

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

FRACTALS I COMPRESSIÓ
D'IMATGES

Autora: Bruna Bruguet Solé

Director: Dr. Àlex Haro Provinciale
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi

Barcelona, 30 de juny de 2015

Abstract

The space optimization in terms of computational science is continually increasing due to its relevance and the use it has on new technologies.

The main objective of this final degree project is deeply study the approximation methods in order to approach real images using fractal models. We are going to focus on Collage Theorem. Finally, we are going to apply this theory over digital images.

Resum

L'optimització de l'espai a nivell computacional és cada vegada més important per la rellevància de la tecnologia.

L'objectiu d'aquest treball és l'estudi de mètodes d'aproximació per apropar-se a les imatges del món real mitjançant models fractals. Ens centrarem en el Teorema del Collage. Finalment portarem els resultats a imatges digitals.

Agraïments

Vull agrair als meus pares que han estat al meu costat durant l'elaboració del treball, a la meva germana i el seu marit per donar-me ànims en aquest tram final de carrera i als meus companys d'universitat Helena Fàbregas i Andreu Alarcón per ajudar-me en alguns problemes tècnics del treball. I finalment al meu director de treball Àlex Haro.

Índex

1	Introducció	1
2	Espais mètrics	3
2.1	Convergència en els espais mètrics	4
2.2	Completitud dels espais mètrics	4
2.3	Completesa dels espais mètrics	5
2.4	Connexió en els espais mètrics	6
3	Fractals deterministes	7
3.1	L'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$	8
3.2	La completesa de l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$	11
3.3	Transformacions afins	13
3.4	Aplicacions contractives en l'espai dels fractals	14
3.5	Sistemes iteratius de funcions, IFS	17
3.6	Conjunts de condensació	18
3.7	Teorema del Collage	19
4	Espais de codi	22
5	Fractals aleatòris	25
5.1	Mesures	25
5.2	Sistemes iteratius de funcions amb probabilitats, IFS amb probabilitats	26
5.3	L'espai mètric $(\mathcal{P}(X), d_H)$	26
5.4	Aplicacions contractives en l'espai $(\mathcal{P}(X), d_H)$	27
5.5	Mesures invariants	28
5.6	Teorema del Collage per Mesures	29
6	Compressió d'imatge	32
6.1	Descripció general de la metodologia de la compressió d'imatge fractal	38
6.1.1	La transformació fractal en blanc i negre	41
6.1.2	La transformació fractal en escala de grisos	45
7	Computació: programes	47
8	Conclusions	52

1 Introducció

El projecte

La compressió fractal és un mètode de compressió d'imatge per imatges digitals, fomentat en fractals. Aquest sistema està basat en la idea de que una imatge s'assembla a altres parts de la mateixa imatge. Els algoritmes fractals que veurem al llarg del treball ens mostren com crear sistemes iteratius de funcions que representaran aquesta imatge mitjançant transformacions afins que convertiran aquestes parts de la imatge.

Aquest procediment de compressió va començar a ser estudiat per Michael Barnsley l'any 1987, creant diverses patents sobre aquesta tecnologia i obrint una nova branca de les matemàtiques dins la geometria.

Però, què és un fractal? El matemàtic Benoît Mandelbrot va desenvolupar el concepte de fractal l'any 1975 justificat en l'observació de les imperfeccions geomètriques. Etimològicament prové del llatí *fractus* ("trecat, fracturat, irregular"). Segons el diccionari de la llengua catalana, *una fractal és un model matemàtic o objecte real que manté la seva forma essencial, fragmentada i irregular, encara que variï l'escala d'observació*.

L'algoritme de compressió fractal més conegut és el basat en les transformacions fractals mitjançant sistemes iteratius de funcions, IFS, que veurem en el treball, el qual va ser estudiat per Barnsley i un alumne seu, Alan Sloan l'any 1992. Aquesta diferència d'anys entre la idea de Barnsley al desenvolupament amb IFS és el que fa evident que la importància de les tecnologies va anar *in crescendo*.

Les tècniques fractals tenen múltiples aplicacions, per exemple, per comprimir dades, com veurem al treballar; en medicina, s'estan estudiant des de virus fractals fins a ramificacions en determinats tumors malignes; en geografia, usant la corba de Koch per trobar la mínima distància entre dos punts, entre d'altres.

Estructura de la Memòria

El contingut de la memòria està dividit en dos grans blocs: l'estudi i representació de fractals i la compressió d'imatge.

En el primer bloc dedico un capítol a la introducció de conceptes bàsics per després passar als fractals deterministes i aleatoris, fent referència en ambdós casos a tot un seguit de teoremes i definicions que conclouen amb el desenvolupament del Teorema del Collage, que ens permetrà representar-los mitjançant els sistemes iteratius de funcions anteriorment mencionats.

Pel que fa al segon bloc, presento les propietats que tenen les anomenades imatges del món real per poder observar que al aplicar els mètodes de compressió fractal segueixen sent-t'ho.

El darrer capítol és una explicació dels programes que he dut a terme per a poder veure la implementació del Teorema del Collage. També hi ha un parell d'exemples

per poder veure com funcionen. En els annexos incloc els codis dels programes en llenguatge C i alguns exemples de sistemes iteratius de funcions amb els resultats de la seva implementació en els programes

2 Espais mètrics

Per a treballar els fractals cal definir l'espai mètric a on viuen. Per poder fer-ho cal veure certes propietats dels espais mètrics per a així treballar l'espai mètric en el qual viuen els fractals que observem a la següent secció.

Primerament veiem diferents definicions que ens serviran per definir propietats invariants importants dels fractal puix que no es modifiquen després de patir transformacions.

Definició 2.1. Un **espai** X és un conjunt. Els punts d'aquest espai són els elements del conjunt.

Definició 2.2. Un **espai mètric** (X, d) és un espai X juntament amb una funció real $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que mesura la distància entre parells de punts x i y de X . d ha de complir els següents axiomes:

- i. $0 \leq d(x, y) < \infty, \forall x, y \in X, x \neq y,$
- ii. $d(x, x) = 0, \forall x \in X,$
- iii. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X,$
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$

on d s'anomena mètrica o distància.

Definició 2.3. Sigui (X, d) un espai mètric, la **bola oberta de centre x_0 i radi $r < 0$** és:

$$B(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) < r\},$$

i la **bola tancada de centre x_0 i radi $r < 0$** és:

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X, d(x, x_0) \leq r\}.$$

Definició 2.4. Dues **mètriques** d_1 i d_2 en un espai X són **equivalents** si existeixen constants $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tals que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X$$

Definició 2.5. Dos **espais mètrics** (X_1, d_1) i (X_2, d_2) són **equivalents** si hi ha una funció $h : X_1 \rightarrow X_2$ bijectiva tal que la mètrica \tilde{d}_1 en X_1 definida per

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in X_1$$

és equivalent a d_1 .

Definició 2.6. Una **funció** $f : X_1 \rightarrow X_2$ d'un espai mètric (X_1, d_1) a un espai mètric (X_2, d_2) és **contínua** si $\forall \epsilon > 0$ i $x \in X$

$$\exists \delta \text{ tal que si } d_1(x, y) < \delta \text{ aleshores } d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Si f és bijectiva i la seva inversa f^{-1} és contínua, llavors diem que f és un homeomorfisme entre X_1 i X_2 . En aquest cas diem que X_1 i X_2 són homeomorfs.

2.1 Convergència en els espais mètrics

Per a l'estudi dels fractals, necessitem una classe de propietats que són invariants per espais mètrics equivalents, és a dir, que si un subconjunt d'un espai mètric té una d'aquestes propietats i es deforma amb una distorsió limitada, llavors el subconjunt corresponent a l'espai deformat encara tindrà la mateixa propietat.

Definició 2.7. Una successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de punts en un espai mètric (X, d) s'anomena **successió de Cauchy** si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ enter tal que } \forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

En altres paraules, com més lluny arribem a la successió, més s'ajunten els seus punts.

Estudiem primer de tot la convergència.

Definició 2.8. Una successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de punts en un espai mètric (X, d) es diu que **convergeix a un punt** $x \in X$ si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ enter tal que } \forall n > N \ d(x_n, x) < \epsilon.$$

En aquest cas el punt $x \in X$, al qual convergeix la successió, s'anomena **límit** de la successió, i usem l'anotació

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Teorema 2.1. Si una successió de punts $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espai mètric (X, d) convergeix a un punt $x \in X$, aleshores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy.

Demostració. Com que x_n convergeix a x , per a tot $\epsilon > 0$ existeix un N tal que si $n > N$, aleshores $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Així, per a tot $n, m > N$ es té que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

i per tant la successió és de Cauchy.

2.2 Completitud dels espais mètrics

A partir de la convergència podem definir la completitud d'un espai mètric.

Definició 2.9. Un espai mètric (X, d) és **complet** si tota successió de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X té un límit $x \in X$.

Una altra característica molt important dels conjunts és veure si un conjunt és obert, tancat o acotat. Sigui (X, d) un espai mètric i $S \subset X$ un subconjunt d'aquest espai:

Definició 2.10. Un punt $p \in X$ es diu que és un **punt límit** (o **d'acumulació**) d'un conjunt $E \subset X$ si

$$\forall \epsilon > 0, (B(p, \epsilon)) \cap E \neq \emptyset.$$

Definició 2.11. Un punt $x \in S$ s'anomena **punt interior** de S si

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \epsilon) \subset S.$$

El conjunt de tots els punts interiors de S s'anomena **interior** de S i s'anota per $\text{Int}(S)$.

Definició 2.12. S és un **obert** de X si

$$\forall x \in S \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \epsilon) \subset S.$$

Definició 2.13. L'**adherència** de S , denotada per $\overline{S} = S \cup \{\text{punts d'acumulació de } S\}$. S és **tancat** si conté tots els seus punts d'acumulació, és a dir, si $S = \overline{S}$.

Definició 2.14. S és **perfecte** si tots els seus punts són punts d'acumulació.

Definició 2.15. Un punt $x \in X$ és **de la frontera** de S si

$$\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \text{ conté un punt de } X \setminus S \text{ i un punt de } S.$$

El conjunt de tots els punts frontera de S s'anomena la **frontera** de S i s'anota per ∂S .

Definició 2.16. S és **acotat** si hi ha un punt $x_0 \in X$ i un número $R > 0$ tal que

$$d(x_0, x) < R \quad \forall x \in S.$$

2.3 Completesa dels espais mètrics

Per acabar les propietats veurem la completesa, una de les més importants en l'espai dels fractals. I tot seguit la connexió.

Definició 2.17. S és **compacte** si tota successió infinita $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en S conté una subsuccessió que té un límit en S .

Definició 2.18. Sigui $S \subset X$ un subconjunt d'un espai mètric (X, d) . S és **totalment acotat** si, per tot $\epsilon > 0$, hi ha un conjunt finit de punts $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$ tal que per qualsevol $x \in S$, $d(x, y_i) < \epsilon$ per algun $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Aquest conjunt de punts s'anomena ϵ -red. Escrit amb boles tindriem que S és totalment acotat si

$$\forall r > 0 \exists y_1, y_2, \dots, y_n \in S \text{ tal que } \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r) \supseteq S.$$

Teorema 2.2. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Sigui $S \subset X$. Llavors S és compacte si, i només si, és tancat i totalment acotat.*

Demostració. \Leftarrow) Suposem que S és tancat i totalment acotat. Sigui $\{x_n \in S\}$ una successió infinita de punts de S , com que S és totalment acotat podem trobar una col·lecció finita de boles tancades de radi 1, B_i amb $i \in \{1, \dots, m\}$, tal que S estigui continguda a la seva unió.

Pel *principi de Dirichlet* (que diu que si repartim n objectes en k caixes, i n és més gran que k aleshores necessàriament alguna de les caixes ha de rebre més d'un objecte) una de les boles, agafarem B_1 , conté infinitat dels punts x_n .

Escollim N_1 tal que $x_{N_1} \in B_1$ i com que $B_1 \cap S$ és totalment acotat, ja que S està contingut a la unió finita de les boles tancades B_i amb $i \in \{1, \dots, m\}$, podem cobrir $B_1 \cap S$ per un conjunt de boles de radi $\frac{1}{2}$.

Pel *Teorema de Dirichlet* una de les boles, agafarem B_2 , conté infinitat dels punts x_n .

Escollim N_2 tal que $x_{N_2} \in B_2$ i $N_2 > N_1$. Seguim aquest procés i contruïm la seqüència de boles

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

on B_n té radi $\frac{1}{2^{n-1}}$ i la successió d'enters $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $x_{N_n} \in B_n$.

És clar que la successió $\{x_{N_n}\}_{n=1}^\infty$, la qual és subsuccessió de la successió original $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, és de Cauchy usant la desigualtat triangular. Com que S és tancat per hipòtesi, $\{x_{N_n}\}$ convergeix a un punt x a S (notem que

$$\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_n). \text{ Per tant } S \text{ és compacte.}$$

\Rightarrow) Suposem que S és compacte. Demostrem per absurd:

Sigui $\epsilon > 0$, suposem que no existeix una ϵ -red de S . Llavors hi ha una successió infinita de punts $\{x_n \in S\}$ amb $d(x_i, x_j) \geq \epsilon \forall i \neq j$. Però aquesta successió ha de tenir una subsuccessió convergent $\{x_{N_i}\}$ ja que S és compacte.

Pel *Teorema 2.1* aquesta subsuccessió és de Cauchy i per tant podem trobar una parella d'enters positius N_i i N_j amb $N_i \neq N_j$ tals que $d(x_{N_i}, x_{N_j}) < \epsilon$. Però com que per hipòtesi $d(x_{N_i}, x_{N_j}) \geq \epsilon$, tenim una contradicció.

Aleshores existeix una ϵ -red de S i per tant S és totalment acotat i tancat.

2.4 Connexió en els espais mètrics

Definició 2.19. *Un espai mètric (X, d) és **connex** si els únics subconjunts de X que són oberts i tancats a la vegada són X i \emptyset . X és **disconnex** si no és **connex**.*

Proposició 2.1. X és totalment disconnex si els únics subconjunts connexos no buits de X són els punts.

Proposició 2.2. S és connex si l'espai mètric (S, d) és connex.

Definició 2.20. S és **arconnex** si, per cada parella de punts x i y de S , existeix una funció contínua

$$f : [0, 1] \rightarrow S,$$

d'un espai mètric $([0, 1], \text{Euclidiana})$ dins l'espai mètric (S, d) , tal que $f(0) = x$ i $f(1) = y$. Aquesta funció f s'anomena camí de x a y en S . S és **disconnex** per camins si no és arconnex.

Definició 2.21. Donats dos punts $x, y \in S$ i dos camins $f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow S$ tals que $f_0(0) = f_1(0) = x$ i $f_0(1) = f_1(1) = y$. Una **homotopia de f_0 i f_1** és una homotopia de f_0 a f_1 relativa a $\{0, 1\}$, és a dir, una funció contínua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

tal que

$$H(s, 0) = f_0(s) \quad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(s, 1) = f_1(s) \quad (0 \leq s \leq 1),$$

$$H(0, t) = x \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$H(1, t) = y \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Per tant, podem dir que dos punts x, y en S són **simplement connexos** en S si, donats qualssevol camins f_0, f_1 que van de x a y en S , existeix una funció H tal i com s'acaba de descriure.

Si x i y no són simplement connexos en S , aleshores direm que x i y són **múltiplement connexos** en S .

Definició 2.22. S s'anomena **simplement connex** si cada parell de punts x, y en S és simplement connex en S . Pel contrari, S s'anomena **múltiplement connex**. En el darrer cas, podem imaginar que S conté un "forat".

3 Fractals deterministes

En aquesta secció definirem l'espai mètric en el qual viuen els fractals. Per poder-lo definir comencem veiem el conjunt que el forma.

3.1 L'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$

Definició 3.1. *Sigui (X, d) és un espai mètric complet, aleshores $\mathcal{H}(X)$ és l'espai tal que els seus punts són els subconjunts compactes no buits de X .*

I per acabar de definir l'espai mètric, necessitem la seva distància.

Definició 3.2. *Sigui (X, d) un espai mètric complet, $x \in X$ i $B \in \mathcal{H}(X)$. Definim*

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

*Llavors $d(x, B)$ és la **distància del punt x al conjunt B .***

Proposició 3.1. *Existència del valor mínim del conjunt $\{d(x, y) : y \in B\}$.*

Demostració. Considerem la funció $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(y) = d(x, y) \quad \forall y \in B.$$

De la definició d'espai mètric deduïm que f és contínua. Sigui $P = \inf\{f(y) : y \in B\}$. De $f(y) \geq 0 \forall y \in B$, deduïm que P és finit, per tant existeix un punt $\hat{y} \in B$ tal que $d(x, \hat{y}) = P$ i podem trobar una successió infinita de punts $\{y_n : n = 1, 2, 3, \dots\} \subset B$ tal que $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$.

Com que B és compacte, ja que $B \in \mathcal{H}(X)$, trobem que $\{y_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ és una successió amb límit $\hat{y} \in B$ i de la continuïtat de f deduïm que $f(\hat{y}) = P$, que és el que havíem de veure.

Definició 3.3. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Definim*

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

*$d(A, B)$ és la **distància del conjunt $A \in \mathcal{H}(X)$ al $B \in \mathcal{H}(X)$.***

Tal com hem dit anteriorment, de la compacitat d' A i B , podem provar que aquesta definició esta ben definida. En particular, hi ha punts $\hat{x} \in A$ i $\hat{y} \in B$ tals que $d(A, B) = d(\hat{x}, \hat{y})$.

Definició 3.4. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Llavors la **distància de Hausdorff entre punts A i B en $\mathcal{H}(X)$** es defineix com*

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

Proposició 3.2. *h és una distància en l'espai $\mathcal{H}(X)$.*

Demostració. Hem de veure que es compleixen els axiomes de la definició de distància. Siguin $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ diferents:

- i. $0 \leq h(A, B) < \infty$ ja que $h(A, B) = d(a, b)$ per alguns $a \in A$ i $b \in B$ usant la compacitat de A i B . Si $A \neq B$ podem assumir que hi ha un $a \in A$ tal que $a \notin B$.
- ii. $h(A, A) = 0$ ja que $h(A, A) = \max \{d(A, A), d(A, A)\} = d(A, A) = \max \{d(A, A) : x \in A\} = 0$ puix que d és distància.
- iii. $h(A, B) = h(B, A)$ ja que $h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\} = \max \{d(B, A), d(A, B)\} = h(B, A)$.
- iv. $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$? Per provar-ho primer veurem que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$: Agafem algun $a \in A$:

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= \min \{d(a, b) : b \in B\} \\
 &\leq \min \{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} \quad \forall c \in C \\
 &= d(a, c) + \min \{d(c, b) : b \in B\} \quad \forall c \in C, \text{ per tant} \\
 d(a, B) &\leq \min \{d(a, c) : c \in C\} + \max \{\min \{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\} \\
 &= d(a, C) + d(C, B), \text{ per tant} \\
 d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B).
 \end{aligned}$$

Anàlogament, i per acabar

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B). \\
 h(A, B) &= \max \{d(A, B) + d(B, A)\} \leq \max \{d(B, C) + d(C, B)\} \\
 &+ \max \{d(A, C) + d(C, A)\} \\
 &= h(B, C) + h(A, C) \text{ com voliem.}
 \end{aligned}$$

Ja tenim l'espai mètric definit. Com hem enunciat anteriorment, una propietat molt important que poseeix aquest espai mètric és la seva completesa. Per poder provar-la, necessitem veure certes propietats que demostrem i enunciem a continuació.

Lema 3.1. *Siguin A i B pertanyents a $\mathcal{H}(X)$ on (X, d) són espais mètrics. Sigui $\epsilon > 0$. Aleshores*

$$h(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \text{ i } B \subset A + \epsilon$$

Demostració. Comencem demostrant que $d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon$:
 \Rightarrow Suposem que $d(A, B) \leq \epsilon$. Llavors $\max \{d(a, B) : a \in A\} \leq \epsilon$ implica $d(a, B) \leq \epsilon$ per a tot $a \in A$.

Per tant per cada $a \in A$ tenim que $a \in B + \epsilon$, en general $A \subset B + \epsilon$.

\Leftarrow Suposem que $A \subset B + \epsilon$. Considerem $d(A, B) = \max \{d(a, B) : a \in A\}$.

Sigui $a \in A$, com que $A \subset B + \epsilon$, hi ha un $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq \epsilon$, en general, $d(a, B) \leq \epsilon$ per cada $a \in A$. Per tant $d(A, B) \leq \epsilon$.

Sigui $\{A_n : n = 1, 2, \dots, \infty\}$ una successió de Cauchy de conjunts en $(\mathcal{H}(X), h)$. És a dir, donat $\epsilon > 0$, existeix N tal que per $n, m \geq N$ tenim

$$A_n + \epsilon \supset A_m \quad \text{i} \quad A_m + \epsilon \supset A_n,$$

és a dir, $h(A_n, A_m) \leq \epsilon$.

Ens centrem amb les successions de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en X amb al propietat que $x_n \in A_n$ per cada n . En particular, necessitem la següent propietat que permet l'extensió d'una subsuccessió de Cauchy $\{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ tal que $x_{n_j} \in A_{n_j}$ per cada j , a una successió de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Lema 3.2 (Lema d'extensió). *Sigui (X, d) un espai mètric, $\{A_n : n = 1, 2, \dots, \infty\}$ una successió de Cauchy de punts de $(\mathcal{H}(X), h)$ i $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ una successió infinita d'enters*

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Suposem que tenim una successió de Cauchy $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, 3, \dots\}$ en (X, d) . Llavors existeix una successió de Cauchy $\{\tilde{x}_n \in A_n : j = 1, 2, 3, \dots\}$ tal que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ per a tot $j = 1, 2, 3, \dots$

Demostració. Donada la contrucció de la successió $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$. Per cada $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ escollim $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$. És a dir, \tilde{x}_n és el punt més proper (o un dels punts més propers) a x_{n_1} en A_n . L'existència d'aquest punt pròxim està garantida per la compacitat de A_n .

De forma similar, per cada $j \in \{2, 3, \dots\}$ i cada $n \in \{n_j + 1, \dots, n_{j+1}\}$ escollim $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$.

Ara veurem que $\{\tilde{x}_n\}$ té les propietats desitjades, és a dir, que és una extensió de $\{x_{n_j}\}$ a $\{A_n\}$. Clarament $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ i $x_n = A_n$ per construcció.

Anem a provar que $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$ és una successió de Cauchy: Per hipòtesi sabem que $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, \dots\}$ és una successió de Cauchy, aleshores per un $\epsilon > 0$ donat, existeix N_1 tal que $n_k, n_j \geq N_1$ implica que $d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Hi ha un N_2 tal que $m, n \geq N_2$ que implica que $d(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Llavors, siguin $N = \max\{N_1, N_2\}$ i $m, n \geq N$ tenim que

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$$

on $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$ i $n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$. Com que $h(A_m, A_n) < \frac{\epsilon}{3}$ existeix $y \in A_m \cap (\{x_{n_j}\} + \epsilon/3)$ tal que $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Anàlogament $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Per tant

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

per a tot $m, n > N$. És a dir $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1, 2, \dots\}$ és una successió de Cauchy.

Ja podem demostrar la completesa d'aquest espai mètric.

3.2 La completesa de l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h)$

Teorema 3.1 (La completesa de l'espai mètric dels fractals). *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Aleshores $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet. D'altra banda, si $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy llavors*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$$

i pot ser caracteritzat de la següent manera:

$$A = \{x \in X : \text{existeix una successió } \{x_n \in A_n\} \text{ que convergeix a } x\}.$$

Demostració. Sigui $\{A_n\}$ una successió de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ i sigui A la definida a l'enunciat del teorema. Dividirem la demostració en les següents parts:

- (a) $A \neq \emptyset$;
- (b) A és tancat i per tant complet ja que X és complet;
- (c) Per $\epsilon > 0$ existeix N tal que per $n \geq N$, $A \subset A_n + \epsilon$;
- (d) A és totalment acotat i per (b) és compacte;
- (a) $\lim A_n = A$.

Demostració de (a). Aquesta part de la demostració equival a veure l'existència d'una successió de Cauchy $\{a_i \in A_i\}$ en X per la definició del conjunt A .

Per fer-ho trobarem una successió d'enters positius $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$ tals que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \quad \text{per } m, n > N_i.$$

Escollim $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Llavors, com $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, podem trobar un

$x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$.

Suposem que hem triat una successió finita $x_{N_i} \in A_{N_i}$ amb $i = 1, 2, \dots, k$ tal que $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}$. Llavors com $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$, i $x_{N_k} \in$

A_{N_k} , podem trobar $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tal que $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$. Per exemple, sigui $x_{N_{k+1}}$ el punt d' $A_{N_{k+1}}$ més proper a x_{N_k} .

Per inducció podem trobar una successió infinita $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ tal que $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$. Veiem que $\{x_{N_i}\}$ és una successió de Cauchy en X :

Sigui $\epsilon > 0$ i escollim N_ϵ tal que $\sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$. Llavors per $m > n \geq N_\epsilon$

tenim que

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$$

Pel *Lema d'extensió* existeix una subsuccessió de Cauchy $\{a_i \in A\}$ tal que $a_{N_i} = x_{N_i}$. Llavors el $\lim a_i$ existeix i per definició és A . Per tant $A \neq \emptyset$.

Demostració de (b). Per veure que A és tancat, suposem que $\{a_i \in A_i\}$ és una successió que convergeix a un punt a .

Veurem que $a \in A$ i per tant tindrem que A és tancat:

Per cada enter positiu i existeix una successió $\{x_{i,n} \in A_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i,n} = a_i$. També existeix una successió creixent de números positius $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$. A més hi ha una subsuccessió d'enters $\{m_i\}$ que es pot estendre a una successió convergent $\{z_i \in A_i\}$ i llavors $a \in A$.

Per tant tenim provat que A és tancat.

Demostració de (c). Sigui $\epsilon > 0$ existeix N tal que per $m, n \geq N$ tal que $h(A_m, A_n) \leq \epsilon$. Ara, sigui $n \geq N$ llavors per $m \geq n$, $A_m \subset A_n + \epsilon$. Necessitem provar que $A \subset A_n + \epsilon$:

Sigui $a \in A$, existeix una successió $\{a_i \in A_i\}$ que convergeix a a . Assumim N prou gran tal que per $m \geq N$ $d(a_m, a) < \epsilon$. Aleshores $a_m \in A_n + \epsilon$ per tant $A_m \subset A_n + \epsilon$.

A partir de que A_n és compacte veurem que $A_n + \epsilon$ és tancat. Llavors com $a_m \in A_n + \epsilon$ per a tot $M \geq N$, a també ha d'estar en $A_n + \epsilon$.

Això completa la demostració que $A \subset A_n + \epsilon$ per un n prou gran.

Demostració de (d). Farem la demostració per absurd:

Suposem que A no és totalment acotat, llavors per algun $\epsilon > 0$ no existiria un ϵ -net finit.

Per tant podríem trobar una successió $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en A tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ per $i \neq j$ i veurem que ens porta a una contradicció.

Per (c) existeix un n prou gran tal que $A \subset A_n + \frac{\epsilon}{3}$. Per cada x_i existeix una $y_i \in A_n$ corresponent per la qual $d(x_i, y_i) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Com A_n és compacte algunes subsuccessions $\{y_{n_i}\}$ de $\{y_i\}$ convergeixen.

Així doncs podem trobar punts en la successió $\{y_{n_i}\}$ tan propers com volguem. En particular, podem trobar dos punts y_{n_i} i y_{n_j} tals que $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}$. Però llavors

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

i tenim una contradicció per hipòtesi.

Demostració de (e). Per l'apartat (d), $A \in \mathcal{H}(X)$. Per tant, per l'apartat (c) i el *Lema 3.1* tindrem que $\lim A_n = A$ si veiem que per $\epsilon > 0$ existeix N tal que per $n \geq N$, $A_n \subset A + \epsilon$.

Ho demostrem:

Sigui $\epsilon > 0$ i trobada N , tal que per $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Aleshores per $m, n \geq N$, $A_m \subset A_n + \frac{\epsilon}{2}$. Sigui $n \geq N$ demostrarem que $A_n \subset A + \epsilon$: Sigui $y \in A_n$, existeix una successió creixent $\{N_i\}$ d'enters tal que $n < N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$ i per $m, k \geq N_j$, $A_m \subset A_k + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Notem que $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\epsilon}{2}$. Com que $y \in A_n$, existeix un $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Com $x_{N_1} \in A_{N_1}$, hi ha un punt $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}$.

D'una manera similar podem utilitzar la inducció per trobar una successió $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \dots$ tal que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ i $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Usant la desigualtat triangular reiteradament veiem que $d(y, x_{N_j}) \leq \epsilon$ per a tot j , i per tant $\{x_{N_j}\}$ és una successió de Cauchy. $\{x_{N_j}\}$ convergeix a un punt x que està en A . D'altra banda $d(y, x_{N_j}) \leq \epsilon$ implica que $d(x, y) \leq \epsilon$.

Així, hem demostrat que $A_n \subset A + \epsilon$ per $n \geq N$, que completa la demostració de que $\lim A_n = A$ i en conseqüència que $(\mathcal{H}(X), h)$ és un espai mètric complet.

3.3 Transformacions afins

El proper objectiu que tenim és definir un sistema iteratiu de funcions, IFS, per poder crear els fractals. Començarem veient diferents transformacions, unes aplicacions molt importants en els IFS.

Definició 3.5. Sigui (X, d) un espai mètric. Una **transformació** en X és una funció $f : X \rightarrow X$, que assigna exactament un punt $f(x) \in X$ a cada $x \in X$.

Considerem les transformacions afins en el pla euclidià $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

on $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ és una matriu 2×2 i t és el vector columna $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Aquestes transformacions tenen propietats geomètriques i algebraiques importants. La matriu A sempre es pot escriure de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos(\theta_1) & -r_2 \sin(\theta_2) \\ r_1 \sin(\theta_1) & r_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

on (r_1, θ_1) són les coordenades polars del punt (a, c) i $\left(r_2, \left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ són les coordenades polars del punt (b, d) .

Per a poder crear fractals, ens preguntem com podem trobar una transformació afí que transformi aproximadament un conjunt donat en un altra a \mathbb{R} . Comencem

introduint els eixos de coordenades x i y . Marquem tres punts en la imatge inicial i determinem les seves coordenades (x_1, x_2) , (y_1, y_2) i (z_1, z_2) . Aleshores marquem els punts corresponents en la transformació de la imatge que volem representar i determinem les seves coordenades; $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ i $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ respectivament. Llavors a , b i e s'obtenen mitjançant la resolució de les tres equacions lineals

$$\begin{aligned}x_1 a + x_2 b + e &= \tilde{x}_1, \\y_1 a + y_2 b + e &= \tilde{y}_1, \\z_1 a + z_2 b + e &= \tilde{z}_1;\end{aligned}$$

mentre c , d i f satisfan

$$\begin{aligned}x_1 c + x_2 d + f &= \tilde{x}_2, \\y_1 c + y_2 d + f &= \tilde{y}_2, \\z_1 c + z_2 d + f &= \tilde{z}_2.\end{aligned}$$

Definició 3.6. Una transformació $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s'anomena **similitud** si és una transformació afí que té una de les formes especials

$$\begin{aligned}w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\end{aligned}$$

per alguna translació $(e, f) \in \mathbb{R}^2$, algun nombre real $r \neq 0$, i algun angle θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. θ s'anomena l'**angle de rotació** mentre que r s'anomena el **factor d'escala**. La transformació lineal

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

és una **rotació**. La transformació lineal

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

és una **reflexió**.

Notem que la similitud preserva angles.

3.4 Aplicacions contractives en l'espai dels fractals

Un cop tenim el concepte de transformació, necessitem poder definir aplicacions contractives.

El teorema més important que veurem és el teorema del punt fix de Banach.

Definició 3.7. Sigui $f : X \rightarrow X$ una transformació sobre un espai mètric. Un punt $x_f \in X$ tal que $f(x_f) = x_f$ s'anomena **punt fix de la transformació**.

Definició 3.8. Una **transformació** $f : X \rightarrow X$ sobre un espai mètric (X, d) s'anomena **contractiva o aplicació contractiva** si existeix una constant $0 \leq s < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Qualsevol nombre s s'anomena un **factor de contracció per f** .

Teorema 3.2 (Teorema de l'aplicació contractiva o teorema del punt fix de Banach). Sigui $f : X \rightarrow X$ una aplicació contractiva sobre un espai mètric complet (X, d) . Llavors f té exactament un punt fix $x_f \in X$ i, a més, per a qualsevol punt $x \in X$, la successió $\{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ convergeix a x_f . És a dir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \quad \text{per cada } x \in X.$$

Demostració. Sigui $x \in X$ i $0 \leq s < 1$ un factor de contracció de f . Llavors

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{m,n\}} d(x, f^{|n-m|}(x))$$

per a tot $m, n = 0, 1, 2, \dots$, on hem fixat $x \in X$. En particular, per $k = 0, 1, 2, \dots$, tenim

$$\begin{aligned} d(x, f^k(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{(k-1)}(x), f^k(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \\ &\leq (1 - s)^{-1}d(x, f(x)) \end{aligned}$$

que si ho substituïm a l'equació anterior tenim que

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{m,n\}}(1 - s)^{-1}d(x, f(x))$$

de la qual segueix immediatament que $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ és una successió de Cauchy. Puix que X és complet, aquesta successió de Cauchy poseix un límit $x_f \in X$, i tenim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f.$$

Ara demostrarem que x_f és un punt fix de f . Ja que f és contractiva també és contínua i per tant

$$f(x_f) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = x_f.$$

Finalment, pot haver més d'un punt fix? Suposem que sí. Siguin x_f i y_f dos punts fixos de f llavors $x_f = f(x_f)$ i $y_f = f(y_f)$ i

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s d(x_f, y_f)$$

on $(1 - s)d(x_f, y_f) \leq 0$, que implica $d(x_f, y_f) = 0$ al ser d distància, i per tant $x_f = y_f$. En conclusió, existeix un únic punt fix.

Introduïm l'anotació $h(d)$ per mostrar que d és la mètrica subjacent per la mètrica de Hausdorff h . Així relacionarem les aplicacions contractives en l'espai dels fractals.

Lema 3.3. *Sigui $w : X \rightarrow X$ una aplicació contractiva sobre l'espai mètric (X, d) . Llavors w és contínua.*

Demostració. Donat $\epsilon > 0$ i sigui $s > 0$ un factor de contracció per w . Llavors

$$d(w(x), w(y)) \leq sd(x, y) < \epsilon$$

sempre que $d(x, y) < \delta$ amb $\delta = \frac{\epsilon}{s}$.

Lema 3.4. *Sigui $w : X \rightarrow X$ una aplicació contínua sobre l'espai mètric (X, d) . Llavors w envia $\mathcal{H}(X)$ a ell mateix.*

Demostració. Sigui S un subconjunt compacte no buit de X . Llavors clarament $w(S) = \{w(x) : x \in S\}$ és no buit. Volem mostrar que $w(S)$ és compacte. Sigui $\{y_n = w(x_n)\}$ una successió infinita de punt en S . Llavors $\{x_n\}$ és una successió infinita de punts en S . Puix que S és compacte existeix una subsuccessió $\{x_{N_n}\}$ que convergeix a un punt $\hat{x} \in S$. Però llavors la continuïtat de w implica que $\{y_{N_n} = w(x_{N_n})\}$ és una subsuccessió de $\{y_n\}$ que convergeix a $\hat{y} = w(\hat{x}) \in w(S)$.

El lema següent ens diu com fer una aplicació contractiva sobre $(\mathcal{H}(X), h)$ a partir d'una aplicació contractiva sobre (X, d) .

Lema 3.5. *Sigui $w : X \rightarrow X$ una aplicació contractiva sobre un espai mètric (X, d) amb un factor de contracció s . Llavors $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida per*

$$w(B) = \{w(x) : x \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

és una aplicació contractiva sobre $(\mathcal{H}(X), h(d))$ amb factor de contracció s .

Demostració. Pel Lema 3.3 tenim que $w : X \rightarrow X$ és contínua. Per tant pel Lema 3.4 w envia $\mathcal{H}(X)$ en ell mateix. Siguin $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Llavors

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \text{Max}\{\text{Min}\{d(w(x), w(y)) : y \in C\} : x \in B\}, \\ &\leq \text{Max}\{\text{Min}\{s \cdot d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s \cdot d(B, C). \end{aligned}$$

De forma similar $d(w(C), w(B)) \leq s \cdot d(C, B)$. Per tant,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= \text{Max}\{d(w(B), w(C)), d(w(C), w(B))\} \leq \text{Max}\{s \cdot d(B, C), d(C, B)\} \\ &\leq s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

Lema 3.6. Per a tots B, C, D i E en $\mathcal{H}(X)$

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \text{Màx}\{h(B, D), h(C, E)\}$$

on h és la mètrica de Hausdorff.

Lema 3.7. Sigui (X, d) un espai mètric i $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ aplicacions contractives sobre $(\mathcal{H}(X), h)$. Sigui s_n el factor de contracció de w_n per cada n , definim $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ per

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \quad \text{per cada } B \in \mathcal{H}(X)$$

Lavors W és una aplicació contractiva amb factor de contracció $s = \text{Max}\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

3.5 Sistemes iteratius de funcions, IFS

Ja tenim tots els components per definir els IFS. Aquests ens serviran per poder calcular models fractals puix que ens definirà unes transformacions en un conjunt que iterant aquestes transformacions aconseguirem les representacions dels fractals que volíem. En la secció següent veurem una nova definició d'IFS que dependrà de probabilitats. Aquests dos processos iteratius estan representats en els programes adjunts en el treball.

Definició 3.9. Un **sistema iteratiu de funcions hiperbòlic** consisteix en un espai mètric complet (X, d) junt amb un conjunt finit d'aplicacions contractives $w_n : X \rightarrow X$, amb els factors de contracció s_n respectius, per $n = 1, 2, \dots, N$. L'abreviatura IFS s'utilitza per "sistema iteratiu de funcions". La notació per als IFS que acabem d'enunciar és $\{X; w_n \text{ amb } n = 1, 2, \dots, N\}$ i el seu factor de contracció és $s = \text{Max}\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$.

Teorema 3.3. Sigui $\{X; w_n \text{ amb } n = 1, 2, \dots, N\}$ un IFS amb factor de contracció s . Lavors la transformació $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida per

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

per a tot $B \in \mathcal{H}(X)$, és una aplicació contractiva sobre l'espai mètric complet $(\mathcal{H}(X), h(d))$ amb factor de contracció s . És a dir,

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C)$$

per a tot $B, C \in \mathcal{H}(X)$. El seu únic punt fix, $A \in \mathcal{H}(X)$, compleix

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A),$$

i ve donada per $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ per a qualsevol $B \in \mathcal{H}(X)$.

Definició 3.10. El punt fix $A \in \mathcal{H}(X)$ descrit en el teorema s'anomena l'**atractor de l'IFS**.

Veiem que l'atractor A és el que volem aconseguir representar en el programa "deterministic.c" seguint l'algorisme que explicarem més endavant, tot i que ho veurem per un nombre concret d'iteracions.

3.6 Conjunts de condensació

Una altra manera de crear aplicacions contractives en $\mathcal{H}(X)$ és mitjançant conjunts de condensació.

Definició 3.11. Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $C \in \mathcal{H}(X)$. Definim una transformació $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ per $w_0(B) = C$ per a tot $B \in \mathcal{H}(X)$. Llavors w_0 s'anomena una **transformació de condensació** i C s'anomena el **conjunt de condensació associat**.

Observem que una transformació de condensació $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ és una aplicació contractiva sobre l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h(d))$, amb factor de contracció igual a 0, i que poseix un únic punt fix, concretament el conjunt de condensació.

Definició 3.12. Sigui $\{X, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un IFS hiperbòlic amb factor de contracció $0 \leq s < 1$. Sigui $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ una transformació de condensació. Llavors $\{X, w_0, w_1, \dots, w_N\}$ s'anomena **IFS hiperbòlic amb condensació, amb factor de contracció s** .

Teorema 3.4. Sigui $\{X; w_n : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ un sistema de funcions iterat hiperbòlic amb condensació amb factor de contracció s . Llavors la transformació $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definit per

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

és una aplicació contractiva sobre l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h(d))$ amb factor de contracció s . És a dir,

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B, C \in \mathcal{H}(X).$$

El seu únic punt fix $A \in \mathcal{H}(X)$ compleix

$$A = W(A) = \bigcup_{n=0}^N w_n(A)$$

i ve donat per $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$ per a qualsevol $B \in \mathcal{H}(X)$.

3.7 Teorema del Collage

Un cop definites els IFS veiem com fer models fractals amb l'ajuda del *Teorema del Collage*.

Teorema 3.5 (Teorema del Collage). *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Donat $L \in \mathcal{H}(X)$ triem un IFS (o IFS amb condensació) $\{X; (w_0), w_1, w_2, \dots, w_n\}$ amb factor de contracció $0 \leq s < 1$, de manera que*

$$h\left(L, \bigcup_{n=1(n=0)}^N w_n(L)\right) \leq \epsilon,$$

on $h(d)$ és la mètrica de Hausdorff. Llavors

$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s}$$

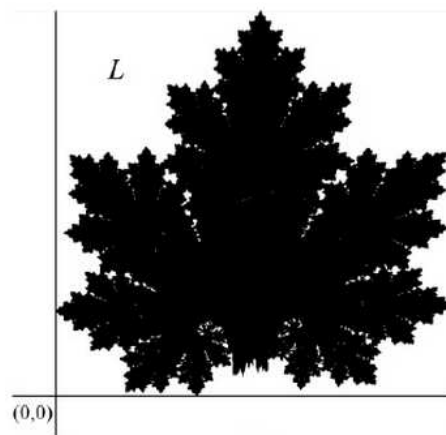
on A és un atractor de l'IFS. Equivalentment,

$$h(L, A) \leq h\left(\bigcup_{n=1(n=0)}^N w_n(L)\right) \quad \text{per a tot } L \in \mathcal{H}(X).$$

El *Teorema del Collage* ens diu que podem trobar un IFS tal que el seu atractor és "semblant" a un conjunt donat, tot i que el procés per trobar un conjunt de transformacions tal que el collage de les imatges sota aquestes és pròxim al conjunt donat no és senzill. La proximitat es mesura usant la mètrica de Hausdorff. És a dir, donat un conjunt L volem trobar un IFS pel qual L és l'atractor.

Veurem com utilitzar el Teorema del Collage amb un exemple:

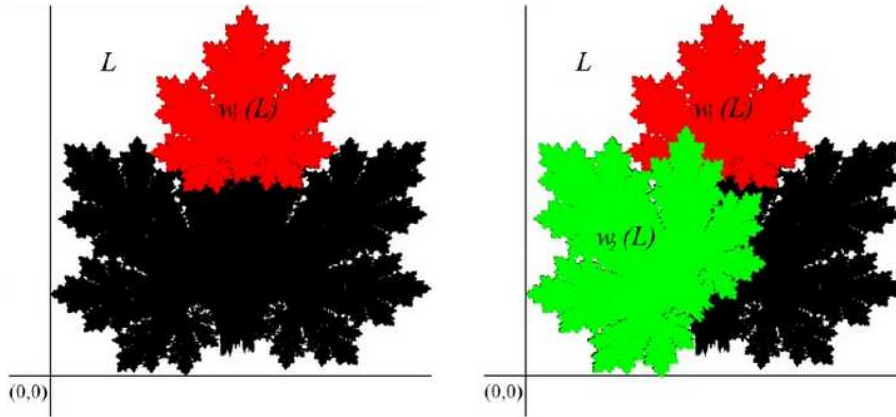
Exemple 1. Considerem que el nostre compacte L és la següent fulla en \mathbb{R}^2 :



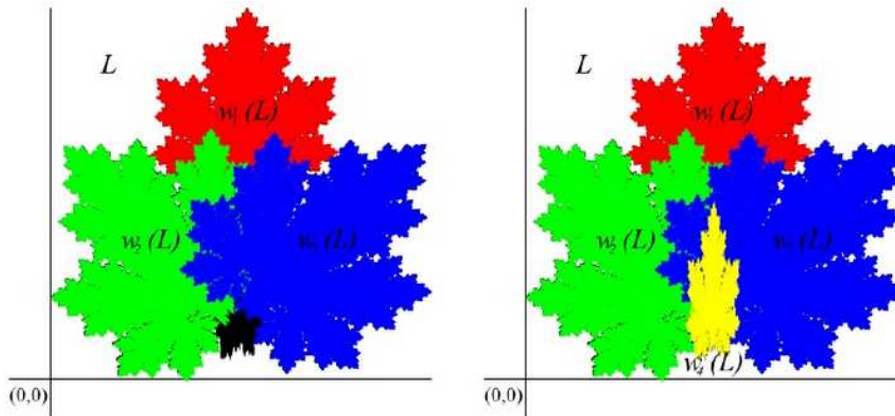
El primer que hem de fer és trobar un conjunt de contraccions, el mínim número d'elles, tal que la primera iteració és L sota el conjunt de contraccions, aproximí bé

L d'acord amb la mètrica de Hausdorff. És a dir, volem aconseguir un nou conjunt que tingui fronteres semblants i que la separació en el punt on més es separan no sigui major a ϵ .

Considerem les contraccions w_1 i w_2 següents:



I les contraccions w_3 i w_4 següents:



Aquest exemple és senzill puix que la fulla presenta una gran autosimilitud pel que no és difícil trobar un grup de contraccions que al aplicar-se'l a L , la primera iteració ens dongués com a resultat una imatge molt similiar a la fulla.

Observem que el mètode per trobar les contraccions és intuïtiu, el que és un dels grans desavantatges del Teorema del Collage, és a dir, no hi ha un mètode general per trobar el conjunt de contraccions que volem, transformant-se així amb un mètode d'optimització: trobar el menor conjunt de contraccions que serveixin per l'efecte desitjat. Les dimensions aproximades (en píxels) de la fulla en la primera figura és de 630×650 , el valor aproximat de $\epsilon = 7$, és a dir,

$$h(L, W(L)) \leq 7$$

el codi de l'IFS que trobem per l'exemple anterior és el següent:

w	a	b	c	d	e	f
1	0.495	0	0	0.507	169.775	309.523
2	0.449	-0.464	0.496	0.48	185.434	-61.531
3	0.432	0.447	-0.519	0.502	166.383	233.597
4	0.143	0	0	0.432	273.071	31.992

Figura 1: Font [6]

El factor de contracció aproximat per l'IFS, que és el màxim dels factors de contracció del w_i , és $s = 0.722$. Llavors, pel Teorema del Collage, tenim que:

$$h(L, A) \leq h \left(\bigcup_{n=1(n=0)}^N w_n(L) \right) \leq \frac{7}{(1 - 0.722)} \approx 25.2$$

que no és una mala aproximació tenint en compte que l'amplada de la fulla és de 650.

La demostració del Teorema del Collage és la demostració del lema següent:

Lema 3.8. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Sigui $f : X \rightarrow X$ una aplicació contractiva amb factor de contracció $0 \leq s < 1$ i sigui $x_f \in X$ el punt fix de f . Llavors*

$$d(x, x_f) \leq (1 - s)^{-1} \cdot d(x, f(x)) \quad \text{per a tot } x \in X.$$

Demostració. La funció de distància $d(a, b)$ per un $a \in X$ fix és contínua a $b \in X$. Per tant

$$\begin{aligned} d(x, x_f) &= d \left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n d(f^{(m-1)}(x), f^m(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x)) (1 + s + \dots + s^{n-1}) \leq (1 - s)^{-1} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

L'algorisme determinístic iteratiu que usem per calcular fractals i que està representat en el programa adjunt és el següent:

Sigui $\{X; w_n : n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ un IFS hiperbòlic. Escollim un conjunt compacte $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ (en el programa és un quadrat). Després calculem successivament $A_n = W^n(A)$ de la manera següent:

$$A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n) \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

Així construïm una successió $\{A_n; n = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{H}(X)$. Llavors pel *Teorema 3.3* la successió $\{A_n\}$ convergeix a l'atractor de l'IFS en la mètrica de Hausdorff.

4 Espais de codi

Per a poder veure els fractals aleatòris que ens interessin, necessitem fer una breu presentació dels espais de codi.

Definició 4.1. *Sigui $\{1, 2, \dots, N\}$ un conjunt finit. El conjunt de totes les combinacions infinites de N dígits s'anomena **espai de codi d' N símbols**, i el denotarem per Σ . Un element $\sigma \in \Sigma$ s'escriu com*

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8\dots,$$

on cada $\sigma_i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Teorema 4.1. *(Σ, d_C) és un espai mètric on d_C és la mètrica donada per*

$$d_C(\omega, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\omega_n - \sigma_n|}{(N+1)^n} \quad \forall \omega, \sigma \in \Sigma.$$

Cal demostrar que d_C és una mètrica en Σ . Siguin $\omega, \sigma, \theta \in \Sigma$, veiem que es compleixen els axiomes de la definició de distància:

- i. $0 \leq d_C(\omega, \sigma) < \infty$? Com que Σ està format per N símbols, és clar que $|\omega_n - \sigma_n| < N$, per tant $d_C(\omega, \sigma) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^n} = 1$ i clarament $0 \leq d_C(\omega, \sigma)$, per tant $0 \leq d_C(\omega, \sigma) < \infty$.
- ii. Si $\omega = \sigma \Rightarrow d_C(\omega, \sigma) = 0$? $d_C(\omega, \sigma) = 0$ si $|\omega_n - \sigma_n| = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, per tant $\omega = \sigma$.
- iii. $d_C(\omega, \sigma) = d_C(\sigma, \omega)$? Com que $|\omega_n - \sigma_n| = |\sigma_n - \omega_n|$ l'alavors $d_C(\omega, \sigma) = d_C(\sigma, \omega)$.
- iv. $d_C(\omega, \sigma) \leq d_C(\omega, \theta) + d_C(\theta, \sigma)$? Es compleix ja que $|\omega_n - \sigma_n| = |\omega_n - \theta_n| + |\theta_n - \sigma_n|$.

Definició 4.2. *Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un IFS hiperbòlic. L'**espai de codi associat amb l'IFS** és l'espai mètric (Σ, d_C) .*

El nostre objectiu és construir una transformació contínua des de l'espai de codi associat amb un IFS a l'atractor de l'IFS. Per fer-ho necessitem els dos lemes següents.

El primer lema ens diu que si tenim un IFS hiperbòlic que actua en un espai mètric complet, podem restringir aquests IFS hiperbòlics respecte a un subconjunt compacte. D'aquesta manera podem tractar a l'IFS com si estigués definit en un espai mètric compacte.

Lema 4.1. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un IFS hiperbòlic. Sigui $K \in \mathcal{H}(X)$ llavors existeix $\tilde{K} \in \mathcal{H}(X)$ tal que $K \subset \tilde{K}$ i $w_n : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ per $n = 1, 2, \dots, N$. En altres paraules, $\{\tilde{K}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ és un IFS hiperbòlic on l'espai subjacent és compacte.*

Demostració. Considerem $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ tal que

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

per a tot $B \in \mathcal{H}(X)$. Per construir \tilde{K} considerem l'IFS amb condensació $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ on l'aplicació de condensació w_0 està associada amb el conjunt de condensació K . Pel *Teorema 3.4*, l'atractor d'aquest IFS pertany a $\mathcal{H}(X)$. Podem escriure

$$\tilde{K} = (K \cup W^{\circ 1}(K) \cup W^{\circ 2}(K) \cup W^{\circ 3}(K) \cup \dots \cup W^{\circ 2}(K) \cup \dots)$$

i per tant és fàcil veure que $K \subset \tilde{K}$ i que $W(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$.

Per poder relacionar l'espai de direccions amb atractors d'IFS usem el lema que segueix.

Lema 4.2. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un IFS hiperbòlic amb contractivitat s . Sigui (Σ, d_C) l'espai de codi associat amb l'IFS. Per cada $\sigma \in \Sigma$, $n \in N$ i $x \in X$ definim*

$$\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \dots \circ w_{\sigma_n}(x).$$

Sigui K un subconjunt compacte no buit de X . Llavors hi ha una constant real D tal que

$$d(\phi(\sigma, n, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) \leq D s^{\min\{m, n\}}.$$

per tot $\sigma \in \Sigma$ i tot $m, n \in N$ i tot $x_1, x_2 \in K$.

Demostració. Siguin σ, m, n, x_1 i x_2 els definits al lema. Considerem la \tilde{K} del lema anterior. Sense perdre generalitat podem suposar que $m < n$. Llavors veiem que

$$\phi(\sigma, n, x_2) = \phi(\sigma, m, \phi(\omega, n - m, x_2))$$

Sigui $x_3 = \phi(\omega, n - m, x_2)$. Llavors $x_3 \in \tilde{K}$. Per tant podem escriure

$$\begin{aligned} d(\phi(\sigma, m, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)) &= d(\phi(\sigma, m, x_1), \phi(\sigma, m, x_3)) \\ &\leq s d(w_{\sigma_2} \circ \dots \circ w_{\sigma_m}(x_1), w_{\sigma_2} \circ \dots \circ w_{\sigma_m}(x_3)) \\ &\leq s^2 d(w_{\sigma_3} \circ \dots \circ w_{\sigma_m}(x_1), w_{\sigma_3} \circ \dots \circ w_{\sigma_m}(x_3)) \\ &\leq s^m d(x_1, x_3) \leq s^m D. \end{aligned}$$

on $D = \max\{d(x_1, x_3) : x_1, x_3 \in \tilde{K}\}$. D és finit ja que \tilde{K} és compacte.

Teorema 4.2 (Teorema de les adreces). *Sigui (X, d) un espai mètric complet, $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ un IFS hiperbòlic, A l'atractor de l'IFS i (Σ, d_C) l'espai de codi associat amb l'IFS. Per cada $\sigma \in \Sigma$, $n \in N$ i $x \in X$ sigui*

$$\phi(\sigma, n, x) = w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}(x).$$

Llavors

$$\phi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$$

existeix, pertany a A i és independent de $x \in X$. Si K és un subconjunt compacte de X aleshores la convergència és uniforme sobre $x \in K$. La funció $\phi : \Sigma \rightarrow A$ que proporciona és contínua i exhaustiva.

Demostració. Sigui $x \in X$ i $K \in \mathcal{H}(X)$ tal que $x \in K$. Construïm \tilde{K} definit en el Lema anterior i definim $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ de forma usual. Pel Teorema 3.4, W és una aplicació contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{H}(X), h(d))$ i tenim que

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \{W^{on}(K)\}.$$

En particular $\{W^{on}(K)\}$ és una successió de Cauchy en $(\mathcal{H}(X), h)$. Notem que $\phi(\sigma, n, x) \in W^{on}(K)$. Del Teorema de la completesa de l'espai mètric dels fractals tenim que si existeix $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, x)$ llavors pertany a A .

L'existència d'aquest darrer límit es dedueix del fet que, fixat $\sigma \in \Sigma$, $\{\phi(\sigma, n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió de Cauchy pel Lema 4.2.

$$d(\phi(\sigma, m, x), \phi(\sigma, n, x)) \leq Ds^{\min\{m,n\}} \quad \forall x \in K,$$

i el costat dret tendeix a zero quan m i n tendeixen a infinit. La uniformitat de la convergència es dedueix del fet que la constant D és independent de $x \in K$.

Ara provarem que $\phi : \Sigma \rightarrow A$ és contínua. Donat $\epsilon > 0$, escollim n tal que $s^n D < \epsilon$ i siguin $\sigma, \omega \in \Sigma$ tals que

$$d_C(\sigma, \omega) < \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^m} = \frac{1}{(N+1)^{n+1}}.$$

Llavors podem comprovar que σ han de coincidir amb ω a través de n termes; és a dir, $\sigma_1 = \omega_1, \sigma_2 = \omega_2, \dots, \sigma_n = \omega_n$. Per tant tenim que, per cada $m \geq n$

$$d(\phi(\sigma, m, x), \phi(\sigma, n, x)) = d(\phi(\sigma, n, x_1), \phi(\sigma, n, x_2)),$$

per algun parell $x_1, x_2 \in \tilde{K}$. Pel Lema 4.2. el costat dret és més petit que $s^n D$ que és menor que ϵ . Prenent el límit quan $m \rightarrow \infty$ trobem que

$$d(\phi(\sigma), \phi(\omega)) < \epsilon.$$

Finalment, veurem que ϕ és exhaustiva. Sigui $a \in A$. Llavors, de que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\{x\})$, es dedueix del Teorema de la completesa de l'espai mètric dels fractals que hi ha una successió $\{\omega^{(n)} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\omega^{(n)}, n, x) = a.$$

De que (Σ, d_C) és compacte en deduïm que $\{\omega^{(n)} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ té una subsuccessió convergent amb límit $\omega \in \Sigma$. Sense perdre generalitat podem assumir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{(n)} = \omega$. Llavors el nombre d'acords inicials successius entre les components de $\omega^{(n)}$ i ω augmenta sense límit. És a dir, si

$$\alpha(n) = \#\{j \in \mathbf{N} : \omega_k^{(n)} = \omega_k \text{ per } 1 \leq k \leq j\},$$

on $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, aleshores $\alpha(n) \rightarrow \infty$ amb $n \rightarrow \infty$. I deduïm que

$$d(\phi(\omega, n, x), \phi(\omega^{(n)}, n, x)) \leq s^{\alpha(n)} D.$$

Prenent el límit en ambdós costats com $n \rightarrow \infty$ trobem que $d(\phi(\omega), a) = 0$, que implica que $\phi(\omega) = a$. Per tant, $\phi : \Sigma \rightarrow A$ és exhaustiva.

Ja podem estudiar els fractals aleatòris.

5 Fractals aleatòris

Un fractal és un objecte geomètric en el que es repeteix el mateix patró amb diferents escales i amb diferent orientació. Mitjançant un algorisme determinístic d'iteració, que hem vist amb el programa, podem calcular l'atractor d'un IFS hiperbòlic. Les transformacions usades hem vist que venen definides pel sistema iteratiu de funcions definit anteriorment. El procés iteratiu que duem a terme al llarg de les transformacions no actua a l'atzar, però podríem fer que si que hi depengués per obtenir així diferents fractals que dependrien d'unes probabilitats que estarien representades en els sistemes iteratius de funcions respecte probabilitats que definirem en aquesta secció, obtenint així un algorisme aleatori d'iteració.

5.1 Mesures

Definició 5.1. *Sigui X un espai, \mathcal{F} és una classe de subconjunts no buit d'un espai X tal que*

$$i. A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F};$$

$$ii. A \in \mathcal{F} \setminus A \in \mathcal{F}$$

Llavors \mathcal{F} s'anomena una **àlgebra**.

Definició 5.2. *Sigui \mathcal{F} una àlgebra tal que*

$$A_i \in \mathcal{F} \quad i \in 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Llavors \mathcal{F} s'anomena **σ -àlgebra**. Donada qualsevol àlgebra, sempre existeix un mínim, o més petit, σ -àlgebra que el conté.

Definició 5.3. Sigui \mathcal{G} un conjunt de subconjunts d'un espai X . La mínima σ -àlgebra que conté \mathcal{G} s'anomena la **σ -àlgebra generada per \mathcal{G}** .

Definició 5.4. Sigui (X, d) un espai mètric. Sigui \mathcal{B} la σ -àlgebra generada pels subconjunts oberts de X . \mathcal{B} s'anomena l'**àlgebra de Borel associada amb l'espai mètric**. Un element de \mathcal{B} es diu **subconjunt de Borel de X** .

Definició 5.5. Una **mesura** μ , sobre una àlgebra \mathcal{F} , és una funció real no negativa $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, tal que sempre que $A_i \in \mathcal{F}$ per $i = 1, 2, 3, \dots$, amb $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, tenim que

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definició 5.6. Sigui (X, d) un espai mètric i \mathcal{B} els subconjunts de Borel de X . Sigui μ una mesura sobre \mathcal{B} , llavors μ s'anomena **mesura de Borel**.

5.2 Sistemes iteratius de funcions amb probabilitats, IFS amb probabilitats

Definició 5.7. Un **sistema iteratiu de funcions amb probabilitats** consisteix en un IFS $\{\mathbf{X}; w_1, w_2, \dots, w_N\}$, juntament amb un conjunt ordenat de nombres $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ tal que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 \text{ i } p_i > 0 \text{ per } i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

La probabilitat p_i està associada amb la transformació w_i . L'anotarem com $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$.

Definició 5.8. Sigui μ una mesura de Borel en $X \subset \mathbb{R}^2$. Si $\mu(X) = 1$, llavors μ es diu que està **normalitzada**.

5.3 L'espai mètric $(\mathcal{P}(X), d_H)$

Anem a estudiar un nou espai mètric, l'espai compacte $(\mathcal{P}(X), d_H)$, que ens servirà per donar una estructura natural en els atractors de l'IFS, en aquest cas una mesura.

Definició 5.9. Sigui $\mathcal{P}(X)$ el conjunt de mesures de Borel normalitzades en X . La **distància de Hutchinson** d_H en $\mathcal{P}(X)$ es defineix com

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f d\mu - \int_X f d\nu : f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ és contínua i compleix que } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X \right\},$$

$\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$.

Teorema 5.1. *Sigui (X, d) un espai mètric compacte, $\mathcal{P}(X)$ el conjunt de mesures de Borel normalitzades en X i d_H la distància de Hutchinson. Llavors $(\mathcal{P}(X), d_H)$ és un espai mètric compacte.*

5.4 Aplicacions contractives en l'espai $(\mathcal{P}(X), d_H)$

Seguint el procediment de la secció anterior, volem definir aplicacions contractives en $\mathcal{P}(X)$. Sigui (X, d) un espai mètric compacte i $\mathcal{P}(X)$ el conjunt de mesures de Borel normalitzades en X .

Siguin \mathcal{B} els subconjunts de Borel de X i $w : X \rightarrow X$ contínua. Aleshores es pot veure que $w^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. Es dedueix que si ν és una mesura de Borel normalitzada en X , llavors també ho és $\nu \circ w^{-1}$. Això implica que l'operador proper definit envia $\mathcal{P}(X)$ en si mateix.

Definició 5.10. *Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats. L'operador de Markov associat amb l'IFS és la funció $M : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definit com*

$$M(\nu) = p_1\nu \circ w_1^{-1} + p_2\nu \circ w_2^{-1} + \dots + p_N\nu \circ w_N^{-1}$$

$\forall \nu \in \mathcal{P}(X)$.

Definició 5.11. *Una funció real f en un espai X , el qual el seu rang només consisteix en un número finit de valors s'anomena **funció simple**.*

Lema 5.1. *Sigui M l'operador de Markov associat amb un IFS hiperbòlic. Sigui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funció simple o una funció contínua i $\nu \in \mathcal{P}(X)$ llavors*

$$\int_X f d(M(\nu)) = \sum_{i=1}^N p_i \int_V f \circ w_i d\nu.$$

Demostració. Suposem que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua. Pel Teorema 4.1 podem trobar una successió de funcions simples $\{f_n\}$ que convergeix uniformament a f . Sigui n un enter positiu es verifica que

$$\begin{aligned} \int_X f_n d(M(\nu)) &= \sum_{i=1}^N p_i \int_X f_n d\nu \circ w_i^{-1} = \sum_{i=1}^N p_i \int_{w_i(X)} f_n d\nu \circ w_i^{-1} = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \int_X f_n \circ w_i d\nu. \end{aligned}$$

La successió $\{\int f_n d(M(\nu))\}$ convergeix a $\int f d(M(\nu))$. Per cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ i cada enter positiu n , $f_n \circ w_i$ és una funció simple. La successió $\{f_n \circ w_i\}_{n=1}^\infty$ convergeix uniformament a $f \circ w_i$. Resulta que $\{\int f_n \circ w_i d\nu\}_{n=1}^\infty$ convergeix a $\int f \circ w_i d\nu$. Per tant, $\left\{ \sum_{i=1}^N p_i \int f_n \circ w_i d\nu \right\}_{n=1}^\infty$ convergeix a $\sum_{i=1}^N p_i \int f \circ w_i d\nu$.

Teorema 5.2 (Teorema de Hutchinson). *Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats i $s \in (0, 1)$ un factor de contracció de l'IFS. Sigui $M : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'operador de Markov associat a l'IFS. Llavors M és una aplicació contractiva amb factor de contracció s respecte la distància de Hutchinson en $\mathcal{P}(X)$ que és*

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s \cdot d_H \quad \forall \nu, \mu \in \mathcal{P}.$$

En particular, hi ha una única mesura $\mu \in \mathcal{P}(X)$ tal que $M\mu = \mu$.

Demostració. Sigui L el conjunt de funcions contínues $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$. Llavors

$$\begin{aligned} d_H(M(\nu), M(\mu)) &= \sup \left\{ \int f d(M(\mu)) - \int f d(M(\nu)) : f \in L \right\} \\ &= \sup \left\{ \int \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i d\mu - \int \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i d\nu : f \in L \right\}. \end{aligned}$$

Sigui $\tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i$. Llavors $\tilde{f} \in L$. Sigui $\tilde{L} = \{\tilde{f} \in L : \tilde{f} = s^{-1} \sum_{i=1}^N p_i f \circ w_i \text{ per algun } f \in L\}$. Escrivim

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) = \sup \left\{ s \int \tilde{f} d\mu - s \int \tilde{f} d\nu : \tilde{f} \in \tilde{L} \right\}.$$

Com que $\tilde{L} \subset L$, tenim que

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s d_H(\nu, \mu).$$

Definició 5.12. *Sigui μ el punt fix de l'operador de Markov, que existeix pel Teorema de Hutchinson. μ s'anomena la **mesura invariant de l'IFS amb probabilitats**.*

5.5 Mesures invariants

Aquesta mesura invariant seria l'equivalent a l'atractor A de la secció anterior. És a dir, el procés aleatori iteratiu que explicarem a continuació i que es veu reflectit en el programa adjunt "aleatori.c", té com a objectiu representar aquesta mesura invariant.

Com en el cas dels IFS hiperbòlics, veurem el Teorema del Collage per tenir una manera de calcular models fractals però en el cas dels IFS hiperbòlics amb probabilitats.

Teorema 5.3. *Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats i μ la mesura invariant associada. Llavors el suport de μ és l'atractor de l'IFS $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$.*

Demostració. Sigui B el suport de μ . Llavors B és un subconjunt compacte no buit de X . Sigui A l'atractor de l'IFS, llavors

$$\{A; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

és un IFS hiperbòlic. Sigui ν la mesura invariant d'aquest últim, aleshores ν també és una mesura invariant de l'IFS original. Per tant, com que μ és únic, $\nu = \mu$ i tenim que $B \subset A$. Sigui $a \in A$ i \mathcal{O} un conjunt obert que conté a . Usant l'anotació del *Teorema de les Adreces*, siguin Σ l'espai de codi associat amb l'IFS i $\sigma \in \Sigma$ una adreça d' a . Deduïm del *Teorema de les Adreces* que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\sigma, n, A) = a$, on la convergència està en la mètrica de Hausdorff. Aleshores tenim que hi ha un nombre enter positiu n tal que $\phi(\sigma, n, A) \subset \mathcal{O}$. Però $\mu(\phi(\sigma, n, A)) \geq p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots p_{\sigma_n} > 0 \Rightarrow \mu(\mathcal{O}) > 0 \Rightarrow a$ està en el suport de $\mu \Rightarrow a \in B \Rightarrow A \subset B$.

5.6 Teorema del Collage per Mesures

Teorema 5.4 (Teorema del Collage per Mesures). *Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats. Sigui μ la mesura invariant associada i $s \in (0, 1)$ un facot contractiu per l'IFS i sigui $M : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'operador de Markov associat. Llavors, sigui $\nu \in \mathcal{P}(X)$,*

$$d_H(\nu, \mu) \leq \frac{d_H(\nu, M(\nu))}{(1 - s)}.$$

Demostració. És immediata del *Teorema de Hutchinson*.

Podem usar aquest teorema per resoldre un problema invers, similar al proposat a la secció anterior pel *Teorema del Collage*. Donada una mesura $\nu \in \mathcal{P}(X)$, volem trobar un IFS amb probabilitats tal que la seva mesura invariant approximi amb la mètrica de Hutchinson a ν . Per a poder treballar amb les mesures invariants, necessitem ser capaços d'alguna manera de representar-la geomètricament, i això és possible mitjançant una textura. Aquest concepte el veurem a continuació com a conseqüència del *Teorema d'Elton*.

Teorema 5.5 (Teorema d'Elton). *Sigui (X, d) un espai mètric compacte i $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats. Sigui $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una òrbita de l'IFS produïda per l'algorisme aleatori iteratiu, iniciat a x_0 ; és a dir,*

$$x_n = w_{\sigma_n} \circ w_{\sigma_{n-1}} \circ \cdots \circ w_{\sigma_1}(x_0),$$

on les aplicacions es trien independentment de les probabilitats p_1, p_2, \dots, p_N , per $n = 1, 2, 3, \dots$. Sigui μ la única mesura invariant de l'IFS. Llavors, amb probabilitat 1 (és a dir, per a totes les successions de codi $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, excepte per a un conjunt de successions que tenen probabilitat zero),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

per a tota funció contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i tot x_0 .

Si ens restringim a un borelià del nostre espai X , obtenim el següent corol·lari:

Corol·lari 5.1. *Sigui B un borelià de X tal que $\mu(\delta B) = 0$. Sigui $\mathcal{N}(B, n)$ el número de punts $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cap B$, per $n \in \mathbb{N}$. Aleshores amb probabilitat 1*

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(B, n)}{n+1}$$

per tot punt inicial x_0 .

Aquest corol·lari ens diu que la "massa" de B és la proporció d'iteracions, al usar l'algorisme aleatori, que produeixen punts en B .

Allò que volíem respondre per a poder seguir amb l'implementació del *Teorema del Collage per Mesures* és com es veu una mesura invariant.

Ja hem vist que el suport de la mesura invariant d'un IFS amb probabilitats és l'atractor de l'IFS, però el que volem saber és com es distribueix la mesura en el suport. Si fem una aproximació del suport de la mesura invariant mitjançant una partició de borelians i utilitzem l'algorisme aleatori que definirem a continuació, construirem una successió $\{x_n\}$ que estarà distribuïda en la nostra partició i les mesures dels borelians seràn la proporció dels elements que incideixin en cada borelià.

Farem una aproximació d'aquest càlcul considerant n iteracions, el més gran possible, i usarem l'algorisme aleatori per contruir una òrbita de tal manera que a nivell computacional, la partició de borelians que usarem al nostre espai seràn petites caixes representades pels píxels de la pantalla. Tot seguit obtindrem el número de vegades que cada píxel és visitat per l'òrbita. Llavors pel *Teorema d'Elton*, podem aproximar la mesura dels borelians com el quocient del número de vegades que cada píxel va ser visitat per l'òrbita entre el número d'iteracions n . Això ens proporcionarà una imatge a on apareixerà el suport i com està distribuïda la massa en el suport. Finalment per fer la seva representació, assignarem un color, progressivament més clar segons el valor de la mesura d'un borelià sigui major, de tal manera que podrem visualitzar l'atractor i al mateix temps, la gama de negres, ens donarà una idea de la distribució de la massa.

Per tant ja sabem representar geomètricament la mesura invariant d'un IFS mitjançant una textura, per tant podem seguir amb l'implementació del *Teorema de Collage*. Recordem que volíem trobar un IFS amb probabilitats tal que la seva mesura invariant aproximés amb la mètrica de Hutchinson a ν :

Si tenim una textura, la podem pensar com la representació d'una mesura $\nu \in \mathcal{P}(X)$ i si aconseguim trobar un IFS tal que la seva mesura invariant representada per una altra textura, s'assembli a la primera, llavors podem pensar que la distància de

Hutchinson entre elles és petita. Com en el cas del *Teorema del Collage* de la secció anterior, aquest procediment és intuïtiu, i per dur a terme el mètode d'aproximació considerarem una imatge o una textura com un conjunt finit de punts en el pla (com si tinguessim una imatge digital representada pels píxels).

Sigui L un conjunt de punts que representen una imatge en l'espai \mathcal{H} que considerem que fa referència a una mesura $\nu \in \mathcal{P}$. Si $p \& L$ representa la disminució de la densitat, és a dir, com de junts estan els punts, de L per un factor p (per exemple, $\frac{1}{2} \& L$ significa L després d'haber-li tret la meitat dels punts). Aleshores, l'acció

de l'operador de Markov M aplicat a ν , està representat per $\bigcup_{i=1}^N w_i(p_i \& L)$, on les p_i i els w_i pertanyen a l'IFS que intentem trobar per aproximar a ν . El conjunt anterior té aproximadament el mateix nombre de punts que L , per tant l'objectiu és aconseguir un IFS amb probabilitats tal que

$$\bigcup_{i=1}^N w_i(p_i \& L) \approx L.$$

Si trobem aquest IFS, que com hem dit és complicat i intuïtiu, llavors podem obtenir una imatge \tilde{L} que representi la seva mesura invariant μ . Llavors, pel *Teorema del Collage per Mesures*, si

$$\frac{d_H(L, \tilde{L})}{(1-s)}$$

és "petit", tindrem que L i \tilde{L} són semblants

Per a dur a terme aquest procés hem vist que és necessari un algorisme aleatòri per calcular fractals. Aquest està representat en el programa adjunt "*aleatori.c*" i el descriurem a continuació:

Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un IFS hiperbòlic amb probabilitats. L'algorisme aleatòri iteratiu consisteix en prendre un punt inicial $x_0 \in X$, escollir una contracció w_i de forma aleatòria al conjunt $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ d'acord amb la seva probabilitat p_i i evaluar w_i en x_0 , així s'obté el següent punt de l'òrbita de x_0 , $x_1 = w_i(x_0)$.

Fem aquest procés de forma recursiva considerant que les eleccions aleatòries de les contraccions w_i són esdeveniments independents entre si. D'aquesta manera construïm una successió $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, on l'atractor de l'IFS ve donat per

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n}.$$

Exemple 2. La següent taula mostra el codi d'un IFS per la falguera de Barnsley, un dels que es duen a terme al programa "*aleatori.c*", on en la última columna es troben les probabilitats associades a cada contracció

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

Figura 2: Font [1]



Figura 3: Font [6]

Tot i que en el programa adjunt el nombre d'iteracions és fix, si féssim el procés iteratiu incrementant el nombre d'iteracions amb l'IFS anterior el resultat seria el següent:

6 Compressió d'imatge

La importància de les noves tecnologies ha fet que cada vegada les imatges digitals s'hagin de reduir de tamany per poder emmagatzemar-les en els suports dels quals disposem comprimint-les i d'aquesta manera ocupant el mínim espai possible. Per a comprimir imatges existeixen varis mètodes, un d'aquests es la compressió fractal que intentarem explicar.

La idea és que donada una imatge, hem de trobar un IFS que generi una altre imatge similar a la inicial. Així només necessitariem guardar l'IFS, que ocuparà poc espai a l'ordinador ja que, com hem vist, només consta de poques equacions. D'aquesta manera, per regenerar la imatge, només haurem d'aplicar de forma reiterada l'IFS.

A les seccions anteriors hem vist que usant els Teoremes de Collage que hem vist, podem identificar IFS que ens defineixin una imatge concreta, però nosaltres volem

veure aquesta compressió en imatges del món real, és a dir, per exemple, fotografies digitals.

Per a poder entrar en el món de la compressió d'imatge hem de definir un marc d'estudi. Per fer-ho definirem l'espai d'imatges del món real \mathfrak{R} i discutirem diversos models matemàtics per a \mathfrak{R} .

Anem a veure una idea del que és una imatge del món real. Pot ser qualsevol imatge que vam poder veure o imaginar. Podria ser un primer pla d'un rostre bell en la portada d'una revista o una falguera.

Definició 6.1. Denotem per \mathfrak{R} el *conjunt de totes les imatges del món real*. Anomenem *imatge del món real* als elements \mathcal{I} de \mathfrak{R} .

Ara veurem diverses propietats d'aquest conjunt, la imatge utilitzada com a exemple d'algunes propietats és la "Lena".

Propietat (i): Qualsevol imatge del món real $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$ té un suport i dimensions físiques que ambdues juntes proporcionen l'extensió física de la imatge. El suport d'una imatge és un conjunt $\square \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\square = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

on $a < b$ i $c < d$ són constants reals. En aquest cas, les dimensions físiques de \mathcal{I} serien $(b - a)$ unitats i $(d - c)$ unitats, on unitats fa referència a unitats físiques com per exemple metres o polzades.

Una imatge del món real té la geometria i la topologia del seu suport \square . El suport d'una imatge es pot deformar i estirar.

Un punt en una imatge significa un punt en un suport. Cada punt en el suport d'una imatge és el punt en la imatge. La distància d entre un parell de punts (x_1, y_1) i $((x_2, y_2))$ en el suport d'una imatge es mesura usant la mètrica euclidiana,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Imaginem el suport d'una imatge com un full de paper en el qual resideix la imatge. Una regió dins d'una imatge representa la part de la imatge que s'associa amb una regió dins del seu suport.

Propietat (ii): Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$. Llavors \mathcal{I} posseeix atributs cromàtics. Aquests proporcionen les freqüències (color) i intensitats de llum associats amb subconjunts de la imatge. Cada conjunt mesurable en el suport de \mathcal{I} pot estar associat amb una col·lecció d'atributs numèrics i en rangs de freqüències d'intensitats de llum associats amb el conjunt.

Definició 6.2. El suport d'una imatge digital es divideix per una reixeta de línies en una matriu de subconjunts rectangulars anomenats *píxels*.

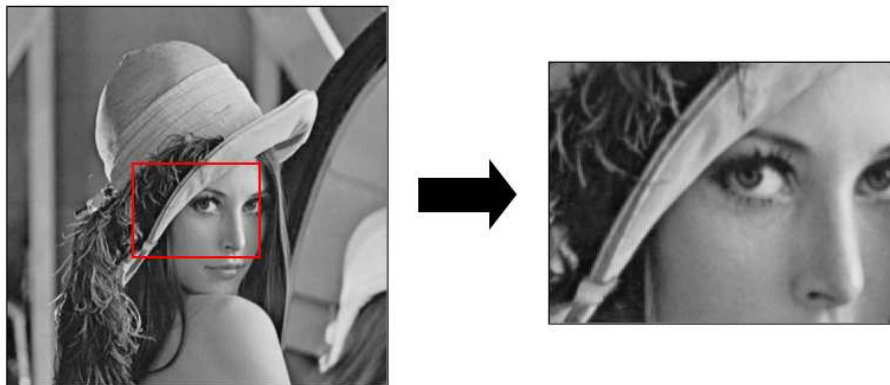
Cada píxel, que és en si mateix un membre de \mathfrak{R} , té els seus propis atributs cromàtics. A la imatge digital, aquests són modelats per un conjunt finit de nombres reals, els quals representen, per exemple, les intensitats de vermell, verd i blau de la llum associada amb el píxel.

Si \mathcal{I} es treballa perquè sigui una imatge en blanc i negre, llavors cada punt en el seu suport \square podria estar associat amb un 0 o un 1, depenent de si el punt és de color negre o blanc, respectivament. Si ha de ser modelat com una imatge en escala de grisos cada punt en \square podria estar associat amb un valor numèric que representa la intensitat de la llum en aquest punt de la imatge. Això ho veurem a continuació.

Propietat (iii): Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$. Llavors \mathcal{I} és independent de la resolució. Això vol dir que \mathcal{I} pot ser descrit en finites altes resolucions arbitràries. Podem assignar valors numèrics als píxels, representant els seus colors i intensitats. Així que els píxels es defineixen tant espacial com en termes dels atributs d'imatge. No hi ha contradicció lògica entre la interpretació d'una imatge descrita en dues resolucions diferents.

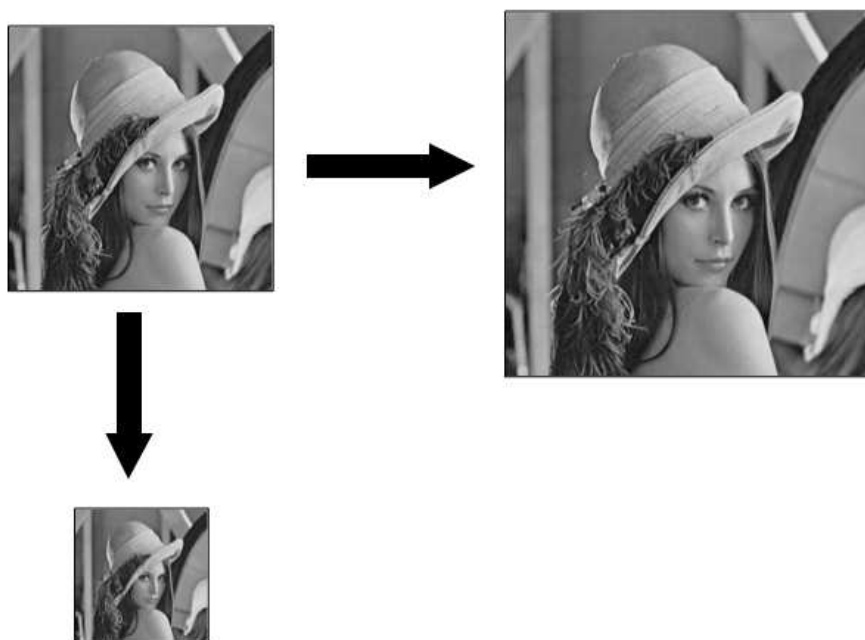
Propietat (iv): El conjunt \mathfrak{R} de totes les imatges del món real és tancat sota l'operació de tall de la següent manera: Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$, triem qualsevol regió rectangular dins d'un suport de \mathcal{I} amb costats paral·lels als costats del suport \mathcal{I} i l'usem per definir una nova imatge $\tilde{\mathcal{I}}$ que estarà en \mathfrak{R} , és a dir, qualsevol imatge del món real conté informació i és una imatge vàlida per dret propi.

Exemple 3. El conjunt \mathfrak{R} de totes les imatges del món real és tancat sota l'operador de tall, és a dir, observem que a la següent figura, la de l'esquerre és un element de l'espai \mathfrak{R} i la de la dreta és un nou element de l'espai \mathfrak{R} :



Propietat (v): Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$ i $\tilde{\mathcal{I}}$ el resultat d'un encongiment o estirament. Llavors $\tilde{\mathcal{I}} \in \mathfrak{R}$, és a dir, \mathfrak{R} és tancat sota encongiment o estirament.

Exemple 4. Observem que la imatge anterior segueix essent una imatge del món real tant si s'estira com si es contrau, és a dir, \mathfrak{R} és tancat sota encongiment o estirament.



La propietat no especifica la forma en què s'estén (o disminueix) una imatge, en particular, no especifica els atributs cromàtics de la imatge estirada. Aquesta especificació depèn del model matemàtic que es fa servir per a \mathfrak{R} . Per a poder-ho controlar podem dotar les imatges del món real amb les següents propietats:

Propietat (vi): Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$ i $\tilde{\mathcal{I}}$ el resultat de reflectir \mathcal{I} en un eix paral·lel a un dels costats del seu suport, llavors $\tilde{\mathcal{I}} \in \mathfrak{R}$, és a dir, \mathfrak{R} és tancat sota la reflexió.

Exemple 5. El reflex d'una imatge del món real és una altra imatge del món real:



Propietat (vii): Sigui $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$ i $\tilde{\mathcal{I}}$ el resultat de retallar una regió rectangular girada de \mathcal{I} . Llavors $\tilde{\mathcal{I}} \in \mathfrak{R}$, és a dir, \mathfrak{R} és tancat sota aquestes operacions de rotació.

Exemple 6. El resultat de retallar una imatge del món real girada produirà una altra imatge del món real:



Similituds, rotacions i reflexions són exemples de transformacions afins. Les propietats (v), (vi) i (vii) en conjunt es poden generalitzar a la següent propietat:

Propietat (viii): \mathfrak{R} és tancat sota l'aplicació de transformacions afins invertibles en paral·lelograms retallats dins de les imatges i triats de manera per produir imatges rectangulars.

En conclusió, qualsevol imatge del món real dona lloc a la percepció de les imatges del món real que poden derivar d'ella pel tall i l'estirament (o disminució). Això permet la definició d'una relació d'ordre i una estructura de classe d'equivalència sobre \mathfrak{R} .

Definició 6.3. *Siguin \mathcal{I} i \mathcal{H} elements de \mathfrak{R} , llavors podem dir que \mathcal{H} **deriva de \mathcal{I}** si, i només si \mathcal{H} pot ser obtingut a partir de \mathcal{I} pel tall i estirament (o disminució), usant les propietats (iv) i (v). Fem servir la notació $\mathcal{H} < \mathcal{I}$ per dir que \mathcal{H} deriva de \mathcal{I} .*

Definició 6.4. *Sigui $S \subset \mathfrak{R}$ un conjunt d'imatges del món real, definim $\mathcal{W}(S) \subset \mathfrak{R}$ per*

$$\mathcal{W}(S) = \{\mathcal{H} \in \mathfrak{R} : \mathcal{H} < \mathcal{I} \text{ per algun } \mathcal{I} \in S\}$$

*Llavors diem que $\mathcal{W}(S)$ és el **conjunt o el món de les imatges generades per S** usant les propietats (iv) i (v).*

Definició 6.5. *Diem que dues **imatges \mathcal{I} i \mathcal{H}** de \mathfrak{R} són **equivalents sota les propietats (iv) i (v)** si, i només si $\mathcal{I} < \mathcal{H}$ i $\mathcal{H} < \mathcal{I}$. Usem la notació $\mathcal{H} \sim \mathcal{I}$ per dir que dues imatges \mathcal{H} i \mathcal{I} són equivalents.*

Ara veurem que la definició d'equivalència proporciona una relació d'equivalència en l'espai \mathfrak{R} . Cada classe d'equivalència està representada per un element representatiu, l'associada a $\mathcal{I} \in \mathfrak{R}$ l'anotarem com $\mathcal{E}(\mathcal{I})$. Sigui $\mathcal{I}, \mathcal{H} \in \mathfrak{R}$ llavors $\mathcal{I} < \mathcal{H}$ si, i només si $\mathcal{P} < \mathcal{Q}$ per a tots $\mathcal{P} \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$ i $\mathcal{Q} \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Per tant podem dir que $\mathcal{E}(\mathcal{I}) < \mathcal{E}(\mathcal{H})$ si, i només si $\mathcal{I} < \mathcal{H}$.

Aleshores, sigui $\mathcal{J}, \mathcal{H} \in \mathfrak{R}$, $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ el conjunt d'imatges generades per \mathcal{J} i $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ la classe d'equivalència de \mathcal{H} . Llavors $\mathcal{E}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{W}(\mathcal{J})$ és buida o igual a $\mathcal{E}(\mathcal{H})$. Per tant

$$\mathcal{W}(\mathcal{J}) = \bigcup_{\mathcal{H} \in T} \mathcal{E}(\mathcal{H}),$$

per algun conjunt $T \subset \mathfrak{R}$.

Sigui $|A|$ el nombre d'elements del conjunt A . Per $\mathcal{J} \in \mathfrak{R}$, $\|\mathcal{W}(\mathcal{J})\|$ denota el nombre de classes d'equivalència en $\mathcal{W}(\mathcal{J})$, així

$$\|\mathcal{W}(\mathcal{J})\| = \min \left\{ |T| : T \subset \mathfrak{R}; \quad \mathcal{W}(\mathcal{J}) = \bigcup_{\mathcal{H} \in T} \mathcal{E}(\mathcal{H}) \right\};$$

és a dir, $\|\mathcal{W}(\mathcal{J})\|$ és el nombre de classes d'equivalència diferents de $\mathcal{W}(\mathcal{J})$ a partir del qual es dedueix que $\|\mathcal{W}(\mathcal{J})\| \geq 1$ per tot $\mathcal{J} \in \mathfrak{R}$. I si \mathcal{U} és una imatge amb atributs cromàtics uniformes constants, totes les imatges que poden derivar de \mathcal{U} tenen el mateix aspecte que \mathcal{U} i per tant $\|\mathcal{W}(\mathcal{U})\| = 1$.

Sigui $\|\mathcal{W}(\mathcal{J})\| < \infty$ definim $\mathcal{F} \subset \mathfrak{R}$ per

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{J} \in \mathfrak{R} : \|\mathcal{W}(\mathcal{J})\| < \infty\},$$

per exemple, $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$. Llavors, per a qualsevol $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$, podem representar l'estructura de classes d'equivalència de $\mathcal{W}(\mathcal{J})$.

Un cop tenim definides les imatges del món real i les seves propietats, ara són necessaris models matemàtics per a \mathfrak{R} que ens permetin gestionar les imatges a nivell pràctic. Veurem dos exemples concrets:

\mathfrak{R} és modelat per \mathfrak{R}_i , que només utilitza els colors blanc i negre per representar les imatges del món real. Qualsevol element \mathcal{I} de \mathfrak{R}_i està representat pel suport \square juntament amb la funció característica $\chi_A : \square \rightarrow \{0, 1\}$ d'algun subconjunt mesurable de Borel $A \subset \square$. El conjunt A , dibuixa sobre \square produint una imatge negra sobre un fons blanc. "0" significa el color blanc i "1" el negre. La funció $\chi_A(x)$ es defineix com

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{quan } x \in A, \\ 0 & \text{quan } x \notin A. \end{cases}$$

de tal manera que χ_A proporciona els atributs cromàtics de la imatge.

En aquest model, qualsevol imatge del món real està completament especificada pel suport \square amb un subconjunt de Borel $A \subset \square$; i per contra, qualsevol parell

$$\{\square, A \subset \square : A \text{ és un subconjunt de Borel de } \mathbb{R}^2\}$$

defineix un element de \mathfrak{R}_i .

\mathfrak{R} és modelat per \mathfrak{R}_{ii} . Els atributs cromàtics d'una imatge del món real en \mathfrak{R}_{ii} estan representats amb l'ajuda d'un interval I de nombres reals, com $[0, 255] \subset \mathbb{R}$, especificant possibles intensitats en escala de grisos, i una funció $f : \square \rightarrow I$. Com a l'exemple del *Teorema de Collage per Mesures*. La funció $f(x, y)$ proporciona la

intensitat o la brillantor de la imatge en el punt (x, y) en la imatge. Una classe d'integrabilitat i/o continuïtat a la que se suposa que pertany f es pot especificar per afinar el model. La funció f proporciona els atributs cromàtics de la imatge.

En \mathfrak{R}_i , qualsevol imatge està completament especificada pel seu suport \square juntament amb una funció $f : \square \rightarrow I$; i per contra, qualsevol funció $f : \square \rightarrow I$ amb alguna limitació, defineix un element de \mathfrak{R}_i .

Hi ha altres models que tenen en compte característiques diferents, com per exemple atributs cromàtics referents a colors, però no entrarem en aquest estudi.

6.1 Descripció general de la metodologia de la compressió d'imatge fractal

Els mètodes de compressió d'imatge fractal que veurem es basen en aquests tres punts:

1. Un model Y de l'espai \mathfrak{R} d'imatges del món real com els que hem descrit anteriorment.
2. Una mètrica d en l'espai Y , tal que (Y, d) és un espai mètric complet.
3. Un operador contractiu O , que actuarà sobre l'espai (Y, d) . És a dir, tal que existeix un nombre real $0 \leq s < 1$ que compleix

$$d(O(\phi), O(\psi)) \leq s \cdot d(\phi, \psi) \quad \text{per a tot } \phi, \psi \in Y.$$

El fet de tenir aquets tres punts ens assegura:

- **Existència d'atractors.** Com que O és contractiu i l'espai mètric Y és complet, pel *Teorema del punt fix de Banach*, existeix una única imatge $\phi \in Y$ tal que $O(\phi) = \phi$.
- **Caràcter fractal dels atractors.** Com que les funcions a partir de les quals es construeix O són contractives, podem afirmar que ϕ té un caràcter independent de resolució: tota la imatge invariant és el mateix que la suma o la unió de les contraccions que se li apliquen, per tant es fan còpies reduïdes de parts d'ella mateixa.
- **Càlcul d'atractors.** Per calcular ϕ , podem utilitzar el fet que si $\psi \in Y$ llavors el resultat d'aplicar reiteradament O a ψ convergeix a l'atractor, és a dir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O^n(\psi) = \phi.$$

A més, si existeix una constant C tal que $d(\phi_1, \phi_2) < C$ per a tot $\phi_1, \phi_2 \in Y$, llavors tenim un error d'estimació:

$$d(O^n(\psi), \phi) \leq s^n \cdot C.$$

Aquesta última equació ens permet predir el nombre d'iteracions necessàries per aconseguir una precisió donada.

- **Teorema general del Collage estimat.** La distància entre $\psi \in Y$ i l'atractor ϕ d' O està limitada per l'estimació

$$d(\phi, \psi) \leq \frac{d(\psi, O(\psi))}{(1-s)}.$$

El conjunt $O(\psi)$ s'anomena un **collage** i la distància $d(\psi, O(\psi))$ s'anomena un **error de collage**. El teorema ens diu que si volem trobar un operador O el qual el seu atractor és aproximadament ψ , llavors només hem de resoldre el problema d'escollir O tal que l'aplicació d' O a ψ no canvia gaire ψ .

En la teoria de la transformació fractals, els punts 1, 2 i 3 són proporcionats pels conjunts de transformacions locals. Aquests es convinen de diverses formes per produir un operador O i un sistema corresponent per generar atractors fractals independents de la resolució.

Definició 6.6. Sigui (X, d) un espai mètric compacte i R un subconjunt no buit de X . Sigui $w : R \rightarrow X$ i s un nombre real tal que $0 \leq s < 1$. Si

$$d(w(x), w(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \text{per a tot } x, y \text{ de } R.$$

Llavors w s'anomena una **aplicació contractiva local** en (X, d) . El nombre s és un **factor de contracció per** w .

Definició 6.7. Sigui (X, d) un espai mètric compacte, i $w_i : R_i \rightarrow X$ una aplicació contractiva local en (X, d) amb factor de contracció s_i , per $i = 1, 2, \dots, N$, on N és un enter finit positiu. Aleshores

$$\{w_i : R_i \rightarrow X : i = 1, 2, \dots, N\}$$

s'anomena un **sistema iteratiu de funcions local**, IFS local. El nombre $s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ s'anomena **factor de contracció de l'IFS local**.

Els IFS locals, com els IFS estudiats, també es basen en transformacions afins però ara es descriuen d'una peça de la imatge a una altra.

Els IFS locals poden ser usats per a definir operadors de contracció sobre imatges. Tindrem en compte exemples del tipus següent:

Sigui S el conjunt de tots els subconjunts de X , llavors podem definir un operador local $W_{local} : S \rightarrow S$ tal que:

$$W_{local} = \bigcup_{i=1}^N w_i(R_i \cap B), \quad \text{per a tot } B \in S.$$

Amb les limitacions apropiades podem tractar W_{local} com un operador sobre l'espai de Hausdorff $\mathcal{H}(X)$; llavors, W_{local} és contractiu sobre certs subconjunts compactes de $\mathcal{H}(X)$ amb factor de contracció s respecte la mètrica de Hausdorff. Així tenim els ingredients per a un sistema de compressió fractal com el que hem descrit (passos 1, 2 i 3) quan W_{local} és escollit com l'operador O que actua sobre l'espai $Y = (H)(X)$. Diem que un subconjunt no buit A de X és un atractor o conjunt invariant de l'IFS local si

$$W_{local}(A) = A.$$

Si un IFS local té varis atractors, per exemple A i B , llavors també ho és $A \cup B$, fet que ens diu que, si existeix un atractor, llavors hi ha un més gran, és a dir, un que conté tots els altres. Això s'obté prenent la unió de tots els atractors de W_{local} . En general, aquest és l'únic al qual ens referim quan parlem de l'atractor de W_{local} .

Sigui $\{w_i : R_i \rightarrow X : i = 1, 2, \dots, N\}$ un IFS local on suposem que els conjunts R_i són compactes, aleshores definim una successió de conjunts compactes de X , $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ on

$$A_0 = X,$$

$$A_n = \bigcup_{i=1}^N w_i(R_i \cap A_{n-1}) \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Llavors

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

Per tant $\{A_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ és una successió decreixent de conjunts compactes. En particular, existeix un conjunt compacte $A \subset X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

i

$$A = \bigcup_{i=1}^N w_i(R_i \cap A) = W_{local}(A).$$

Llavors, si aquest no és buit, A és un atractor – de fet, l'atractor màxim – per l'IFS local. La possibilitat de que A sigui buida es descarta si es pot trobar un conjunt compacte no buit B de manera que $W_{local}(B) \supset B$.

A partir dels IFS locals veurem el *Teorema del Collage* associat per a poder prosseguir a partir d'aquest a la compressió d'imatges en blanc i negre i amb escala de grisos:

6.1.1 La transformació fractal en blanc i negre

Partirem d'una imatge objectiu en blanc i negre i la representarem per un subconjunt $G \subset \square$. Per tal de crear un model fractal per G , dividirem la imatge original en blocs D_i anomenats blocs de domini per $i = 1, 2, \dots, N$. Llavors, per cada $i = 1, 2, \dots, N$ buscarem una transformació afí local $w_i : R_i \rightarrow \square$ amb factor de contracció s tal que

$$w_i(R_i) = D_i$$



i

$$w_i(R_i \cap G) \approx D_i \cap G$$

on aquesta similitud pot ser donada pel fet que la distància de Hausdorff entre $R_i \cap G$ i $D_i \cap G$ sigui petita, i.e.

$$h(w_i(R_i \cap G), D_i \cap G) < \epsilon \quad \text{per } i = 1, \dots, N.$$

També podríem usar altres mètriques.

A nivell pràctic, la transformació pot ser escollida per ser de la forma

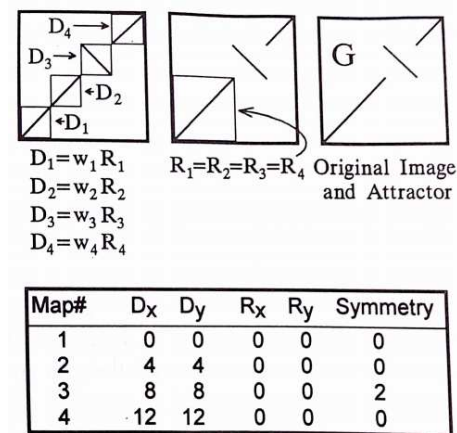
$$w(\cdot) = 0.5A(j) \cdot +t$$

on $A : \square \rightarrow \square$ és una simetria afí, és a dir, R_i és un bloc dues vegades la mida de D_i .

Cada bloc D_i és de la mateixa mida, per $i = 1, 2, \dots, N$. Llavors l'IFS local està completament especificat de manera que per cada i tenim les coordenades (D_x, D_y) de la cantonada inferior esquerra de D_i , les coordenades (R_x, R_y) de la cantonada inferior esquerra de R_i i un enter que indica l'elecció de la simetria afí A de la taula següent (la font de les figures que usarem com exemple en aquest aparat és [2]):

Symmetry	Matrix	Description
0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	identity
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	reflection in y -axis
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	reflection in x -axis
3	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	180° rotation
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	reflection in line $y = x$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	90° rotation
6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	270° rotation
7	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	reflection in line $y = -x$

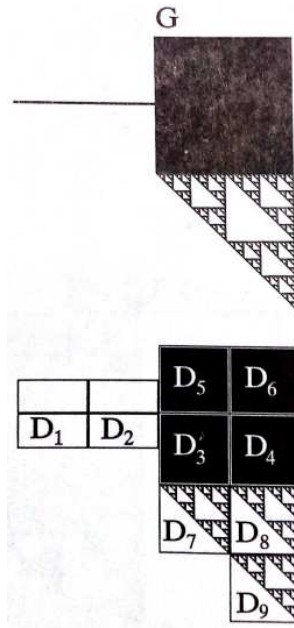
El resultat, que s'anomena un codi IFS local, l'expressarem com podem observar en la figura



que ens mostra la imatge origen G , la forma en què es codifica, el codi IFS local i l'atractor.

Per a dur a terme aquest tipus de compressió fractal es segueixen els següents passos:

- Introduïm una imatge G , és a dir, un subconjunt de $\square \subset \mathbb{R}^2$.
- Combrim G amb blocs de domini D_i , els quals no es superposen, com veiem a continuació:



El conjunt total dels blocs de domini $\{D_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ ha de cobrir tot G . Cada bloc de domini és un quadrat.

- Introduïm un conjunt de blocs de rang $R \subset \square$ tals que $R \cap G \neq \emptyset$. Aquests són quadrats els quals els seus costats són dues vegades més que els dels blocs de domini. Les possibles coordenades (R_x, R_y) de la cantonada inferior esquerra de cada bloc de rang estan restringides a estar a un conjunt finit L . En conseqüència, es defineix una col·lecció τ de transformacions afins contractives locals, que van del bloc de rang R al bloc de domini D_i . És a dir, per $i = 1, 2, \dots, n$,

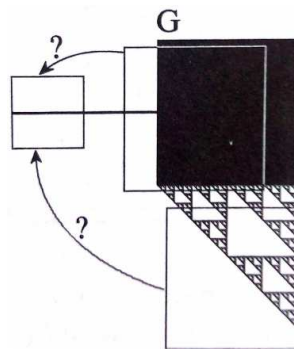
$$\tau_i = \{w(D_i, R_x, R_y, j) : (R_x, R_y) \in L; j = 0, 1, 2, \dots, 7\},$$

on $w(D_i, R_x, R_y, j)$ és la transformació afí contractiva amb domini R , rang D_i de la forma

$$0.5A(j) \cdot +t$$

i $A(j)$ denota la simetria j -èssima de la taula anterior.

Alguns elements de τ_i es poden veure a la imatge següent:

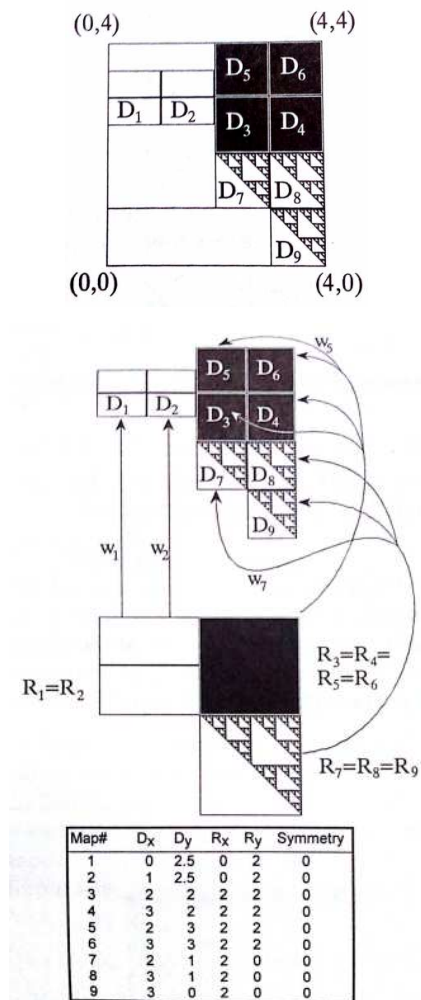


- Duem a terme el procés de transformació fractal, que hem explicat, de la manera següent:

Per cada i , escollim $w_i \in \tau_i$ per minimitzar la distància

$$h(w_i(R \cap G), D_i \cap G).$$

És a dir, per cada bloc de domini triem el bloc de rang i la simetria corresponent, de manera que la part transformada de la imatge en el bloc de rang és similar a la part de la imatge en el bloc de domini. Fet que podem observar a continuació:



El conjunt $W_{local} = \cup w_i(R \cap G)$ s'anomena el collage de la imatge G corresponent a l'IFS local i el número

$$h(w_i(R \cap G), D_i \cap G)$$

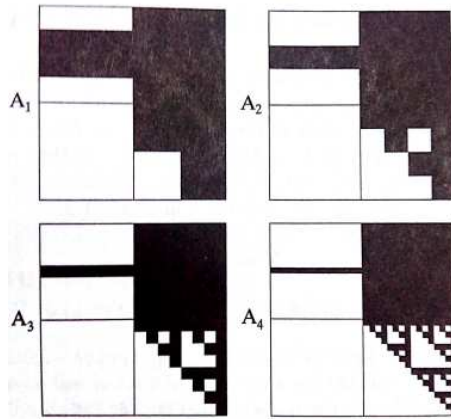
és l'error de collage corresponent.

- Aleshores escrivim les dades comprimides en forma de codi d'IFS local com hem vist anteriorment.
- Apliquem un algorisme de compressió de dades sense pèrdues per al codi IFS local, per obtenir finalment un codi d'IFS local de compressió.

Per a descomprimir la imatge comprimida usarem les dades comprimides per reconstruir l'IFS local i l'operador W_{local} i així calcular les aproximacions de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(D)$$

com veiem a la següent figura



Com que les transformacions afins locals poden transformar geomètricament parts de la imatge però no transformen els nivell de grisos, podem afegir un nova dimensió dins de la transformació afí que ens digui la intensitat de grisos:

6.1.2 La transformació fractal en escala de grisos

Ara farem el pas d'una estructura d'IFS local a la compressió fractal d'imatges en escala de grisos. Utilitzem el model per a l'espai d'imatges del món R que consisteix en l'espai Y de totes les funcions reals $\phi : \square \rightarrow I$ on $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ és un interval real que representa els possibles valors d'intensitat de grisos en imatges. Aquest és un model del tipus \mathfrak{R}_{ii} descrit anteriorment.

Convertim Y en un espai mètric complet definint la distància entre dues funcions $\phi_1, \phi_2 \in Y$ com

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup\{|\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)| : (x, y) \in \square\}.$$

Aquesta distància ens permet establir un teorema de convergència general.

Sigui \mathcal{D} una partició de \square que consisteix en una col·lecció finita de conjunts $D_i \subset \square$ per $i = 1, 2, \dots, M$, tal que

$$\square = \bigcup_{i=1}^M D_i,$$

on $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$. Per cada i , sigui $f_i : D_i \rightarrow \square$ amb $f_i(D_i) = R_i$, i sigui $v_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una transformació contractiva amb factor de contracció s amb $0 \leq s < 1$. És a dir,

$$|v_i(z_1) - v_i(z_2)| < s \cdot |z_1 - z_2| \quad \text{per a tot } z_1, z_2 \in \mathbb{R} \text{ per } i = 1, 2, \dots, M.$$

Llavors definim $F : Y \rightarrow Y$ per

$$(F\psi)(x, y) = v_i(\psi(f_i(x, y))) \quad \text{per } (x, y) \in D_i.$$

Diem que s és el factor de contracció de F . Anomenem F l'operador de transformació fractal.

Teorema 6.1 (Convergència de transformació fractal). *Siguin (Y, d) l'espai mètric complet i $F : Y \rightarrow Y$ l'operador definit anteriorment. Aleshores F és una aplicació contractiva en Y , és a dir, per a tot $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty(\square)$,*

$$d(F(\phi_1), F(\phi_2)) \leq s \cdot d(\phi_1, \phi_2),$$

on s és el factor de contracció de F .

Tenim els punts 1, 2 i 3 per un sistema de compressió d'imatge fractal essent F l'operador O . En particular, existeix una única funció $\phi \in Y$ tal que $F(\phi) = \phi$. La funció ϕ s'anomena l'atractor de la transformació fractal. Per calcular ϕ , podem usar el fet que si $\psi \in Y$ llavors el resultat d'aplicar reiteradament F a ψ convergeix uniformement a l'atractor ϕ , és a dir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi) = \phi;$$

i tenim l'estimació de l'error

$$|F^n(\psi)(x, y) - \phi(x, y)| \leq s^n |b - a| \quad \text{per a tot } (x, y) \in \square, \text{ on } I = [a, b].$$

La distància entre $\psi \in Y$ i l'atractor de l'operador de transformació fractal F està acotada per l'estimació

$$d(\phi, \psi) \leq \frac{d(\psi, F(\psi))}{(1 - s)}.$$

El qual és un Teorema del Collage per l'operador de transformació fractal F .

L'operador de transformació fractal F és essencialment l'operador W_{local} per a un IFS local que actua en tres dimensions. Per demostrar-ho, assumim que les funcions $f_i(x, y)$ són invertibles en els seus dominis. Llavors l'estructura local anterior es refereix als IFS local

$$\{w_i : R_i \rightarrow X : i = 1, 2, \dots, N\},$$

on $X = \square \times [a, b]$, $R_i = R_i \times [a, b]$, i $w_i : R_i \rightarrow X$ està definida per

$$w_i(x, y, z) = (w_i(x, y), v_i(z)) \quad \text{per a tot } (x, y, z) \in R_i,$$

amb $w_i(x, y) = f_i^{-1}(x, y)$, per $i = 1, 2, \dots, N$. Associem la mètrica Euclidiana d amb X tal que (X, d) és un espai mètric compacte. Si cadascuna de les funcions w_i és contractiva amb factor de contracció s , llavors l'IFS local també és contractiu amb el mateix factor de contracció. Sigui $Y = \mathcal{H}(X)$ i definim $W_{local} : Y \rightarrow Y$ per

$$W_{local}(B) = \bigcup w_i(R_i \cup B) \quad \text{per } B \in Y.$$

I com que les aplicacions W_{local} dels conjunts els qual la seva projecció en el pla xy es compon de tots els \square , en si mateix, i en particular

$$W_{local} = (\{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in \square\}) = \{(x, y, F(\psi)(x, y)) : (x, y) \in \square\}.$$

Aleshores, W_{local} són les aplicacions de la gràfica de $\psi \in Y$ a la gràfica de $F(\psi)$. Això significa que el punt fix ϕ de F anterior és un atractor de W_{local} ,

$$W_{local}(A) = A$$

on

$$A = \{(x, y, \phi(x, y)) : (x, y) \in \square\}.$$

7 Computació: programes

Per observar resultats d'aquest treball veurem dos programes que ja hem mencionat els quals ens mostren que efectivament podem crear fractals a partir d'IFS usant els algorismes explicats.

Per a poder llegir els programes hem de posar:

```
./programa.c fractal.ifs fractal.atr NMAX
```

Sigui $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N\}$ l'IFS hiperbòlic amb probabilitats que volem estudiar, els elements que usem per llegir el programa són els següents:

- programa.c: Fa referència al programa que volem usar: *aleatori.c*, si volem dur a terme l'algorisme iteratiu aleatòri o *deterministic.c*, si volem usar l'algorisme determinístic.

- fractal.ifs: és l'INPUT que portarà escrit el número de transformacions: N , les diferents transformacions w_1, w_2, \dots, w_N i les probabilitats p_1, p_2, \dots, p_N escrites de la següent manera:

Siguin

$$w_i(x) = w_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = Ax + t, \quad i = 1, \dots, N$$

les transformacions de l'IFS aplicades a un punt (x_1, x_2) , llavors:

N					
a ₁	b ₁	c ₁	d ₁	e ₁	f ₁
a ₂	b ₂	c ₂	d ₂	e ₂	f ₂
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a _N	b _N	c _N	d _N	e _N	f _N
p ₁					
p ₁					
⋮					
p _N					

Si el nostre IFS és sense probabilitats, posem $p_i = 0$ per $i = 1, \dots, N$ i s'aproximaran de la següent manera:

$$p_i = \frac{| \det A_i |}{\sum_{i=1}^N | \det A_i |} = \frac{| a_i d_i - b_i c_i |}{\sum_{i=1}^N | a_i d_i - b_i c_i |} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N.$$

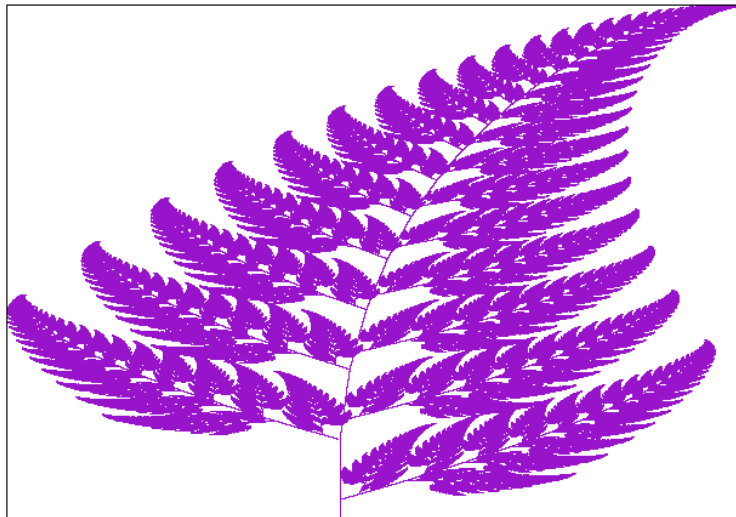
- fractal.atr: és l'OUTPUT del programa *aleatori.c*, és a dir, les coordenades dels punts de l'atractor de l'IFS el qual podem representar usant *gnuplot*. En el cas del programa *deterministic.c* tindrem varis documents d'aquest estil amb nom *fractal.atrXX* on *XX* ens mostra quantes vegades s'han dut a terme les transformacions en aquell pas.
- *NMAX* ens indicarà el número d'iteracions que es duen a terme en el procés aleatori, per parar les iteracions del deterministic anem comparant l'atractor obtingut amb l'anterior i aturem el passos quan aquests coincideixen.

Anem a veure un exemple de cada programa:

Exemple 7. Amb el programa *aleatori.c*, 9999999 iteracions i l'INPUT següent:

```
Terminal -- vim -- 55x15
4
0 0 0 0.16 0 0
0.85 0.04 -0.04 0.85 0 1.6
0.2 -0.26 0.23 0.22 0 1.6
-0.15 0.28 0.26 0.24 0 0.44
0.01
0.85
0.07
0.07
~
~
~
~
~
~
-- INSERT --
```

hem obtingut l'atractor:



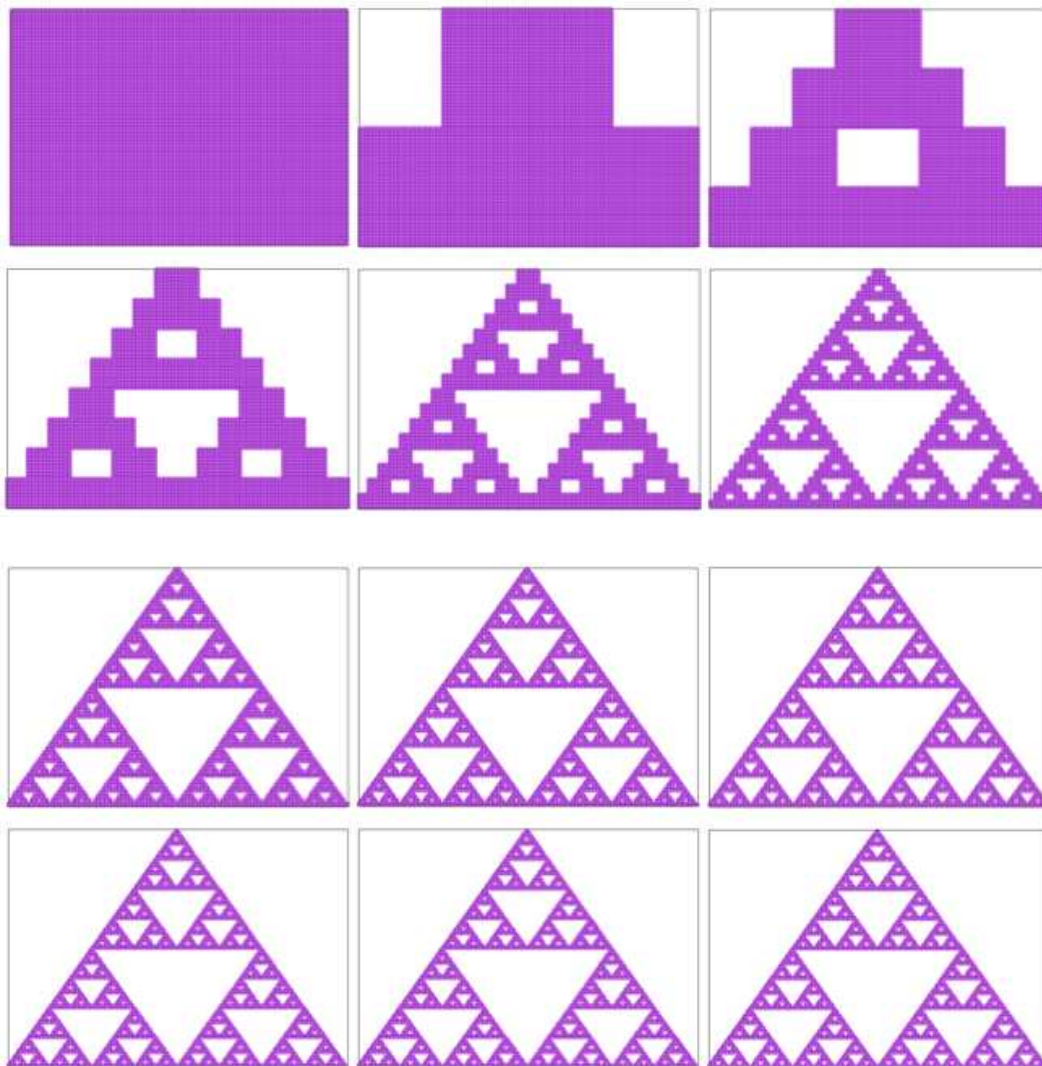
Exemple 8. Amb el programa *deterministic.c*, 9999999 iteracions i l'INPUT següent:

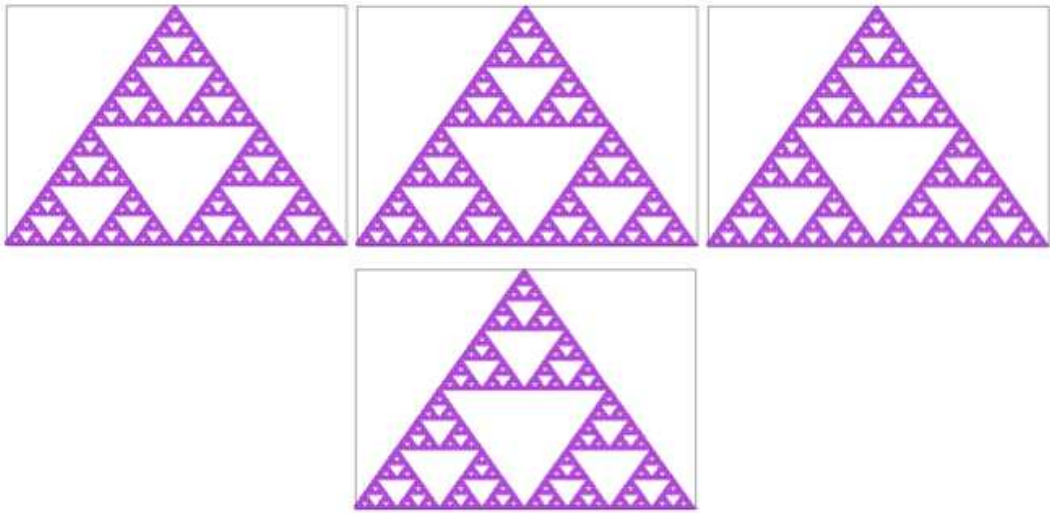
```

Terminal — vim — 39x14
3
0.5 0 0 0.5 0 0
0.5 0 0 0.5 0.5 0
0.5 0 0 0.5 0.25 0.43
0
0
0
0
~
~
~
~
~
-- INSERT --

```

hem obtingut 16 passos diferents que observarem a continuació:





A l'annex estàn descrits diferents exemples d'IFS per poder usar el programa.

8 Conclusions

L'objectiu proposat a l'inici del treball era estudiar el mètode de compressió fractal d'imatges després de recorre les bases dels fractals.

Quan em vaig endinsar en el món dels fractals, vaig anar veient la seva complexitat per a definir-los i entendre les seves propietats. Fins a tal punt que per a poder fer un estudi exhaustiu dels fractals 50 pàgines es quedarien curtes puix que entrar en la dimensió fractal, per exemple, ja era un tot un món.

Així que després de fer una primer estudi de les bases dels fractals i la compressió fractal d'imatges, em vaig adonar calia acotar el tema i que una part important del meu treball s'havia de centrar en el Teorema del Collage, a partir del qual podria relacionar els dos temes. És per això que, pel Teorema del Collage i pel Teorema del Collage per mesures, vaig elaborar un programa en el qual s'observava una aplicació de cadascun d'ells.

Treballant la segona part del projecte he aconseguit veure una de les moltes aplicacions dels fractals, fet que m'ha estimulat a investigar-ne d'altres.

Fent l'estudi de la compressió fractal d'imatge he observat que aquesta té molts avantatges com per exemple que quan apliquem zoom en una imatge obtinguda amb aquest procés, aquesta no està pixelada ja que al ser independent de la resolució no produeix l'aparició de blocs ampliat (píxels) o que estalvia molt espai d'emmagatzematge. Però té un desavantatge important que és que, tot i que la descompressió de la imatge sigui ràpida, el procés de compressió és molt lent a causa de la complexitat computacional per dur-la a terme com s'explica en el treball.

De ben segur que el seu estudi i desenvolupament pot obrir noves perspectives en el món de la compressió i modificació de les imatges.

Referències

- [1] Barnsley, M. F.: *Fractals everywhere*, Academic Press INC., London, 1988.
- [2] Barnsley, M. F.; Lyman, P. H.: *Fractal image compression*, Editorial, Sales, and Customer Service Offices, Wellesley, 1993.
- [3] Pesin, Y.; Climenhaga, V.: *Lectures on fractal geometry and dynamical systems*, American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [4] Alligood, K. T.; Sauer, T. D.; Yorke, J. A.: *Chaos : an introduction to dynamical systems*, Springer, cop., New York, 1996.
- [5] Haro, A.: Fractalitat, determinisme i caos en el conjunt de Cantor. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, pàg 161-175, 2012.
- [6] Riddley, L.: Construction Kit Gallery [Data de consulta: Maig-Juny 2015]
<http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifskit/gallery/gallery.htm>.
- [7] Kowalk W.: Fractal image compression [Data de consulta: Maig-Juny 2015]
<http://einstein.informatik.uni-oldenburg.de/rechnernetze/fraktal.htm>.

9 Annexos

Primer veiem els dos programes:

Algorisme aleatori iteratiu: "aleatori.c":

```
# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>
# include <time.h> # define NMAX 100
void atractor (FILE *fsortida, int N, double w[NMAX][2][3], double p[NMAX],
int niter)
{
    double x[2], wx[2], pa, r;
    int transient = 100, i, j;
    x[0] = x[1] = 0;
    for (i = 0; i < transient; i++) {
        r = ((double) rand()) / RAND_MAX;
        pa = 0;
        for (j = 0; j < N; j++) {
            pa+ = p[j];
            if (r <= pa) break;
        }
        if (j == N) j = N - 1;
        // We have to iterate the application j
        wx[0] = w[j][0][0] * x[0] + w[j][0][1] * x[1] + w[j][0][2];
        wx[1] = w[j][1][0] * x[0] + w[j][1][1] * x[1] + w[j][1][2];
        x[0] = wx[0];
        x[1] = wx[1];
    }
    fprintf(fsortida, "%lf\t%lf\n", x[0], x[1]);
    // When we know that the starting point is in the fractal, begin the process of
    iteration to represent fractal.
    for (i = 0; i < niter; i++) {
        r = ((double) rand()) / RAND_MAX;
        pa = 0;
        for (j = 0; j < N; j++) {
            pa+ = p[j];
```

```

        if ( $r \leq pa$ ) break;
    }
    if ( $j == N$ )  $j = N - 1$ ;
// We have to iterate the application j
     $wx[0] = w[j][0][0] * x[0] + w[j][0][1] * x[1] + w[j][0][2]$ ;
     $wx[1] = w[j][1][0] * x[0] + w[j][1][1] * x[1] + w[j][1][2]$ ;
     $x[0] = wx[0]$ ;
     $x[1] = wx[1]$ ;
    fprintf(fsortida, "%lf\t%lf\t\n",  $x[0]$ ,  $x[1]$ );
}
}
int main (int argc, char *argv[])
    FILE *fentrada, *fsortida;
    double  $w[NMAX][2][3]$ ,  $p[NMAX]$ ;
    int  $N = 1$ ,  $i$ ,  $niter$ ;
    if (argc != 4)
        printf(" USAGE: %s file.ifs file.atr niter\n", argv[0]);
        return 0;
    }
    if (!(fentrada= fopen(argv[1], "rt")))
        printf(" Input file %s does not exist!\n", argv[1]);
        return 0;
    }
    if (!(fsortida= fopen(argv[2], "wt"))) {
        printf("We can not open output file %s!?!?!?\n", argv[2]);
        return 0;
    }
     $niter = atoi(argv[3])$ ;
    fscanf(fentrada, "%i", & $N$ );
    if ( $N > NMAX$ ) {
        printf("Too motivated ... N should do not be greater than %i\n",  $NMAX$ );
    }
    for ( $i = 0$ ;  $i < N$ ;  $i++$ ) {
        double aux;

```

```

    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][0] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][1] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][0] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][1] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][2] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][2] = aux;
}
for (i = 0; i < N; i++) {
    double aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux) != 1) {printf("Error in data file!\n"); re-
turn 0;}
    p[i] = aux;
}
for (i = 0; i < N; i++) {
    printf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf\n", w[i][0][0], w[i][0][1], w[i][1][0], w[i][1][1],
    w[i][0][2], w[i][1][2], p[i]);
}
srand(time(NULL));
attractor (fsortida, N, w, p, niter);
fclose(fsortida);
return 1;
}

```

Algorisme deterministic iteratiu: "deterministic.c":

```
# include <stdio.h>
```

```

# include <stdlib.h>
# include <time.h>
# include <math.h>
# define NMAX 100
# define IMAX 256
# define JMAX 256
void atractor (FILE *fsortida, int N, double w[NMAX][2][3],double p[NMAX],
int niter)
{
    double x[2], wx[2], pa, r, P[NMAX], sum = 0;
    int transient = 100, i, j, m = 0;
    for (j = 0; j < N; j++) {
        sum = sum+fabs(w[j][0][0] * w[j][1][1] - w[j][0][1] * w[j][1][0]);
    }
    for (i = 0; i < N; i++) {
        P[i]= fabs(w[i][0][0] * w[i][1][1] - w[i][0][1] * w[i][1][0])/sum;
    }
    for (i = 0; i < N; i++) {
        if(P[i] == 0) m = 1;
    }
    if(m== 0)
        for (i = 0; i < N; i++) {
            p[i] = P[i];
        }
    }
    x[0] = x[1] = 0;
    for (i = 0; i < transient; i++) {
        r = ((double) rand())/RAND_MAX;
        pa = 0;
        for (j = 0; j < N; j++) {
            pa+ = p[j];
            if (r <= pa) break;
        }
        if (j == N) j = N - 1;
    }
    // We have to iterate the application j

```

```

    wx[0] = w[j][0][0] * x[0] + w[j][0][1] * x[1] + w[j][0][2];
    wx[1] = w[j][1][0] * x[0] + w[j][1][1] * x[1] + w[j][1][2];
    x[0] = wx[0];
    x[1] = wx[1];
}
fprintf(fsortida, "%lf\t %lf\n", x[0], x[1]);
// When we know that the starting point is in the fractal, begin the process of
iteration to represent fractal.
for (i = 0; i < niter; i++) {
    r = ((double) rand())/RAND_MAX;
    pa = 0;
    for (j = 0; j < N; j++) {
        pa += p[j];
        if (r <= pa) break;
    }
    if (j == N) j = N - 1;
// We have to iterate the application j
    wx[0] = w[j][0][0] * x[0] + w[j][0][1] * x[1] + w[j][0][2];
    wx[1] = w[j][1][0] * x[0] + w[j][1][1] * x[1] + w[j][1][2];
    x[0] = wx[0];
    x[1] = wx[1];
    fprintf(fsortida, "%lf \t%lf\n", x[0], x[1]);
}
}
int main (int argc, char *argv[]){
    FILE *fentrada, *fsortida;
    double w[NMAX][2][3], p[NMAX];
    int N = 1, i, j, k, niter, n;
    char fname[100], ok;
    double x[2], wx[2], a, b, c, d;
    double M0[IMAX + 1][JMAX + 1], M1[IMAX + 1][JMAX + 1];
    if (argc != 4) {
        printf(" USAGE: %s file.ifs file.atr niter \n", argv[0]);
        return 0;
    }
}

```

```

if (!(fentrada= fopen(argv[1], "rt"))) {
    printf(" Input file %s does not exist! \n", argv[1]);
    return 0;
}
if (!(fsortida= fopen(argv[2], "wt"))) {
    printf(" We can not open output file %s!?!?!?\n", argv[2]);
    return 0;
}
niter = atoi(argv[3]);
fscanf(fentrada, "%i", &N);
if (N > NMAX) {
    printf(" Too motivated ... N should do not be greater than %i\n", NMAX);
}
for (i = 0; i < N; i++) {
    double aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][0] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][1] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][0] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][1] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][0][2] = aux;
    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf(" Error in data file!\n"); return
0;}
    w[i][1][2] = aux;
}
for (i = 0; i < N; i++) {
    double aux;

```



```

    if (fscanf(fentrada, "%lf", &aux)!= 1) {printf("Error in data file!\n"); return
0;}
    p[i] = aux;
}
srand(time(NULL));
attractor (fsortida, N, w, p, niter);
for (i = 0; i < N; i++) {
    printf("%lf%lf%lf%lf%lf%lf\n", w[i][0][0], w[i][0][1], w[i][1][0], w[i][1][1],
    w[i][0][2], w[i][1][2], p[i]);
}
fclose(fsortida);
if (!(fsortida= fopen(argv[2], "rt"))) {
    printf("We can not open file %s!?!?!?\n", argv[2]);
    return 0;
}
fscanf(fsortida, "%lf", x);
fscanf(fsortida, "%lf", x + 1);
a = b = x[0];
c = d = x[1];
// We seek the support dimensions
for (i = 0; i < niter - 1; i++){
    fscanf(fsortida, "%lf", x);
    fscanf(fsortida, "%lf", x + 1);
    if (x[0] > b) b = x[0];
    else if (x[0] < a) a = x[0];
    if (x[1] > d) d = x[1];
    else if (x[1] < c) c = x[1];
}
fclose(fsortida);
printf(" Image [%lf, %lf] x [%lf, %lf]\n", a, b, c, d);
fflush(stdout);
// The first plot is a black square
for (i = 0; i <= IMAX; i++) {
    for(j = 0; j <= JMAX; j++){
        M1[i][j] = 1;

```

```

    }
}
n = 0;
do{
// Copy the image to the old one. The new one is white.
    for (i = 0; i <= IMAX; i++) {
        for(j = 0; j <= JMAX; j++){
            M0[i][j] = M1[i][j];
            M1[i][j] = 0;
        }
    }
    sprintf(fname, "%s%02i", argv[2], n);
    if (!(fsortida= fopen(fname, "wt"))) {
        printf("We can not open output file %s!?!?!?\n", fname);
        return 0;
    }
    printf("Step %02i, generating file %s\n", n, fname);
// Generating the new approximation
    for (i = 0; i <= IMAX; i++) {
        for(j = 0; j <= JMAX; j++) {
            if (M0[i][j] == 1){
                x[0] = (i * (b - a))/IMAX + a;
                x[1] = (j * (d - c))/JMAX + c;
                fprintf(fsortida, "%lf%lf\n", x[0], x[1]);
                for(k = 0; k < N; k++){
                    int iw, jw;
                    wx[0] = w[k][0][0] * x[0] + w[k][0][1] * x[1] + w[k][0][2];
                    wx[1] = w[k][1][0] * x[0] + w[k][1][1] * x[1] + w[k][1][2];
                    iw = ((wx[0] - a)/(b - a)) * IMAX;
                    if (iw < 0) iw = 0;
                    else if (iw > IMAX) iw = IMAX;
                    jw = ((wx[1] - c)/(d - c))*JMAX;
                    if (jw < 0) jw = 0;
                    else if (jw > IMAX) jw = JMAX;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        M1[iw][jw] = 1;
    }
}
}
}
fclose(fsortida);
ok = 1;
for (i = 0; i <= IMAX & ok; i++) {
    for (j = 0; j <= JMAX & ok; j++) {
        if (M0[i][j] != M1[i][j]) ok = 0;
    }
}
n++;
}
while(!ok);
return 1; }

```

Veiem alguns IFS que podriem implementar al programa escrivint els INPUTS com està indicat al treball.

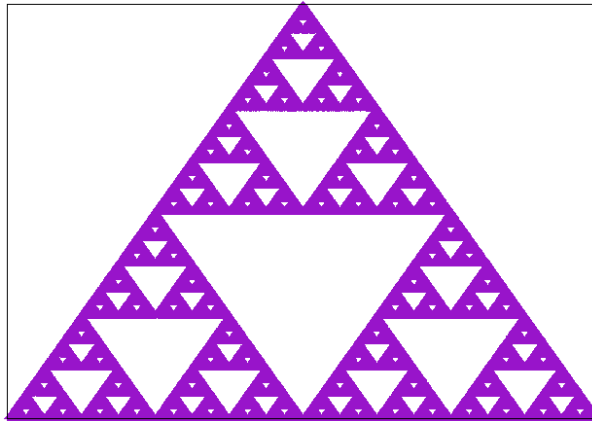
Tots els IFS són amb probabilitats però si usme el programa *deterministic.c* les recalculerà de la manera explicada. Aquests codis IFS han estat obtinguts de la font [6].

Hem inputat cada IFS en els dos programes amb 240000 iteracions i els resultats són els següents:

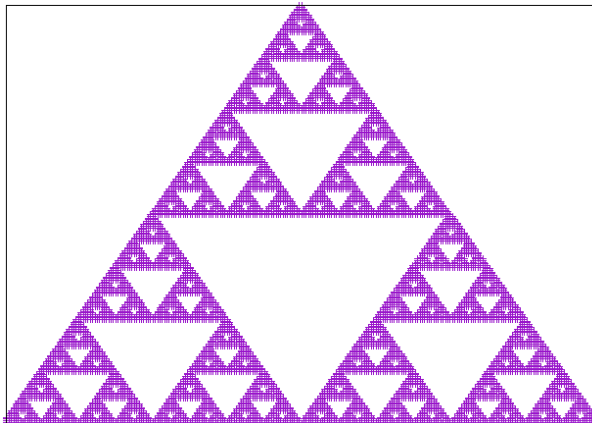
Exemple 9. Codi de l'IFS per un triangle de Sierpinski:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.500000	0.000000	0.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.330000
2	0.500000	0.000000	0.000000	0.500000	0.500000	0.000000	0.330000
3	0.500000	0.000000	0.000000	0.500000	0.250000	0.430000	0.340000

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



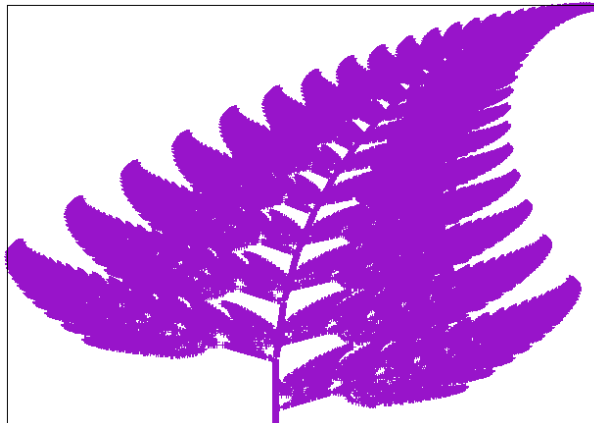
i amb el deterministic és:



Exemple 10. Codi de l'IFS per una Falguera de Barnsley:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.160000	0.000000	0.000000	0.010000
2	0.850000	0.040000	-0.040000	0.850000	0.000000	1.600000	0.850000
3	0.200000	-0.260000	0.230000	0.220000	0.000000	1.600000	0.070000
4	-0.150000	0.280000	0.260000	0.240000	0.000000	0.440000	0.070000

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



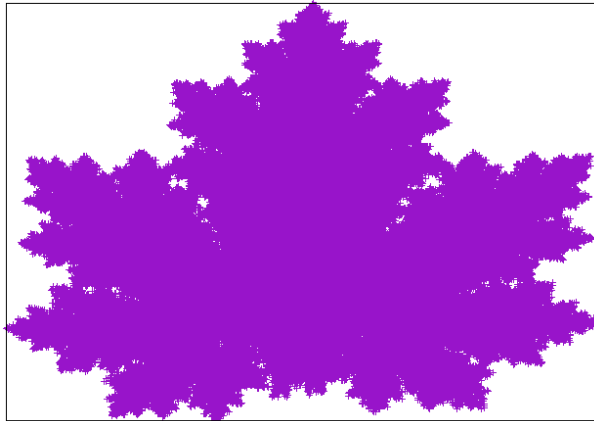
i amb el determinístic (no s'han usat les aproximacions ja que no es podien calcular) és:



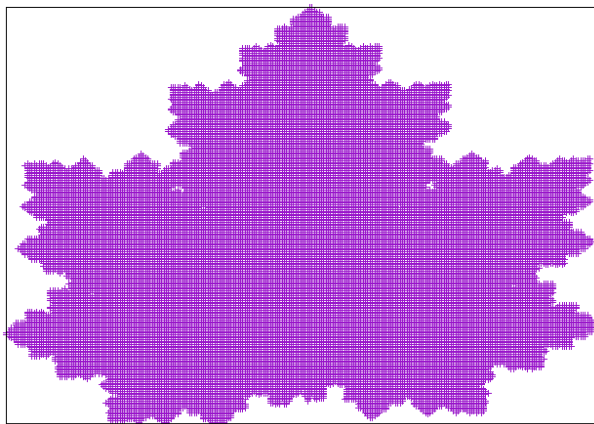
Exemple 11. Codi de l'IFSper una fulla d'auró:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.140000	0.010000	0.000000	0.510000	-0.080000	-1.310000	0.058907
2	0.430000	0.520000	-0.450000	0.500000	1.490000	-0.750000	0.370431
3	0.450000	-0.490000	0.470000	0.470000	-1.620000	-0.740000	0.364491
4	0.490000	0.000000	0.000000	0.510000	0.020000	1.620000	0.206171

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



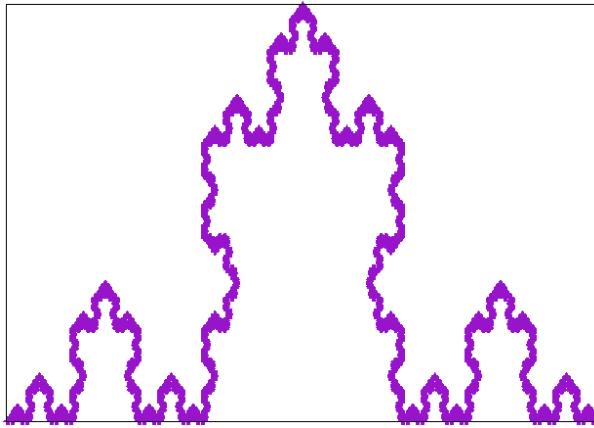
i amb el determinístic és:



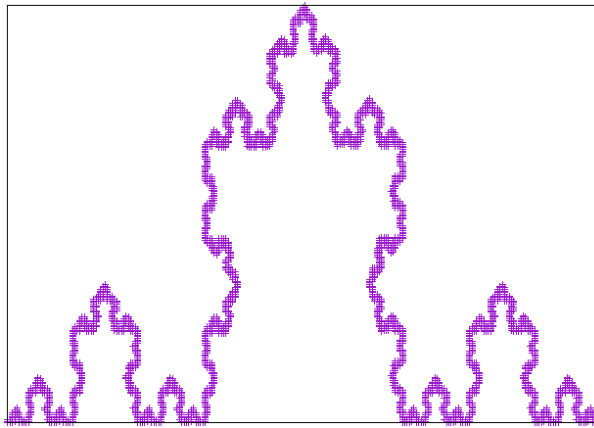
Exemple 12. Codi de l'IFS per una Corba de Koch:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.333000	0.000000	0.000000	0.333000	0.000000	0.000000	0.249414
2	0.167000	-0.289000	0.289000	0.167000	0.333000	0.000000	0.250586
3	0.167000	0.289000	-0.289000	0.167000	0.500000	0.289000	0.250586
4	0.333000	0.000000	0.000000	0.333000	0.667000	0.000000	0.249414

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



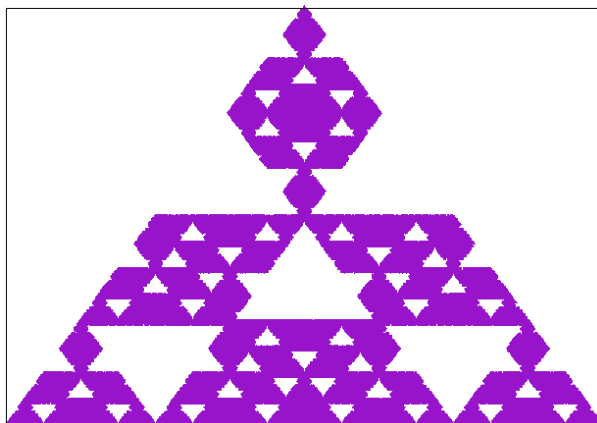
i amb el determinístic és:



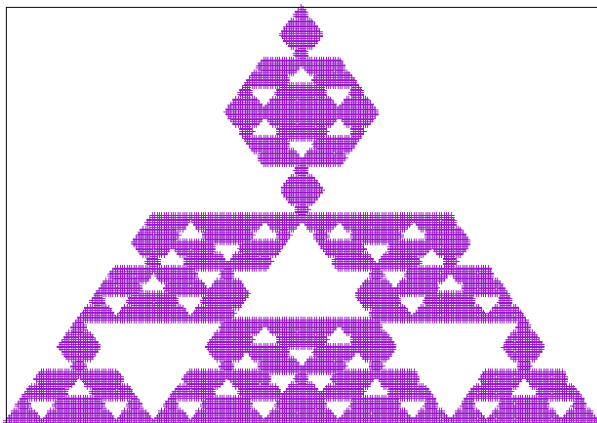
Exemple 13. Codi de l'IFS per un triangle fractal de 4 files:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.000000	0.000000	0.090909
2	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.250000	0.000000	0.090909
3	-0.250000	0.000000	0.000000	-0.250000	0.625000	0.216506	0.090909
4	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.500000	0.000000	0.090909
5	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.750000	0.000000	0.090909
6	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.125000	0.216506	0.090909
7	-0.250000	0.000000	0.000000	-0.250000	0.500000	0.433013	0.090909
8	-0.250000	0.000000	0.000000	-0.250000	0.750000	0.433013	0.090909
9	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.625000	0.216506	0.090909
10	-0.250000	0.000000	0.000000	-0.250000	0.625000	0.649519	0.090909
11	0.250000	0.000000	0.000000	0.250000	0.375000	0.649519	0.090909

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



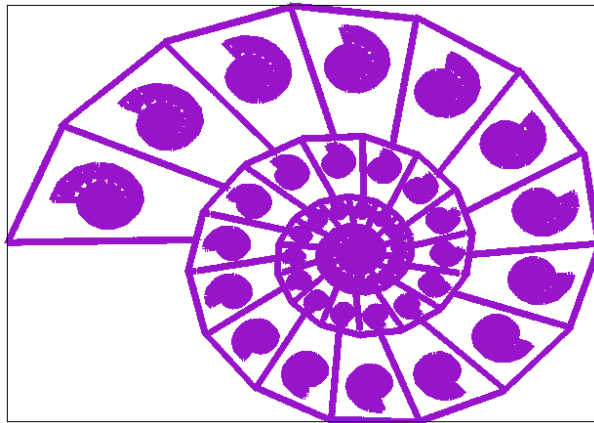
i amb el deterministic és:



Exemple 14. Codi de l'IFS per una closca Nautilus:

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.860671	0.401487	-0.402177	0.860992	0.108537	0.075138	0.930000
2	0.094957	-0.000995	0.237023	0.002036	-0.746911	0.047343	0.020000
3	0.150288	0.000000	0.000000	0.146854	-0.563199	0.032007	0.030000
4	0.324279	-0.002163	0.005846	0.001348	-0.557936	-0.139735	0.020000

El resultat amb l'algorisme aleatòri és:



i amb el determinístic és:

