}$ que hem construït compleix els axiomes del cos de nombres hiperreals de la definició 2.1.1.

Demostració

Hem vist que el cos $^*\mathbb{R}$ que hem construït és ordenat (teorema 2.3.8) i conté a $\mathbb{R}$ (teorema 2.3.9).
Considerem la successió $\varepsilon = \left\langle \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$. Per qualsevol ultrafiltre no principal $\mathcal{F}$, es compleix que

$$\left\{ n \in \mathbb{N} \mid 0 < \frac{1}{n} \right\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$$

Per tant, $[0] < [\varepsilon]$ a $^*\mathbb{R}$.
Per qualsevol nombre real positiu a, el conjunt $\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < a \right\}$ és cofinit, ja que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix a 0 en $\mathbb{R}$. Com que $\mathcal{F}$ és no principal, per la proposició 2.2.14, es compleix que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Per tant, $[\varepsilon] < {}^*r$.
En conclusió, $[\varepsilon]$ és un infinitesimal positiu.
Hem provat els apartats (i) i (ii) de la definició axiomàtica de $^*\mathbb{R}$.
Queden per demostrar els apartats (iii) i (iv) de la definició 2.1.1. Això es fa considerant $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$ com a $\mathcal{L}$-estructures per cossos ordenats a un llenguatge de primer ordre convenient, i utilitzant un dels teoremes més famosos de la teoria de models, el teorema de Łoś, que essencialment demostra que un ultraproducte d'una estructura satisfà les mateixes sentències de primer ordre que l'estructura original.
El punt (iii) s'imposa artificialment, ja que el llenguatge utilitzat conté totes les relacions i funcions de $\mathbb{R}$, i per tant quan aquests símbols s'interpreten en $^*\mathbb{R}$ defineixen les relacions i funcions d'aquest conjunt, que són les extensions naturals de (iii).
Que gràcies a aquestes extensions naturals es compleixen (iv) és el que necessita l'esmentat teorema de Łoś, i la seva descripció i la seva aplicació al cas de $\mathbb{R}$ i $^*\mathbb{R}$ sobrepassen de llarg l'abast d'aquest treball.

Bibliografia

[1] Linés Escardó, E. *Principios de análisis matemático.* Barcelona [etc.]: Reverté, DL 1983. ISBN 8429150722.

[2] Rudin, Walter. *Principios de análisis matemático.* 3a edició. Mèxic, D.F. [etc.]: McGraw-Hill, 1980. ISBN 9686046828

[3] Ortega Aramburu, Joaquín M. *Introducción al análisis matemático.* Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona : Labor, 1993. ISBN 843353047X.

[4] Landau, Edmund. *Foundations of analysis.* 3a edició. Nova York: AMS Chelsea Publishing, 1966.

[5] Keisler, H.Jerome. *Elementary calculus: An infinitesimal approach.* 2a edició. Boston: PWS-Kent, cop. 1986. ISBN 0871509113.

[6] Goldblatt, Robert. *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis.* Nova York [etc.]: Springer, cop.1998. ISBN 038798464X

[7] Mendelson, Elliot. *Introduction to mathematical logic.* 5a edició. Boca Raton: CRC Press, cop. 2010. ISBN 9781584888765.

[8] University of St Andrews Scotland. *The MacTutor History of Mathematics archive* [en línia]. [Consulta: 26 Gener 2015]. Disponible en: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html`