Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Estratègies d'inversió a temps continu sota el model brownià geomètric

---

Marc Boixadera Sanchís

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística

Barcelona, 30 de juny de 2015

Abstract

The main goal of this project is to study the hedging strategy's problem under the Geometric Brownian Motion market model. Because it is a continuous time model, it will be necessary to study the most important tools in stochastic calculus, like the Brownian motion, martingales, the stochastic integral, and finally, the Itô's formula. Once it is done, we will introduce the financial markets, the the Black-Scholes market model under the non-arbitrage principle and it's hedging strategies.

Resum

L'objectiu del treball és estudiar el problema de les estratègies de cobertura sota un model de preus brownià geomètric. Tractant-se d'un model a temps continu caldrà previament estudiar les eines necessàries de càlcul estocàstic (moviment brownià, martingales, integració estocàstica, fórmula d'Itô) Un cop fet això, s'introdueixen els mercats financers, el model de mercat de Black-Scholes sota el principi de no arbitratge, i la estratègia de cobertura adecuada d'una opció europea.

Índex

1 Introducció

Estructura de la Memòria

La memòria està dividida principalment en quatre parts.
Des del principi, es donen per coneguts tots els conceptes matemàtics impartits al llarg de les assignatures obligatòries del Grau de Matemàtiques. Tot i això, per al desenvolupament del projecte, és necessari introduir nous conceptes.
Això es fa al llarg del primer capítol, on comencem parlant de processos estocàstics i del moviment Brownià com a tipus de martingala. A continuació arriba una part molt important del treball, ja que definim un tipus d'integral que no havíem vist en el càlcul ordinari: la integral d'Itô. Això ens porta a parlar del Càlcul d'Itô, necessari per poder diferenciar correctament els processos estocàstics. S'introdueixen les equacions diferencials estocàstiques i es presenta el moviment Brownià geomètric. Per acabar la primera part, es dóna un mètode per canviar la mesura de probabilitat d'una variable aleatòria sense canviar la seva distribució, conegut com el Teorema de Girsanov.

En la següent part, es fa una petita i breu introducció del que són els derivats financers i se'n defineixen alguns tipus. Posteriorment, s'introdueix el tipus de model de mercat bastant simple, en el que només hi ha un actiu amb risc, amb el que es treballarà.

En el següent capítol, apliquem tots els conceptes introduïts en la primera part per tal de poder valorar el preu de les opcions de manera justa, sense qui hi hagi arbitratge. Un cop fet això, s'estableix una estratègia de cobertura sota el model Black-Scholes.

L'última part de la memòria està dedicada a fer una extensió del capítol anterior, analitzant el cas d'un model de mercat amb més d'un actiu amb risc.

2 Conceptes matemàtics previs

2.1 Processos estocàstics

De manera general, podríem parlar de processos estocàstics com a processos físics que varien amb el temps i que tenen una certa component aleatòria.
De manera més estricta, sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat i $\mathbb{T} = [0, T]$.

Definició 2.1.1. Un procés estocàstic real a temps continu

$$X = \{X(t, w) : t \in \mathbb{T}, w \in \Omega\}$$

és una família de variables aleatòries indexada pel temps i definida en l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

D'aquesta manera, $X(t, \cdot)$ és una variable aleatòria que defineix el procés en l'instant t.
D'altra banda, si fixéssim $w \in \Omega$, tindríem que $X(\cdot, w)$ ens definiria la trajectòria del procés al llarg del temps, en l'estat w.

Donat que un procés és una successió de variables aleatòries, també podem definir la seva funció de distribució:

$$F(t, x) = P(X(t) \leq x).$$

Fem una repassada ara als diferents tipus de continuïtat que pot presentar un procés estocàstic, ja que al cap i a la fi és una funció aleatòria que depèn del temps. Un procés estocàstic presenta:

- Continuïtat en mitjana quadràtica si,

$$\lim_{s \to t} \mathbb{E}\left(|X(s, w) - X(t, w)|^2\right) = 0$$

- Continuïtat amb probabilitat 1, també anomenada continuïtat quasi segura, si

$$P(w : X(\cdot, w) \text{ és una funció continua}) = 1$$

- Continuïtat en probabilitat si

$$\lim_{s \to t} P(w : |X(s, w) - X(t, w)| > \epsilon) = 0, \ \forall \epsilon > 0$$

2.2 Martingales

Les martingales són una gran eina dins de la teoria de les finances. En el món dels mercats financers, és de gran interès poder fer prediccions de futur donada la informació que tenim en un cert instant. Aquestes prediccions les podem expressar de la següent manera:

$$\mathbb{E}_t\left[X(T)\right] = \mathbb{E}\left[X(T)|\mathcal{F}_t\right], \quad t \leq T$$

El que farem en aquest apartat serà intentar classificar els processos continus segons la tendència que mostrin.
Partim de l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suposem que el temps és continu i $t \in [0, \infty)$.

Definició 2.2.1. La família de conjunts $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on cada $\mathcal{F}_t$ conté tota la informació que es té a l'instant t. Aquesta família, que compleix

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T, \forall\ 0 \leq t \leq T$$

s'anomena *filtració*.
En conseqüència amb la definició, a l'espai $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}\right)$ se l'anomena *espai filtrat*.

Per entrar a definir el concepte de martingala encara ens faltaria definir un altre concepte.

Definició 2.2.2. Sigui $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ unprocés estocàstic.
Diem que X és adaptada si $\forall t$, $X(t)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable. És a dir, si donada la informació $\mathcal{F}_t$ podem saber el valor exacte de $X(t)$.

Definició 2.2.3. Un procés X és previsible respecte la filtració $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si qualsevol $X(t)$ és $\mathcal{F}_{t-}$-mesurable, on $\mathcal{F}_{t-} = \cup_{s<t}\mathcal{F}_s$

Definició 2.2.4. Un procés $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ és una martingala, relativa a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si compleix:

(i) X és adaptada.

(ii) $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$.

(iii) $\mathbb{E}\left[X(T)|\mathcal{F}_t\right] = X(t), \quad \forall t \leq T$.

D'altra banda, direm que $X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ és una *supermartingala* si compleix les dues primeres propietats, però, enlloc de la tercera, es dóna que $\mathbb{E}\left(X(T)|\mathcal{F}_t\right) \leq X(t)$, $\forall t < T$. Anàlogament, una *submartingala* complirà també les dues primeres propietats, però en el tercer cas tindrem $\mathbb{E}\left(X(T)|\mathcal{F}_t\right) \geq X(t)$, $\forall t < T$.

En definitiva, l'última propietat de les martingales ens diu que, en l'instant t, la millor que predicció d'un futur valor del procés és el valor que tenim en l'instant t.

Definició 2.2.5. Un conjunt de variables aleatòries K contingut en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'espai que conté les variables aleatòries de l'espai i que són un cop integrables, es diu que és uniformement integrable si

$$\int_{\{|X|\geq c\}} |X| dP$$

convergeix a 0 uniformement en $X \in K$ quan $c \longrightarrow \infty$.

Podem extendre la definició anterior a l'entorn de les martingales:

Definició 2.2.6. Una martingala $\{M(t)\}$, $t \in [0, \infty]$ (o bé en $[0, T]$), és uniformement integrable si el conjunt de variables aleatòries que formen la martingala és uniformement integrable.

En aquest cas, es té que $M(\infty) = \lim M(t)$ en l'espai $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Per tant, $\{M(t)\}$ és una martingala en $[0, \infty]$ i es compleix que

$$M(t) = \mathbb{E}\left[M(\infty) | \mathcal{F}_t\right] \text{ q.s. } \forall t$$

2.2.1 Moviment Brownià

Unes de les martingales a temps continu més importants són les classificades com a moviment Brownià:

Definició 2.2.7. Un moviment Brownià estàndard $\{B(t)\}$, $t \geq 0$, és un procès estocàstic que compleix:

(1) $B(0) = 0$.

(2) $B(t)$ és continu en t.

(3) $B(t)$ té increments independents ($\forall\ s \leq t, B(t) - B(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s$) i estacionaris ($\forall\ s \leq t, B(t) - B(s)$ té la mateixa llei que $B(t) - B(0)$).

(4) per a $s \leq t$, $B(t) - B(s)$ és una variable aleatòria amb distribució normal, amb les propietats:

- $\mathbb{E}\left[B(t) - B(s)\right] = 0$
- $\mathrm{Var}\left[B(t) - B(s)\right] = \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^2\right] = t - s$

Anem a demostrar ara que un moviment Brownià estàndard compleix les propietats de martingala:

Teorema 2.2.8. *Sigui $\{B(t)\}$ un moviment Brownià estàndard respecte la filtració $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Aleshores,*

(i) $\{B(t)\}$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala.

(ii) $\{B(t)^2 - t\}$ *és una* $\mathcal{F}_t$*-martingala.*

(iii) $\{\exp(\sigma B(t) - (\sigma^2/2)\, t)\}$*, amb* $\sigma > 0$ *és una* $\mathcal{F}_t$*-martingala.*

Demostració. (i) Per les propietats (3) i (4) de la definició del moviment Brownià, tenim que $\mathbb{E}[B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B(t) - B(s)] = 0$. En conseqüència, $\mathbb{E}[B(t)|\mathcal{F}_s] = B(s)$.

(ii) Tenim $\mathbb{E}[B(t)^2 - B(s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s))|\mathcal{F}_s\right] =$
$= \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^2\right] + 2B(s)\mathbb{E}[(B(t) - B(s))|\mathcal{F}_s]$.
El segon terme de la suma és zero, com hem pogut comprovar unes línies més amunt.
Un altre cop per la independència de $B(t) - B(s)$ respecte la filtració $\mathcal{F}_t$, tenim
$$\mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B(t) - B(s))^2\right] = t - s$$
Aquest últim pas resulta de la propietat (4) de la definició de moviment Brownià.
Aleshores tenim
$$\mathbb{E}\left[B(t)^2 - B(s)^2|\mathcal{F}_s\right] = t - s \Rightarrow \mathbb{E}\left[B(t)^2 - t|\mathcal{F}_s\right] = B(s)^2 - s$$
i, per tant, $B(t)^2 - t$ és una $\mathcal{F}_t$-martingala.

(iii) Per a demostrar aquesta última propietat, recordem que si Z és una variable aleatòria amb distribució normal estàndard amb densitat $\left(1/\sqrt{2\pi}\right) e^{-x^2/2}$, aleshores, $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Z}\right] = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-x^2/2} dx = e^{\lambda^2/2}$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$.
Per tant, per a $s < t$,
$$\mathbb{E}\left[e^{\sigma B(t) - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sigma(B(t) + B(s) - B(s)) - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s\right] =$$
$$= e^{\sigma B(s) - \sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(B(t) - B(s))}|\mathcal{F}_s\right]$$
Ara, per la independència dels increments,
$$e^{\sigma B(s) - \sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(B(t) - B(s))}|\mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma B(s) - \sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(B(t) - B(s))}\right]$$
i per l'estacionarietat ens queda
$$e^{\sigma B(s) - \sigma^2 t/2}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B(t-s)}\right]$$
Aleshores, del fet que $\sigma B(t-s)$ és una variable aleatòria $N(0, \sigma^2(t-s))$, i que Z és $N(0,1)$, tenim que $\sigma B(t-s)$ té la mateixa llei que $\sigma\sqrt{t-s}Z$.
Per tant, $\mathbb{E} = \left[e^{\sigma B(t-s)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sigma\sqrt{t-s}Z}\right] = e^{\sigma^2(t-s)/2}$.
Del resultat anterior, podem escriure ara
$$\mathbb{E}\left[e^{\sigma B(t) - \sigma^2 t/2}|\mathcal{F}_s\right] = e^{\sigma B(s) - \sigma^2 t/2} e^{\sigma^2(t-s)/2} = e^{\sigma B(s) - \sigma^2 s/2}$$
amb el que hem provat el resultat.

□

Abans de seguir, hem de fer una observació poc rigurosa però necessària: per la definició del moviment Brownià, $\mathrm{Var}\,(dB(t)) = dt$, pel que la seva desviació típica serà $\sqrt{dt}$.
El que podem dir d'això és que, deixant passar un interval de temps dt, el moviment Brownià haurà variat en mesura $\sqrt{dt}$: $dB(t) = \sqrt{dt}$.
D'aquest fet en podem treure una conclusió important, i és que el moviment Brownià és continu per no diferenciable respecte del temps. Veiem-ho:
És continu per definició. Ara bé,

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{\sqrt{dt}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{dt}}$$

que en temps continu, quan $dt \longrightarrow 0$, $\frac{dB(t)}{dt} \longrightarrow \infty$ i la derivada no està definida en cap punt.

Definició 2.2.9. Sigui $\Pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ una partició de $[0, T]$ i $X(t)$ un procés estocàstic definit en aquest interval.
Definim per

$$[X, X](T) = \lim_{\|\Pi \to 0\|} \sum_{i=0}^{n-1} [X(t_{i+1} - t_i]^2$$

la variació quadràtica del procés X fins l'instant T.

Teorema 2.2.10 (Teorema de Lévy)**.** *Sigui $M(t)$ una martingala contínua respecte a la filtració $\mathcal{F}_t$. Suposem que $M(0) = 0$ i que $[M, M] = t$, $\forall t \geq 0$.*
Aleshores, $M(t)$ és un moviment Brownià.

2.3 Integrals estocàstiques

La necessitat d'obtenir equacions diferencials que modelin l'evolució d'una cartera ens porta a voler estudiar la integrabilitat en un entorn estocàstic. El teorema fonamental del càlcul ens diu que per a cada equació diferencial ordinària, existeix una equació integral corresponent.
En un entorn estocàstic, en canvi, on rebem informació imprevisible cada cert temps i hi ha el punt d'aleatòrietat, no podem aplicar aquest argument.

Tot i que encara no haguem entrat en el tema, definirem una equació diferencial estocàstica (EDE) de la forma:

$$dX(t) = a_t dt + \sigma_t dB(t),$$

on $a_t = a\,(X(t), t)$ representa el coeficient de tendència (ò *drift*) i $\sigma_t = \sigma\,(X(t), t)$ representa el coeficient de volatilitat de $X(t)$.
Més tard estudiarem una mica més a fons les propietats de les EDE's.

Ara, si volem prendre integrals en l'equació anterior,

$$\int_0^t dX(s) = \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB(s)$$

veiem que la primera integral de la dreta és pot prendre com una integral de Riemann. Ara bé, la segona integral és respecte als increments d'un moviment Brownià. Com hem vist abans, el moviment Brownià no és integrable en cap punt. Per tant, no podem utilitzar les eines de diferenciació i integració a les que estem acostumats en el càlcul ordinari.

És per això que necessitem introduir una eina per poder fer aquest tipus de càlculs. Aquesta eina és la integral d'Itô. Per a entendre millor com es defineix aquesta integral, fem una ràpida repassada a la construcció de la integral Riemann-Stieltjes.

2.3.1 Integral Riemann-Stieltjes

Sigui x_t variable determinista del temps, i $F(x_t)$ una funció no aleatòria contínua i diferenciable amb derivada

$$\frac{dF(x_t)}{dx_t} = f(x_t)$$

Aleshores, la integral Riemann-Stieltjes existeix i és de les formes

$$\int_0^T f(x_t)\, dx_t = \int_0^T dF(x_t)$$

En la primera integral, el que es fa és agafar el valor de $f(\cdot)$ en cada x_t i multiplicar-lo per l'increment dx_t. Al sumar tots aquest incontables valors, obtenim la integral. En la segona integral, simplement sumem els incontables increments de la funció $F(\cdot)$ per a obtenir la integral.
Podem agafar aquesta segona representació per extendre-la a altres casos, com

$$\int_0^T g(x_t)\, dF(x_t)$$

En aquest cas, per calcular la integral, partim l'interval $[0, T]$ en n intervals de manera que

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

Aleshores, definim la suma de Riemann com

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x_{t_{i+1}}\right) \left[F\left(x_{t_{i+1}}\right) - F\left(x_{t_i}\right)\right],$$

que és la suma de rectangles amb base $\left[F\left(x_{t_{i+1}}\right) - F\left(x_{t_i}\right)\right]$ i alçada $g\left(x_{t_{i+1}}\right)$.
Si fem la partició més fina; és a dir, fem que cada t_i sigui més proper dels seus consecutius, l'aproximació serà cada cop més acurada.
Per tant, si g és integrable, definirem la integral Riemann-Stieltjes com el límit

$$\lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x_{t_{i+1}}\right) \left[F\left(x_{t_{i+1}}\right) - F\left(x_{t_i}\right)\right] = \int_0^T g(x_t)\, dF(x_t)$$

2.3.2 Integral d'Itô

Definició 2.3.1. Sigui $\Gamma(t)$ un procés estocàstic en l'interval $[0, T]$. Recuperant la partició anterior, diem que $X(t)$ és un procés simple si és constant en t per a cada subinterval $[t_i, t_{i+1})$.

Sigui $\Gamma(t)$ un procés simple. Si, t$\in$ $[t_k, t_{k+1})$ aleshores definim la integral d'Itô de $\Gamma(t)$ respecte el moviment Brownià $B(t)$ com

$$I(t) = \int_0^t \Gamma(s)dB(s) = \sum_{i=0}^{k-1} \Gamma(t_i)\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big) + \Gamma(t_k)\big(B(t) - B(t_k)\big)$$

Proposició 2.3.2. *Sigui $\Gamma(t)$ un procés simple $\mathcal{F}_t$-adaptat. Aleshores, la integral d'Itô de $\Gamma(t)$ respecte del moviment Brownià $B(t)$,*

$$\int_0^t \Gamma(s)dB(s)$$

és una martingala.

Demostració. Siguin s, t tals que $0 \leq s < t \leq T$ i de manera que s i t estan en diferents subintervals de la partició. Suposem que $s \in [t_m, t_{m+1})$ i $t \in [t_k, t_{k+1})$. Hem de provar que $\mathbb{E}[I(t)|\mathcal{F}(s)] = I(s)$. Aleshores,

$$I(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \Gamma(t_i)\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big) + \Gamma(t_m)\big(B(t_{m+1}) - B(t_m)\big) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{k-1} \Gamma(t_j)\big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\big) + \Gamma(t_k)\big(B(t) - B(t_k)\big)$$

Observem que per ser $s \geq t_m$, aleshores l'esperança condicionada del primer sumatori queda invariant, ja que les variables aleatòries de tots els sumands són $\mathcal{F}(s)$-mesurables. Analitzem ara el segon dels quatre termes:

$$\mathbb{E}\big[\Gamma(t_m)\big(B(t_{m+1}) - B(t_m)\big)|\mathcal{F}(s)\big] = \Gamma(t_m)\mathbb{E}\big[B(t_{m+1})|\mathcal{F}(s)\big] - B(t_m) =$$

$$= \Gamma(t_m)\big(B(s) - B(t_m)\big)$$

De manera que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{m-1} \Gamma(t_i)\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big) + \Gamma(t_m)\big(B(t_{m+1}) - B(t_m)\big)\bigg|\mathcal{F}(s)\right] = I(s)$$

El que falta veure és que l'esperança condicionada dels dos últims termes és zero. Per fer-ho, utilitzarem una de les propietats de l'esperança condicionada: Qualsevol dels sumands del tercer terme és de la forma $\Gamma(t_j)\big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\big)$, on $s < t_{m+1} \leq t_j$. Aleshores,

$$\mathbb{E}\left[\Gamma(t_j)\big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\big)|\mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\Gamma(t_j)\big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\big)|\mathcal{F}(t_j)\right]|\mathcal{F}(s)\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\Gamma(t_j)\big(\mathbb{E}\left[B(t_{j+1})|\mathcal{F}(t_j)\right] - B(t_j)\big)|\mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\left[\Gamma(t_j)\big(B(t_j) - B(t_j)\big)|\mathcal{F}(s)\right] = 0$$

Extenent aquest raonament a tot el sumatori, obtenim que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m+1}^{k-1}\Gamma(t_j)\big(B(t_{j+1}) - B(t_j)\big)|\mathcal{F}(s)\right] = 0$$

Finalment, i de manera anàloga, obtenim que

$$\mathbb{E}\left[\Gamma(t_k)\big(B(t) - B(t_k)\big)|\mathcal{F}(s)\right] = 0.$$

□

Ara és el moment de definir la integral d'Itô per a processos generals, i posteriorment explicarem què és el que fa possible procedir amb aquest tipus d'integració.

Definició 2.3.3. Sigui l'aproximació de l'EDE

$$X(t) - X(t_{i-1}) = a\left(X(t_{i-1}), t_i\right)h + \sigma\left(X(t_{i-1}), t_i\right)\big(B(t_i) - B_{t(i-1)}\big)$$

on $(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ és un moviment Brownià amb esperança 0 i variància h.
A més, imposem que $\sigma\left(X(t), t\right)$ sigui una funció $\mathcal{F}_t$-adaptada i que compleix

$$E\left[\int_0^T \sigma\left(X(t), t\right)^2 dt\right] < \infty$$

Definim la integral d'Itô de σ respecte el moviment Brownià $B(t)$, com el límit en mitjana quadràtica

$$\int_0^T \sigma\left(X(t), t\right) dB(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}\sigma\left(X(t_{i-1}), t_i\right)\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)$$

El fet que s'utilitzi el límit en mitjana quadràtica és perquè, a mesura que n tendeix a infinit,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma\left(X(t_{i-1}), t_i\right)\left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) - \int_0^T \sigma\left(X(u), u\right) dB(u)\right]^2 \longrightarrow 0,$$

és a dir la variància de la diferència de les dues representacions va cap a 0.

2.4 Càlcul d'Itô

En la secció anterior hem parlat de les integrals estocàstiques. Ara, necessitem introduir la diferenciació en un entorn estocàstic. Per a fer-ho, ens servirem del Lema d'Itô, que ens ajudarà a resoldre equacions diferencials estocàstiques.
Definim primer els processos per als quals és aplicable el Càlcul d'Itô:

Definició 2.4.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat amb la filtració $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ i $\{B(t)\}$ un $\mathcal{F}_t$-moviment Brownià. Un procés d'Itô es defineix com

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB(s)$$

on,

- $X(0)$ és $\mathcal{F}_0$-mesurable
- a_t i σ_t són $\mathcal{F}_t$-adaptats
- $\int_0^t |a_s|\, ds < \infty$ i $\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < \infty$ q.s.

Aquest tipus de processos tenen la propietat de la unicitat:

Proposició 2.4.2. *Sigui* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *un procés d'Itô amb les representacions*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB(s)$$

i

$$X(t) = X(0)' + \int_0^t a'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dB(s)$$

Aleshores, $X(0) = X(0)'$, $a_t = a'_t$ *i* $\sigma_t = \sigma'_t$. *És a dir, que el procés d'Itô té representació única.*

Recordem que, per la definició de moviment Brownià,

$$\mathbb{E}\left[|B(t) - B(s)|^2\right] = |t - s| \Rightarrow \mathbb{E}\left[dB(t)^2\right] = dt$$

Per tant, seguint la fórmula de Taylor del càlcul ordinari,

$$F(B(t)) = F(B(0)) + F'(B(t))\, dB(t) + \frac{1}{2} F''(B(t))\, (dB(t))^2$$

i, utilitzant la propietat que acabem de recordar, obtenim

$$F(B(t)) = F(B(0)) + F'(B(t))\, dB(t) + \frac{1}{2} F''(B(t))\, dt$$

A continuació, enunciem el Lema d'Itô formalment:

Lema 2.4.3 (Lema d'Itô). *Sigui* $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ *un procés d'Itô*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB(s),$$

$F(t,x) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable en la primera variable, dues vegades diferenciable en la segona i amb les respectives derivades contínues.*
Aleshores,

$$F(t, X(t)) = F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\delta F}{\delta s}(s, X(s))\, ds + \int_0^t \frac{\delta F}{\delta x}(s, X(s))\, a_s ds +$$

$$+\int_0^t \frac{\delta F}{\delta x}(s, X(s))\,\sigma_s dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\sigma_s^2 ds$$

o, alternativament, en l'expressió diferencial,

$$dF(t, X(t)) = \frac{\delta F}{\delta t}(t, X(t))\,dt + \frac{\delta F}{\delta x}(t, X(t))\,a_t dt + \frac{\delta F}{\delta x}(t, X(t))\,\sigma_t dB(t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\sigma_t^2 dt$$

Per acabar la secció, donarem uns exemples d'aplicacions de la fórmula d'Itô que ens seran útils d'ara en endavant.

2.4.1 Fórmula d'Itô com a eina de derivació

Suposem que tenim la funció

$$f(t, B(t)) = B(t)^2 + t$$

i volem calcular df.
Aplicant la fórmula d'Itô, obtenim

$$df(t, B(t)) = dt + 2B(t)dB(t) + \frac{1}{2}2dt = 2dt + 2B(t)dB(t)$$

Hem trobat l'equació diferencial estocàstica de la funció $f(t, B(t))$, juntament amb els paràmetres de deriva i volatilitat.
Per acabar de veure les diferències amb la derivació ordinària, si haguéssim utilitzat les normes habituals, haguéssim obtingut

$$df(t, B(t)) = dt + 2B(t)dB(t),$$

on no apareix el segon termde dt.

2.4.2 Fórmula d'Itô com a eina d'integració

Suposem ara que volem calcular la integral estocàstica

$$\int_0^t B(s)dB(s),$$

on $B(t)$ és un moviment Brownià.
Podriem calcular-la usant el límit en mitjana quadràtica, però existeix una manera que simplifica molt el càlcul.
Definim la funció

$$f(t, B(t)) = \frac{1}{2}B(t)^2$$

Observem que hem agafat aquesta equació com si haguéssim integrat la integral que hem descrit anteriorment sense tenir en compte que és una integral estocàstica.
Apliquem ara la fórmula d'Itô:

$$df(t, B(t)) = 0 + B(t)dB(t) + \frac{1}{2}dt$$

de manera que, alternativament,

$$f(t, B(t)) = \frac{1}{2}\int_0^t ds + \int_0^t B(s)dB(s).$$

Igualant termes i calculant la primera integral,

$$\frac{1}{2}B(t)^2 = \frac{1}{2}t + \int_0^t B(s)dB(s)$$

i, aïllant la integral,

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}\left(B(t)^2 - t\right).$$

2.5 Equacions diferencials estocàstiques

Amb tot el que hem introduït en les seccions anteriors, ja podem parlar de les equacions diferencials estocàstiques i de les seves solucions amb més facilitat. Recordem que una EDE és de la forma

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dB(t)$$

Definició 2.5.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat amb la filtració $\mathcal{F}_t$. Sigui $B(t)$ un $\mathcal{F}_t$-moviment Brownià i $a(t,x), \sigma(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sigui, a més, ξ una variable aleatòria $\mathcal{F}_0$-mesurable.
Un procés $X(t)$ és una solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dB(t)$$

amb condició inicial $X(0) = \xi$ si, $\forall t$,

$$\int_0^t a(s, X(s))\,ds, \quad \int_0^t \sigma(s, X(s))\,ds$$

són L^1 i L^2, respectivament, i compleixen

$$X(t) = \xi + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dB(s)$$

Com observem, el procés $X(t)$ que és solució de l'equació diferencial estocàstica, és un procés d'Itô.

Teorema 2.5.2. *Suposem que, a banda de complir les propietats anteriors, ξ, a i σ compleixen aquestes tres propietats:*

- $|a(t,x) - a(t,x')| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,x')| \leq K|x - x'|$
- $|a(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K\left(1 + |x|^2\right)$

- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty$

Aleshores existeix una única solució $X(t)$ de l'equació diferencial estocàstica abans descrita que, a més, compleix

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|^2\right] < \infty.$$

2.5.1 El moviment Brownià geomètric

Els moviments Brownians geomètrics són la família de processos que són solució de les equacions diferencials estocàstiques de la forma

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma X(t)dB(t)$$

amb condició inicial $X(0) = x$, i $a, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
Aquesta equació s'utilitza per modelar preus d'actius en els mercats financers, per aquest motiu ens és de gran interès.
Per buscar la solució d'aquesta equació diferencial estocàstica, agafem $f(X(t)) = \log X(t)$.
Ara, aplicant el Lema d'Itô, obtenim

$$\log X(t) = \log x + \int_0^t \frac{1}{X(s)}dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X(s)^2}\sigma^2 X(s)^2 (dB(s))^2 =$$
$$= \log x + \int_0^t \frac{1}{X(s)}aX(s)ds + \int_0^t \frac{1}{X(s)}\sigma X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma ds =$$
$$= \log x + \int_0^t ads + \int_0^t \sigma dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

Calculant les integrals i reordenant, obtenim

$$\log\frac{X(t)}{x} = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)$$

i, finalment,

$$X(t) = x\exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right)$$

On $X(t)$ és el buscat moviment Brownià geomètric.

2.6 El teorema de Girsanov

Podem parlar de les probabilitats com un tipus de mesura dels valors que pot prendre una variable aleatòria en un interval petit. De fet, una probabilitat és una funció que pren valors a $[0, 1]$.
En aquesta secció tractarem les eines que permeten canviar aquesta mesura de probabilitat sense modificar la variable aleatòria en si. Tot i que el tema és molt més ampli, ens centrarem en un dels mètodes per canviar la mitjana de la variable aleatòria. Com veurem, aplicant aquests mètodes, la resta de propietats queden intactes. Abans, però, necessitem introduir uns quants conceptes:

Definició 2.6.1. Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat. Una probabilitat $\widetilde{P}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ és absolutament contínua respecte una probabilitat P si $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que

$$\forall A \in \mathcal{F}, P(A) = 0 \Rightarrow \widetilde{P}(A) = 0.$$

Definició 2.6.2. Dues probabilitats P i $\widetilde{P}$ són equivalents si són absolutament contínues l'una de l'altra.

En altres paraules, dues probabilitats són equivalents si assignen probabilitats positives als mateixs conjunts.

En aquest cas, una mesura representarà les propietats reals, mentre que la segona serà una probabilitat sintètica.
Quin sentit té voler trobar una probabilitat que no reflexa la realitat?
Si hem de calcular una esperança, i els càlculs ens són més senzills amb la segona mesura, val la pena fer el canvi. A més, com veurem a continuació, el fet que dues probabilitats siguin equivalents, sempre ens permetrà passar d'una a l'altra i fer el camí invers. Per tant, un cop fets els càlculs oportuns, sempre podem tornar a la mesura inicial.
A continuació definim l'eina per fer-ho:

Definició 2.6.3. Siguin $P, \widetilde{P}$ dues probabilitats equivalents en l'espai $(\Omega, \mathcal{F})$. Aleshores, donat $A \in \mathcal{F}$, existeix una funció $\xi(A)$ tal que

$$\widetilde{P} = \int_A \xi(w)\, dP(w).$$

Aquesta funció es coneix com la derivada de Radon-Nikodym i es defineix com

$$\xi(w) = \frac{d\widetilde{P}(w)}{dP(w).}$$

Pel fet que P i $\widetilde{P}$ són equivalents, també existeix

$$\xi^{-1}(w) = \frac{dP(w)}{d\widetilde{P}(w)}.$$

D'aquesta manera, si tenim la funció de densitat de la probabilitat P i la corresponent derivada de Radon-Nikodym, podem calcular la densitat de la probabilitat $\widetilde{P}$, només multiplicant les funcions

$$d\widetilde{P}(w) = dP(w)\, \xi(w)$$

De manera anàloga, si volem tornar a la mesura original,

$$dP(w) = d\widetilde{P}(w)\, \xi^{-1}(w)$$

Definició 2.6.4. Sigui $X(t)$ un procés estocàstic quadrat integrable. Aleshores, el procés

$$\xi(t) = e^{-\int_0^t X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X(s)^2 ds}$$

és una martingala si es compleix

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X(s)^2 ds\right)\right] < \infty.$$

Aquesta condició es coneix com la condició de Novikov.

Teorema 2.6.5 (Teorema de Girsanov)**.** *Sigui $X(t)$ un procés adaptat i mesurable tal que*

$$\int_0^T X(s)^2 ds < \infty.$$

Sigui

$$\xi(t) = \exp\left(-\int_0^t X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X(s)^2 ds\right)$$

una martingala en $(\mathcal{F}_t, P)$.
Definim una nova mesura P^ξ en $\mathcal{F}_t$ de manera que

$$\frac{dP^\xi}{dP} = \xi(t)$$

Aleshores, el procés

$$B^\xi(t) = B(t) + \int_0^t X(s)ds$$

és un moviment Brownià en $\left(\mathcal{F}_t, P^\xi\right)$.

3 Introducció als mercats financers

3.1 Derivats financers

Una bona manera de començar aquesta secció seria definir què és exactament un derivat financer.
Podríem dir que, a grans trets, un derivat és un contracte del qual el seu preu està lligat a altres productes de mercat; ja siguin tipus d'interès, matèries primeres, accions, etc.
Per poder entendre una mica millor què són aquests derivats, a continuació classificarem alguns dels diferents tipus que existeixen.

3.1.1 Contractes de futurs i *forwards*

Definició 3.1.1. Un contracte de futur obliga a una de les parts a vendre-li a l'altra un nombre de valors d'un actiu a un cert preu en una data futura. Tant el nombre de valors com el preu de la futura transacció s'acorden en la data de contractació.

En aquest tipus de contractes, les parts poden tenir dues intencions:
Imaginem d'una banda que una persona té una gran quantitat de matèria prima que voldrà vendre en un futur. Aquesta persona pot voler-se assegurar que, en el moment de la venda, el preu de mercat d'aquesta matèria prima no sigui molt baix. Per si ho fós, el venedor busca firmar un contracte de futur per establir un preu satisfactori.
D'altra banda, les parts potser estan buscant especular; és a dir, que acorden un preu pensant que en el termini del contracte, el preu de l'actiu serà més alt o més baix.

En els contractes de futurs, es diu que la part venedora ven *en curt*, ja que s'assegura una financiació amb la venda d'un actiu que potser encara no té, i que haurà d'entregar en la data d'expiració de contracte.
La part compradora, en canvi, compra *llarg*, ja que està comprant un actiu que no obtindrà fins a l'expiració del contracte.

Un contracte de futurs i un *forward* són molt semblants. Es basen en la mateixa idea, però un contracte de futurs està regulat pel mercat.
En canvi, un contracte de forward el contracten les dues parts en privat. Normalment, solen ser bancs d'inversió i els propis clients.

3.1.2 Opcions

Les opcions són un altre bloc bàsic entre els derivats financers i en el que ens centrarem al llarg del treball.
Abans hem parlat dels contractes de futurs, en els quals s'acordava l'obligació de la compra/venda d'un actiu en una data i preu determinats al moment d'establir el

contracte. Com podem deduir pel nom del derivat, les opcions tenen les mateixes caràcterístiques, però una de les parts té l'opció i no l'obligació de comprar o vendre. Definim els dos tipus d'opcions que estudiarem per a major comprensió:

Definició 3.1.2. Un *call* europeu sobre un actiu S és el dret d'adquirir, de l'altra part, l'actiu a un preu acordat K (*strike price*) en la data d'expiració del contracte T. L'opció es compra a un preu C_t (*prima*).

Definició 3.1.3. Un *put* europeu sobre un actiu S és el dret de vendre-li a l'altra part l'actiu a un *strike price* K en una data fixada T. L'adquisició d'aquesta opció te un preu P_t.

A banda d'aquests dos tipus d'opcions europees, també existeixen els *calls* i *puts* americans, en les que el propietari de l'opció té el dret a exerci la compra/venda de l'actiu en qualsevol moment abans del termini del contracte. I no només n'existeixen aquestes, sinó que n'hi ha de molts més tipus amb les seves particularitats. Nosaltres ens centrarem en l'estudi de les opcions europees.

Una de les principals preocupacions dels participants del mercat és trobar el preu de venda de dites opcions $C(t)$ (o $P(t)$) [1]. És més, no només ens interessa saber el valor de l'opció en el moment inicial, sinó que també al llarg del periode de duració del contracte. Això es deu a què, tot i que l'opció no pot ser exercida fins la data d'expiració, sí que pot ser transferida a una altra persona.

Definim per $S(t)$ el valor de l'actiu S en l'instant t.
Fixem-nos que, en la data T, l'opció tindrà dos possibles valors.
En el cas que $S(T) > K$, el propietari de l'opció clarament exercirà el dret de compra de l'actiu, ja que el preu d'exercici és més baix que el present valor de l'actiu. El benefici que obtindria el propietari del *call* seria de $S(T) - K$. Per tant, aquest serà el valor del *call* en aquest cas.
En l'altre possible cas, en què $S(T) < K$, el propietari de l'opció, racionalment, no exercirà l'opció de compra de l'actiu, ja que si volgués obtenir l'actiu corresponent, el compraria al valor de mercat, que es més baix que el preu d'exercici. Com podem deduir, en aquest cas, $C_T = 0$.
Per tant, podem definir la rendibilitat d'un *call* europeu com

$$f_C\left(T, S(T)\right) = \max\left\{S(T) - K, 0\right\}$$

i, anàlogament, la d'un *put* europeu com

$$f_P\left(T, S(T)\right) = \max\left\{K - S(T), 0\right\}.$$

[1] en les pàgines següents, utilitzarem la notació de C_t per a referir-nos al preu de l'opció, ja sigui *call* o *put*, per a fer-ho més còmode per a la lectura

3.2 Estructura del mercat

Fixem un interval de temps $\mathbb{T} = [0, T]$, on $t = 0$ seria el temps inicial i $t = T$ seria l'instant de venciment de les opcions amb les que treballarem.
Definim l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on hi ha continguts tots els possibles estats del mercat.
Ω és l'espai mostral que conté totes les possibles trajectòries de l'actiu ab risc.
$\mathcal{F}$ és la σ-àlgebra generada per Ω. La informació que reben els inversors sobre el mercat ve donada per la filtració $\mathcal{F}_t$, de manera que $\mathcal{F}_0$ és trivial i representa l'estat inicial i $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

A partir d'ara suposarem que en el mercat financer existeixen dos actius. Un actiu sense risc, que seria equivalent a un bo cupó zero, que notarem per S^0. L'altre actiu, l'actiu amb risc, el notarem per S^1.
Finalment, notem per $S^0(t)$ i $S^1(t)$ els corresponents preus de cada actiu en l'instant t.
Definim $r > 0$ com la taxa d'interès del bo cupó zero. Aleshores podem suposar que el preu del bo $S^0(t)$ està determinat per l'equació diferencial ordinària

$$dS^0(t) = rS^0(t)dt.$$

Resolent l'equació anterior, si en temps 0 l'actiu sense risc té un preu, sense pèrdua de generalitat, $S^0_0 = 1$, aleshores podrem definir el seu preu al llarg del temps com

$$S^0(t) = e^{rt}$$

Definim ara μ i $\sigma > 0$ constants i $B(t)$ un moviment Brownià estàndard en l'espai $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Aleshores, suposem que el preu de l'actiu amb risc, $S^1(t)$, està descrit per l'equació diferencial estocàstica

$$dS^1(t) = \mu S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dB(t),$$

que satisfà

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|S^1(t)\right|^2 du\right] < \infty.$$

Considerem $S^1(t)$ un procés $\mathcal{F}_t$-adaptat, pel que el preu de l'actiu a l'instant t no el sabrem fins l'instant t.
Recordem que a aquesta equació l'anomenem moviment Brownià geomètric, i és l'equació usada en el model Black-Scholes.

Amb tot això, podem definir el mercat d'actius per la quintupla $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}, S)$, on $S = (S^0, S^1)$.

4 El Model Black-Scholes

4.1 Estratègies de cobertura

Definició 4.1.1. Definim el procés $\mathcal{F}_t$-adaptat $\phi(t) = (H^0(t), H^1(t))$, on $H^i(t)$ indica la quantitat que es poseeix de cada actiu en l'instant t. Conseqüentment, la funció que indica la riquesa, o valor de la cartera, en l'instant t ve donada per

$$V_\phi(t) = H^0(t)S^0(t) + H^1(t)S^1(t)$$

Observació 4.1.2. Arribats a aquest punt, hem d'aclarir un parell de punts:

- No existeixen costos en les transaccions.
- La compra/venta d'actius i els seus preus són perfectament divisibles. És a dir, $H^i(t) \in \mathbb{R}$ i $S^i(t) \in \mathbb{R}^+$.

Una estratègia autofinançada $\phi = (\phi(t))$, $0 \leq t \leq T$, ve donada per dos processos $(H^0(t))$ i $(H^1(t))$ $\mathcal{F}_t$-adaptats que satisfan

$$\int_0^T \left|H^0(t)\right| dt < \infty \text{ i } \int_0^T \left(H^1(t)\right)^2 dt < \infty.$$

Aleshores, el valor de la cartera ve donat per

$$V_\phi(t) = H^0(0)S^0(0) + H^1(0)S^1(0) + \int_0^t H^0(u)dS^0(u) + \int_0^t H^1(u)dS^1(u)$$

El que volem dir amb això és que el valor d'una cartera autofinançada parteix de

$$V_\phi(0) = H^0(0)S^0(0) + H^1(0)S^1(0)$$

i la seva variació ve donada per

$$dV_\phi(t) = H^0(t)dS^0(t) + H^1(t)dS^1(t).$$

Donat que una estratègia ve donada per l'equació

$$dV_\phi(t) = H^0(t)dS^0(t) + H^1(t)dS^1(t) + S^0(t)dH^0(t) + S^1(t)dH^1(t),$$

la particularitat d'aquest tipus d'estratègies és que

$$S^0(t)dH^0(t) + S^1(t)dH^1(t) = 0.$$

Dit d'una altra manera, la variació del valor d'una cartera autofinançada depèn només del canvi en els preus dels actius, no de les compra/ventes que s'efectuin. És a dir, que no hi ha ni injecció ni extracció de capital.

Introduïm ara el concepte de valor de descompte:
La funció $\beta(t) = \frac{1}{S^0(t)}$ indica la quantitat que s'ha d'invertir en l'actiu sense risc S^0

en l'instant 0 per obtenir 1 unitat de capital en l'instant t. Fixada la taxa d'interès del bo cupó zero $r > 0$, que considerarem constant al llarg de les següents seccions, i donat que abans hem vist que

$$S^0(t) = e^{rt}$$

definim la funció descompte com

$$\beta(t) = e^{-rt}$$

Definició 4.1.3. Sigui $S^1(t)$ el preu de l'actiu amb risc. Aleshores, notem per $\widetilde{S}^1(t) = e^{-rt}S^1(t)$ com el preu descomptat de l'actiu amb risc. Aleshores, podem definir $\widetilde{V}_\phi(t) = e^{-rt}V_\phi(t)$ com el valor descomptat de la cartera.

Teorema 4.1.4. *Sigui $\phi(t) = ((H^0(t), H^1(t)))$ que compleix les propietats*

$$\int_0^T \left|H^0(t)\right| dt < \infty, \quad \int_0^T \left(H^1(t)\right)^2 dt < \infty.$$

Aleshores, ϕ és una estratègia autofinançada si, i només si,

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u) d\widetilde{S}^1(u), \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostració. Sigui $\phi = ((H^0(t), H^1(t)))$ una estratègia autofinançada, de manera que

$$V_\phi(0) = H^0(0)S^0(0) + H^1(0)S^1(0)$$

Aleshores,

$$d\widetilde{V}_\phi((t) = d\left(e^{-rt}V_\phi(t)\right) = -r\widetilde{V}_\phi(t)\,dt + e^{-rt}dV_\phi(t) =$$
$$= -re^{-rt}\left(H^0(t)e^{rt} + H^1(t)S^1(t)\right)dt + e^{-rt}H^0(t)d\left(e^{rt}\right) + e^{-rt}H^1(t)dS^1(t) =$$
$$= H^1(t)\left(-re^{-rt}S^1(t)dt + e^{rt}dS^1(t)\right) = H^1(t)d\widetilde{S}^1(t)$$

Per tant, tenim que

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u)d\widetilde{S}^1(u)$$

La implicació en l'altre sentit es demostra seguint els passos a l'inrevés. □

Definició 4.1.5. Una estràtegia $\phi = (H^0(t), H^1(t))$ és admissible si és autofinançada i el seu valor descomptat, que ve donat per

$$\widetilde{V}_\phi(t) = H^0(t) + H^1(t)\widetilde{S}^1(t),$$

és no negatiu i és quadrat integrable.

4.2 Mesura de martingala equivalent

Definició 4.2.1. Una oportunitat d'arbitratge és una estratègia admissible ϕ tal que $V_\phi(0) = 0$ que compleix

$$P(V_\phi(T) \geq 0) = 1,\ P(V_\phi(T) > 0) > 0$$

Amb això volem dir que podem partir d'una cartera $V_\phi(0)$ amb valor zero, i a l'instant T, obtenir un valor positiu per a la cartera amb probabilitat 1. El que equival a obtenir guany sense risc.

Definició 4.2.2. Una mesura de probabilitat $\widetilde{P}$ és una mesura de neutralitat al risc (ò mesura de martingala equivalent), si

- (i) P i $\widetilde{P}$ són equivalents.
- (ii) $\forall\ i = 1, \ldots, n$ el procés $\widetilde{S}^i(t)$, en el cas que en el mercat hi hagi n actius amb risc, és una martingala sota la mesura $\widetilde{P}$.

Lema 4.2.3. *Sigui $\widetilde{P}$ una mesura de martingala equivalent i $V_\phi(t)$ valor d'una cartera. Aleshores, sota la mesura $\widetilde{P}$, $\widetilde{V}_\phi(t)$ és una martingala.*

Teorema 4.2.4 (Primer Teorema Fonamental de la Valoració d'Actius)**.** *Si en un model de mercat existeix almenys una mesura de martingala equivalent, aleshores no admet possibilitat d'arbitratge.*

Demostració. Sigui $\widetilde{P}$ una mesura de martingala equivalent. Aleshores, tot procés valor $V(t)$ és una martingala sota $\widetilde{P}$ i, si $V(0) = 0$, aleshores

$$\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{V}(T)] = 0$$

Suposem ara que $V(T)$ satisfà la primera propietat necessària per ser un abitratge. Aleshores $P(V(T) < 0) = 0$. Com $\widetilde{P}$ és equivalent a P, també es compleix que $\widetilde{P}(V(T)) < 0) = 0$.
De manera que tenim que $\widetilde{P}(V(T)) > 0) = 0$, ja que d'altra banda, obtindríem $\widetilde{\mathbb{E}}[\widetilde{V}(T)] > 0$ en contra de com hem suposat abans.
Utilitzant que un altre cop que P i $\widetilde{P}$ són equivalents, obtenim finalment que

$$P(V(T) > 0) = 0$$

Per tant, $V(T)$ no és un arbitratge ni ho podrà ser cap procés valor de cartera. $\square$

Recordem les dinàmiques dels nostres actius:

$$dS^0(t) = S^0(t) r dt$$

$$dS^1(t) = S^1(t)(\mu dt + \sigma dB(t))$$

i, per tant,

$$d\widetilde{S}^1(t) = \widetilde{S}^1(t)((\mu - r)dt + \sigma dB(t))$$

Si ara apliquem el teorema de Girsanov, amb $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, aleshores existeix una probabilitat P^θ, de manera que

$$\frac{dP^\theta}{dP} = \xi(t) = \exp\Big\{ - \int_0^t \theta dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2 ds \Big\}$$

Sota aquesta probabilitat P^θ, $B(t)^\varsigma$ és un moviment Brownià estàndar definit per

$$B^\theta(t) = \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t + B(t)$$

Per tant, reordenant,

$$dB(t) = dB^\theta(t) - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt$$

Aleshores, l'equació de l'actiu amb risc,

$$d\widetilde{S}^1(t) = \widetilde{S}^1(t)\left((\mu - r)\, dt + \sigma \left(dB^\theta(t) - \frac{\mu - r}{\sigma} dt\right)\right) = \widetilde{S}^1(t)\sigma dB^\theta(t)$$

Equivalentment, obtenim

$$\widetilde{S}^1(t) = S^1(0) + \int_0^t \widetilde{S}^1(s)\sigma dB^\theta(s)$$

on, sota la mesura $\widetilde{P}$,

$$\int_0^t \widetilde{S}(s)^1 \sigma dB^\theta(s)$$

és una integral d'Itô i, com hem vist en seccions anteriors, és una martingala.

D'altra banda, és interessant fixar-se en que, sota la mesura P^ς, la dinàmica de l'actiu S^1 es comporta de manera que

$$dS^1(t) = S^1(t)\left(rdt + \sigma dB^\theta(t)\right)$$

La interpretació que li podem donar és que, sota la mesura P^ς, el valor de retorn esperat de l'actiu amb risc equival a la taxa d'interès de l'actiu sense risc.

El que acabem de veure és que P^θ és la mesura de neutralitat de risc, i la podem notar per $\widetilde{P}$. A partir d'ara, també usarem la notació $\widetilde{B}(t) = B^\theta(t)$.

Recordem que en haviem comprovat que el valor de la cartera es podia definir com

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u) d\widetilde{S}^1(u)$$

Ara bé, sota la mesura $\widetilde{P}$, obtenim

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u)\sigma \widetilde{S}^1(u) d\widetilde{B}^1(u),$$

que és també una martingala.

4.3 Valoració segons el model Black-Scholes

Siguin $f_C(S(T)) = (S(T) - K)^+$ i $f_P = (K - S(T))^+$ funcions $\mathcal{F}_t$-mesurables i quadrat integrables sota $\widetilde{P}$, que representen els valors de les opcions *call* i *put* a l'instant T, respectivament.
Generalitzem els dos casos, notant aquestes funcions per $f(T)$.

Definició 4.3.1. Una estratègia autofinançada ϕ diem que és una cobertura de $f(T)$ amb inversió inicial x, si

$$V_\phi(0) = x$$

i

$$V_\phi(T) = f(T)$$

Anomenem a ϕ una $(x, f(T))$-cobertura.

Teorema 4.3.2 (Teorema de representació de martingala)**.** *Sigui $B(t)$, $0 \leq t \leq T$ un moviment Brownià en l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sigui $\mathcal{F}_t$ la filtració generada pel moviment Brownià. Sigui $M(t)$ una martingala respecte aquesta filtració. Aleshores, existeix un procés Γ_t de quadrat integrable tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(s) dB(s) \ \ q.s.$$

Teorema 4.3.3. *Sigui $f(T)$ una variable aleatòria $\mathcal{F}_T$-mesurable i quadrat integrable sota $\widetilde{P}$.*
Aleshores, existeix una estratègia admissible ϕ tal que el valor d'aquesta estratègia en l'instant t ve donat per

$$V_\phi(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)} f(T) | \mathcal{F}_t\right].$$

Demostració. Tal i com hem definit el procés de valor de cartera, tenim

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u) d\widetilde{S}^1(u) = V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u)\sigma \widetilde{S}^1(u) d\widetilde{B}(u)$$

Com hem vist abans, sota $\widetilde{P}$, $\widetilde{V}_\phi(t)$ és una martingala, de manera que podem escriure

$$\widetilde{V}_\phi(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}\left[\widetilde{V}_\phi(T) | \mathcal{F}_t\right],$$

o bé, de manera semblant,

$$V_\phi(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)} \widetilde{V}_\phi(T) | \mathcal{F}_t\right].$$

Abans hem definit una estratègia admissible com una dupla de processos (H_t^0, H_t^1) tal que el valor de la cartera de tal estratègia venia donat per

$$\widetilde{V}_\phi(t) = H^0(t) + H^1(t)\widetilde{S}(t)$$

La demostració queda reduida a trobar una estratègia admissible que compleixi:

$$H^0(t) + H^1(t)\widetilde{S}^1(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)|\mathcal{F}_t]$$

Fixant-nos en la part dreta de la igualtat, veiem que és una martingala quadrat integrable sota la mesura $\widetilde{P}$. Pel teorema de representació de martingala, podem escriure

$$N(t) := \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)|\mathcal{F}_t] = N(0) + \int_0^t \gamma(s)d\widetilde{B}(s),$$

amb $N(0) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)]$.
De la igualtat

$$V_\phi(0) + \int_0^t H^1(u)\sigma\widetilde{S}^1(u)d\widetilde{B}(u) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)] + \int_0^t \gamma(s)d\widetilde{B}(s)$$

D'aquesta equació obtenim que

$$V_\phi(0) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)]$$

i

$$H^1(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma\widetilde{S}^1(t)}.$$

D'altra banda, substituint aquest resultat a $H^0(t)+H^1(t)\widetilde{S}^1(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)|\mathcal{F}_t]$,

$$H^0(t) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)|\mathcal{F}_t] - \frac{\gamma(t)}{\sigma}$$

Com volíem veure, hem trobat una estratègia admissible $\phi = (H^0(t), H^1(t))$ amb les propietats requerides. □

Corol·lari 4.3.4. *Anomenem a*

$$C(t, f(T)) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}f(T)|\mathcal{F}_t\right]$$

el preu racional en l'instant t d'un call europeu amb payoff $(S(T) - K)^+$. Més concretament, i com hem vist a la demostració del teorema anterior, el preu racional del call a l'instant inicial ve donat per

$$C(0, f(T)) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-rT}f(T)]$$

4.3.1 La Fórmula de Black-Scholes

Per aconseguir deduir la fórmula de Black-Scholes, d'un *call* europeu escrit sobre l'actiu S^1, amb data d'expiració T i *strike price* K, el preu del qual en l'instant t ve donat per, segons hem vist en la secció anterior,

$$C(t, S(t)) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+|\mathcal{F}_t].$$

De l'equació del moviment Brownià geomètric

$$S^1(t) = S^1(0)\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widetilde{B}(t)\Big\}$$

podem obtenir

$$S^1(T) = S^1(t)\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma)(T-t) - \sigma Z\sqrt{T-t}\Big\},$$

on

$$Z = -\frac{\widetilde{B}(T) - \widetilde{B}(t)}{\sqrt{T-t}}$$

és una variable aleatòria normal estàndard.

Fixem-nos que $S^1(T)$ és resultat del producte de la variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable, $S^1(t)$, i de la variable aleatòria

$$\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma)(T-t) - \sigma Z\sqrt{T-t}\Big\}$$

que és independent de $\mathcal{F}_t$.
Per tant, podem escriure el preu racional del *call* com

$$C(t,x) = \mathbb{E}^{\widetilde{P}}\Big[e^{-r(T-t)}\Big(x\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma)(T-t) - \sigma Z\sqrt{T-t}\Big\} - K\Big)^+\Big] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}\Big(x\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma)(T-t) - \sigma z\sqrt{T-t}\Big\} - K\Big)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

El que hem d'intentar ara és resoldre l'integrand

$$\Big(x\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma)(T-t) - \sigma z\sqrt{T-t}\Big\} - K\Big)^+.$$

Aquesta expressió és positiva sempre que

$$z < d_-(T-t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big(\log\frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big)$$

Amb aquest resultat podem restringir el domini de l'integral, de manera que

$$C(t,x) = \int_{-\infty}^{d_-(T-t,x)} e^{-r(T-t)}\Big(x\exp\Big\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \sigma z\sqrt{T-t}\Big\} - K\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Reagrupant,

$$C(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(T-t,x)}\Big(x\exp\Big\{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \sigma z\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}z^2\Big\}\Big)dz -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(T-t,x)} e^{-r(T-t)}Ke^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Per poder avançar en la demostració, necessitem definir la funció

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

com la funció de distribució normal estàndard.

Ara,

$$C(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(T-t,x)} \Big(e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T-t}+z)^2}\Big) dz - e^{-r(T-t)} K \Phi\big(d_-(T-t,x)\big)$$

Fent el canvi de variable $y = z + \sigma\sqrt{T-t}$, arreglem l'interval de la integral de manera que

$$d_+(T-t,x) = d_-(T-t,x) + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right)$$

i, per tant,

$$C(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_+(T-t,x)} \Big(e^{-\frac{1}{2}y^2}\Big) dz - e^{-r(T-t)} K \Phi\big(d_-(T-t,x)\big) =$$

$$= x\Phi\big(d_+(T-t,x)\big) - e^{-r(T-t)} K \Phi\big(d_-(T-t,x)\big).$$

Aquest resultat es coneix com la fórmula de Black-Scholes per a un *call* europeu.

4.3.2 Cobertura sota el model Black-Scholes

Tal i com hem vist en la secció anterior,

$$V_\phi(t) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} f(T) | \mathcal{F}_t] = C(t, S^1(t));$$

de manera que podem establir

$$\widetilde{V}_\phi(t) = \widetilde{C}(t,x) = e^{-rt} C(t, e^{rt}x).$$

Per construcció, la funció $\widetilde{C}$ és $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$. Si apliquem la fórmula d'Itô, obtenim

$$\widetilde{C}(t, \widetilde{S}^1(t)) = \widetilde{C}(0, S^1(0)) + \int_0^t \delta_x \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u)) d\widetilde{S}^1(u) +$$

$$+ \int_0^t \delta_t \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u)) du + \int_0^y \delta_{xx} \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u) \sigma^2 \Big(\widetilde{S}^1(u)\Big)^2 du.$$

Per la unicitat de la representació dels processos d'Itô, i pel fet que $\widetilde{V}(t) = \widetilde{C}(t, \widetilde{S}^1(t))$, es compleix que

$$\widetilde{V}(t) = \widetilde{C}(t, \widetilde{S}^1(t)) = \widetilde{C}(0, S^1(0)) + \int_0^t \delta_x \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u)) d\widetilde{S}^1(u)$$

i

$$\int_0^t \delta_t \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u))du + \int_0^y \delta_{xx} \widetilde{C}(u, \widetilde{S}^1(u)\sigma^2 \left(\widetilde{S}^1(u)\right)^2 du = 0$$

Per tant, l'estratègia ve donada per

$$H^1(t) = \delta_x \widetilde{C}(t, e^{rt}x), \quad H^0(t) = \widetilde{C}(t, e^{rt}x) - H^1(t)\widetilde{S}^1(t)$$

Si calculem les derivades de $\widetilde{C}$, trobem que

$$\delta_1 \widetilde{C}(t, x) = \delta_2 \left(e^{-rt} C(t, e^{rt}x)\right) = -re^{-rt} C(t, e^{rt}x) + e^{-rt} \delta_1 C(t, e^{rt}x) + rx\delta_1 C(t, e^{rt}x)$$

i

$$\delta_2 \widetilde{C}(t, x) = \delta_2 \left(e^{-rt} C(t, e^{rt}x)\right) = e^{-rt} \delta_2 C(t, e^{rt}x) e^{rt} = \delta_2 C(t, e^{rt}x)$$

Amb això, les condicions anteriors queden definides per

$$H^1(t) = \delta_x C(t, S^1(t))$$

i

$$rC(t, S^1(t)) = \delta_t C(t, S^1(t)) + rx\delta_x C(t, S^1(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 \big(S^1(t)\big)^2 \delta_{xx} C(t, S^1(t))$$

Recuperem la fórmula d'un *call* europeu segons la fórmula de Black-Scholes

$$C(t, x) = x\Phi\big(d_+(T-t, x)\big) - e^{-r(T-t)} K \Phi\big(d_-(T-t, x)\big).$$

Donat que $\delta_x(d_+) = \delta_x(d_-)$ i que

$$xg(d_+) = Ke^{-rt} g(d_-),$$

essent g la funció de densitat de la llei normal, podem concloure que

$$H^1(t) = \Phi(d_+)$$

5 El cas multidimensional

Fins ara, tota la teoria que hem desenvolupat era per a treballar dins d'un mercat amb un sol actiu amb risc, cosa que és molt simple i poc realista. Per parlar d'un mercat amb més d'un actiu amb risc, haurem d'introduir un moviment Brownià multidimensional, i adaptar els conceptes prèviament estudiats com la fórmula d'Itô, el teorema de Girsanov o la representació de martingales.

5.1 El moviment Brownià multidimensional

Definició 5.1.1. Un moviment Brownià d-dimensional és un procés $\mathcal{F}_t$ de la forma

$$B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$$

tal que:

(*i*) Per $i = 1, \ldots, d$, $B_i(t)$ és un moviment Brownià

(*ii*) Per a tot $i \neq j$, els moviments Brownians $B_i(t)$ i $B_j(t)$ són independents

(*iii*) Per a $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ és independent de la filtració $\mathcal{F}_s$

Tal i com hem definit el moviment Brownià d-dimensional $B(t)$, conservem que, per a tot i,

$$dB_i(t)dB_i(t) = dt$$

Ara bé, ens és d'interès saber què passa si $i \neq j$.

Proposició 5.1.2. *Sigui $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$ un moviment Brownià d-dimensional. Aleshores, per a tots els $i \neq j$, es compleix que*

$$dB_i(t)dB_j(t) = 0$$

Demostració. Sigui $\Pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició de l'interval $[0, T]$.
Definim la variació creuada de $B(t)$ com

$$C_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} (B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))(B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))$$

Observem que, per la definició del moviment Brownià, $B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k)$ té esperança zero per a cada i i cada k.
Donat aquest fet, podem assegurar que $\mathbb{E}[C_\Pi] = 0$. Ara,

$$C_\Pi^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))^2 (B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))^2 +$$

$$+2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l<k} (B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))(B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))(B_i(t_{l+1}) - B_i(t_l))(B_j(t_{l+1}) - B_j(t_l))$$

Sabem que
$$\mathrm{Var}(C_\Pi) = \mathbb{E}[C_\Pi^2]$$
i, un altre cop per la definició del moviment Brownià, tots els termes del segon sumatori tenen esperança zero. Obtenim doncs

$$\mathbb{E}[C_\Pi^2] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} (B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))^2 (B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))^2\Big]$$

Com $(B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))^2$ i $(B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))^2$ són independents, podem escriure

$$\mathbb{E}[C_\Pi^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[(B_i(t_{k+1}) - B_i(t_k))^2\big]\mathbb{E}\big[(B_j(t_{k+1}) - B_j(t_k))^2\big]$$

Com sabem, si B és un moviment Brownià, $\mathbb{E}\big[(B(t) - B(s))^2\big] = t - s$. Per tant,

$$\mathrm{Var}(C_\Pi) = \mathbb{E}[C_\Pi^2] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \leq \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = \|\Pi\|\, T,$$

on
$$\|\Pi\| = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Big\{ t_{k+1} - t_k \Big\}$$
D'aquesta manera, si $\|\Pi\| \longrightarrow 0$, aleshores $\mathrm{Var}(C_\Pi) \longrightarrow 0$ i C_Π convergeix a la constant $\mathbb{E}[C_\Pi] = 0$ □

5.2 Fórmula d'Itô per a múltiples processos

Per tal de mantenir una notació llegible i senzilla, desenvoluparem el cas de dos processos. De totes maneres, el cas és extensible a qualsevol nombre de processos. Siguin $X(t)$ i $Y(t)$ dos processos d'Itô

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t \sigma_{11}(s)dB_1(s) + \int_0^t \sigma_{12}(s)dB_2(s)$$
$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t a_2(s)ds + \int_0^t \sigma_{21}(s)dB_1(s) + \int_0^t \sigma_{22}(s)dB_2(s),$$

on $a_i(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ són processos adaptats. Ens interessa veure com és la variació quadràtica dels processos d'Itô. En seccions anteriors hem vist que es compleixen les següents normes:

$$dt \cdot dt = 0,\ dt \cdot dB_i(t) = 0,\ dB_i(t) \cdot dB_i(t) = dt,\ dB_i(t) \cdot dB_j(t) = 0$$

Aleshores, si tenim

$$dX(t) = a_1 dt + \sigma_{11} dB_1(t) + \sigma_{12} dB_2(t)$$

elevant al quadrat la igualtat obtenim

$$dX(t) = \big(\sigma_{11}(t)^2 + \sigma_{12}(t)^2\big)dt$$

i, anàlogament,

$$dY(t)dY(t) = \big(\sigma_{21}(t)^2 + \sigma_{22}(t)^2\big)dt$$

$$dX(t)dY(t) = \Big(\sigma_{11}(t)\sigma_{21}(t) + \sigma_{12}(t)\sigma_{22}(t)\Big)dt$$

Acabem de trobar un resultat interessant: tot i que $dB_i(t)dB_j(t) = 0$, la variació quadràtica creuada de dos processos és diferent de zero, i això ho haurem de tenir en compte per al teorema que ve a continuació.

Teorema 5.2.1 (Fórmula bidimsenional d'Itô)**.** *Sigui F(t,x,y) una funció diferenciable i amb les derivades contínues.*
Siguin $X(t), Y(t)$ processos d'Itô.
Aleshores definim la fórmula bidimensional d'Itô com

$$dF(t, X, Y) = F_t dt + F_x dX + F_y dY + \frac{1}{2}F_{xx}dXdX + F_{xy}dXdY + \frac{1}{2}F_{yy}dYdY$$

Per obtenir la fórmula diferencial completa, només hem de substituir $dXdX$, $dXdY$ i $dYdY$ pels resultats trobats anteriorment.

Corol·lari 5.2.2. *Del teorema anterior, i prenent $F(t, x, y) = xy$, obtenim*

$$d\big(X(t)Y(t)\big) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t)$$

5.3 El teorema de Girsanov multidimensional

De nou, sigui un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tal i com l'hem definit, sigui

$$B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$$

un moviment Brownià d-dimensional.

Teorema 5.3.1 (Teorema de Girsanov multidimensional)**.** *Sigui $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$ un procés d-dimensional adaptat.*
Sigui

$$\xi(t) = \exp\left\{-\int_0^t X(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|X(s)\|^2 ds\right\},$$

on

$$\int_0^t X(s)dB(s) = \int_0^t \sum_{i=1}^d X_i(s)dB_i(s) = \sum_{i=1}^d \int_0^t X_i(s)dB_i(s)$$

i $\|X(s)\|$ denota la norma euclidiana.
Aleshores, existeix una mesura de probabilitat P^ξ equivalent a P de manera que per a $i = 1, \ldots, d$,

$$B_i^\xi(t) = B_i(t) + \int_0^t X_i(s)ds$$

són les components del moviment Brownià $B^\xi(t) = \Big(B_1^\xi(t), \ldots, B_d^\xi(t)\Big)$ en $(\mathcal{F}_t, P^\xi)$.

5.4 Un mercat amb diferents actius amb risc

Abans d'entrar a definir l'evolució d'un mercat amb més d'un actiu amb risc, mostrarem un exemple de la correlació que existeix entre els preus de dos actius, per extendre-ho després a un cas més general.

Exemple 5.4.1 (Exemple extret de [4], pàg. 171.)**.** Siguin S^1 i S^2 els actius amb risc, els preus dels quals venen definits per

$$dS^1(t) = \mu_1 S^1(t)dt + \sigma_2 S^1(t)dB_1(t)$$

$$dS^2(t) = \mu_1 S^2(t)dt + \sigma_2 S^2(t)\left(\rho dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dB_2(t)\right)$$

on B_1 i B_2 són moviments Brownians independents, i μ_1, μ_2,σ_1, σ_2, ρ són constants tals que $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ i $-1 \leq \rho \leq 1$.
Definim

$$W(t) = \rho dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dB_2(t)$$

Observem que

$$dW(t)dW(t) = \rho^2 dB_1(t)dB_1(t) + 2\rho\sqrt{1-\rho^2}dB_1(t)dB_2(t) + (1-\rho^2)dB_2(t)dB_2(t) =$$

$$= \rho^2 dt + (1-\rho^2)dt = dt$$

Per tant, $[W, W] = t$ i, pel teorema 2.2.10, $W(t)$ és un moviment Brownià.
Podem reescriure l'equació del segon actiu com

$$dS^2(t)\mu_2 S^2(t) + \sigma_2 S^2(t)dW(t)$$

Ara bé, tal i com hem definit $W(t)$, aquest estarà correlacionat amb $B_1(t)$.
Per 5.2.2,

$$d\left(B_1(t)W(t)\right) = W(t)dB_1(t) + B_1(t)dW(t) + dB_1(t)W(t) =$$

$$= W(t)dB_1(t) + B_1(t)dW(t) + \rho dt$$

Aleshores,

$$B_1(t)W(t) = \int_0^t W(t)dB_1(t) + \int_0^t B_1(t)dW(t) + \rho t$$

Donat que les dues integrals estocàstiques tenen esperança zero, ens queda

$$\mathbb{E}[B_1(t)W(t)] = \rho t$$

I, pel fet que tant $B_1(t)$ com $W(t)$ tenen una desviació típica igual a $\sqrt{t}$, ρ representa la correlacció entre els dos moviments Brownians. □

Sigui ara l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Sigui $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$ un moviment Brownià d-dimensional.
Suposem que en el mercat hi ha un actiu sense risc S^0 i m actius $S^1, \ldots, S^m$, els preus dels quals estan definits per

$$dS^0(t) = e^{rt}$$

i pels moviments Brownians geomètrics

$$dS^i(t) = \mu_i S^i(t)dt + S^i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dB_j(t),$$

on μ_i, σ_{ij} són constants tals que $\sigma_{ij} > 0$ per a $i = 1\ldots, m$ i per a $j = 1, \ldots, d$.
Per construcció, les components del moviment Brownià són independents, però els preus dels actius estan correlacionats. Definim, per a cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}^2}$$

i, posteriorment, les martingales contínues

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}dB_j(s)$$

Ara, com

$$dW_i(t)dW_i(t) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}dt = dt,$$

tots els $W_i(t)$ són moviments Brownians. Amb tot això, reescrivim les equacions dels actius amb risc de manera que

$$dS^i(t) = \mu_i S^i(t)dt + \sigma_i S^i(t)dW_i(t)$$

on σ_i representa el coeficient de volatilitat del procés.
Anàlogament a l'exemple anterior, els moviments Brownians $B_i(t)$, $B_k(t)$ estan correlacionats i, de

$$dB_i(t)dB_k(t) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\sigma_{ij}\sigma_{kj}}{\sigma_i\sigma_k}dt = \rho_{ik}dt,$$

concloem que ρ_{ik} representa la correlació correlació dels moviments Brownians $W_i(t)$ i $W_k(t)$.

Introduïm de nou el concepte de preu descomptat, definit ara per

$$d\widetilde{S}^i(t) = (\mu_i - r)\,\widetilde{S}^i(t)dt + \widetilde{S}^i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dB_j(t)$$

Al coeficient $\mu_i - r$ l'anomenem prima de risc de l'actiu S^i.

De nou, el nostre objectiu és poder expressar els preus dels actius com a martingales, de manera que

$$d\widetilde{S}^i(t) = \widetilde{S}^i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}\left(\theta_j dt + dB(t)\right)$$

Aleshores el problema queda reduït a resoldre el sistema

$$\mu_i - r = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}\theta_j$$

Observem que aquest sistema, al que anomenem *preu del mercat de risc* està format per m equacions i d incògnites. Com en tot sistema d'equacions, tenim tres opcions:

(a) Existeix una única solució $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$.

(b) Existeix més d'una solució.

(c) No existeix solució.

Si el sistema admet, almenys, una solució, aleshores podem considerar el procés

$$\xi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta\|^2 \, ds\right\}$$

i definir una nova mesura de probabilitat $\widetilde{P}$ que compleixi

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \xi(t).$$

Fent ús del teorema de Girsanov multidimensional, podem establir que, sota $\widetilde{P}$,

$$\widetilde{B}(t) = B(t) + \int_0^t \theta ds$$

és un moviment Brownià d-dimensional.

Observem que, sota $\widetilde{P}$, els preus $S^i(t)$ són martingales; pel que $\widetilde{P}$ és una mesura de martingala equivalent.

Sigui ara $\phi(t) = (H^0(t), H^1(t), \ldots, H^m(t))$ una estratègia autofinançada amb valor

$$V_\phi(t) = H^0(t)S^0(t) + H^1(t)S^1(t) + \ldots + H^m(t)S^m(t)$$

i

$$dV_\phi(t) = \sum_{i=0}^{m} H^i(t)dS^i(t)$$

Sota $\widetilde{P}$, pel Lema 4.2.3, $\widetilde{V}_\phi(t)$ és una martingala. Veiem-ho ràpidament:

$$V_\phi(t) = V_\phi(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^{m} H^i(u)dS^i(u) =$$

$$= V_\phi(0) + \int_0^t rH^0S^0(u)du + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} H^i(u)S^i(u)\left(\mu_i du + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}dB_j(u)\right) =$$

$$= V_\phi(0) + \int_0^t rH^0S^0du + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d\int_0^t H^i(u)S^i(u)\sigma_{ij}\big((\theta_j + r)\,du + dB_j(u)\big) =$$

$$= V_\phi(0) + \int_0^t rV_\phi(u)du + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d\int_0^t H^i(u)S^i(u)\sigma_{ij}\big(\theta_j du + dB_j(u)\big) =$$

$$= V_\phi + \int_0^t rV_\phi(u)du + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d\int_0^t H^i(u)S^i(u)\sigma_{ij}d\widetilde{B}_j(u)$$

Per tant,

$$\widetilde{V}_\phi(t) = V_\phi(0) + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d\int_0^t H^i(u)\widetilde{S}^i(u)\sigma_{ij}d\widetilde{B}_j(u),$$

que és una martingala.

El que hem vist fins ara és que si existeix una solució del sistema anterior, aleshores existeix una mesura de martingala equivalent que ens assegura l'absència d'arbitratge.

Definició 5.4.2. Diem que un model de mercat és complet si es pot fer una cobertura per a qualsevol derivat del mercat.

Teorema 5.4.3 (Segon Teorema Fonamental de la Valoració d'Actius)**.** *Sigui un model de mercat que admet almenys una mesura de martingala equivalent. Aleshores, el model de mercat és complet si, i només si, la mesura de martingala equivalent.*

Demostració. Suposem que existeix una única mesura de martingala equivalent. Aleshores el sistema del preu del mercat de risc té una única solució, $\widetilde{P}$. En aquest cas, tenim obligatòriament $d = m$, i la matriu $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ és invertible.
Considerem la martingala

$$M(t) = \mathbb{E}[s^{-rT}f(T)|\mathcal{F}(t)],$$

que pel teorema de representació de martingales podem expressar com

$$M(t) = N(0) + \int_0^t \Gamma(u)d\widetilde{B}(u),$$

on $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \ldots, \Gamma_m(t))$ és un procés $\mathcal{F}_t$-adaptat de quadrat integrable. definim per $\mathbb{S}(t)$ la matriu diagonal

$$\begin{pmatrix} (S^1(t))^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (S^m(t))^{-1} \end{pmatrix}$$

i per $\widetilde{\mathbb{S}}$ la matriu diagonal dels preus descomptats. Aleshores, l'estratègia ve definida per

$$\big(H^1(t), \ldots, H^m(t)\big) = \widetilde{\mathbb{S}}\sigma'(t)^{-1}\Gamma(t)$$

i

$$H^0(t) = M(t) - \langle \sigma'(t)\Gamma(t), 1 \rangle$$

amb $1 = (1, \ldots, 1)$.
Acabem de trobar una estratègia autofinançada que fa de cobertura per a qualsevol $f(T)$. Per tant, el mercat és complet. $\square$

Referències

[1] NEFTCI, SALIH N.: *An Introduction to the mathematics of financial derivatives*, Academic Press cop., San Diego, 2000.

[2] ELLIOT, ROBERT J.; KOPP, P. EKKEHARD: *Mathematics of Financial Markets*, Springer cop., New York, 2005.

[3] CHUNG, K. L.; WILLIAMS, R. J.: *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, cop., Boston, 1990.

[4] SHREVE, STEVEN E.: *Stochastic Calculus for Finance. Vol. II*, Springer cop., New York, 2004.

[5] VIVES, JOSEP: *Chapter II : Black-Scholes Theory of Pricing and Hedging Financial Derivatives*, 2015.

[6] FREY, RÜDIGER: *Financial Mathematics in Continuous Time*, `http://www.math.uni-leipzig.de/ frey/Skript-FimaII.pdf`, 2009.

[7] MARGALEF-ROIG, J.; MIRET-ARTES, S: *Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black-Scholes-Merton y algunas generalizaciones.*