Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

LES EQUACIONS DE NAVIER-STOKES: Existència de solucions febles

Autor: Víctor Manuel Campello Román

Director: **Dr. Joan Carles Tatjer**
Realitzat a: **Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi**

Barcelona, 30 de juny de 2015

Abstract

In this review, we introduce the first step in order to study the Navier-Stokes' system. We focus our attention in the steady, three dimensional case.

First of all, we begin by introducing the equations system with the motivation of the physical problem of a viscous fluid. In a first approach, we consider only transversal to the surface of a fluid region forces, in order to introduce later another non-transversal term.

Then, we define the smooth functions spaces, Lebesgue spaces and we introduce the theory of distributions. In this section, some important inequalities are presented, such as Hölder's inequality. Also, Sobolev spaces are defined. Finally, the Hahn-Banach Theorem and Riesz Theorem are proven.

In the last section, we study the Navier-Stokes' system from a distribution point of view and the concept of a weak solution is defined. After that, some results in the non-linear term are presented and we give a way to construct the pressure associated to a given weak solution. Finally, two results concerning existence of weak solutions are proven, one in bounded domains and the other one in non bounded ones. Also, we obtain the suficient conditions in the external force: $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)^3$ and $\boldsymbol{f} \in L^{6/5}(\Omega)^3$, respectively.

Resum

En aquesta memòria, fem una introducció a l'estudi de les equacions de Navier-Stokes, considerant el cas estacionari i tridimensional.

Primer obtenim del problema físic, com a motivació, les equacions a partir de la conservació de la massa, el moment i l'energia per a un fluid viscós. Ho fem primer pel cas de forces transversals a la regió considerada i generalitzem, posteriorment, a forces en qualsevol direcció.

A continuació, introduïm els espais de funcions regulars, funcions integrables i definim el concepte de distribució. Veiem també algunes desigualtats molt útils, com la de Hölder, i definim els espais de Sobolev. Finalment, demostrem els Teoremes de Hahn-Banach i de Riesz.

Per últim, tractem el sistema estacionari de Navier-Stokes des d'un punt de vista distribucional i definim el concepte de solució feble, donem alguns resultats per tractar el terme no linial i per construir una pressió associada a la solució, i provem l'existència de solucions febles en dominis acotats i no acotats per a forces externes $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)^3$ i $\boldsymbol{f} \in L^{6/5}(\Omega)^3$, com a condicions suficients, respectivament.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor el temps que m'ha dedicat per resoldre dubtes i la seva paciència. Agraeixo també als meus pares i al meu germà els seus ànims.

Índex

1 Introducció

El projecte

Les equacions de Navier-Stokes descriuen el moviment d'un fluid viscós, com pot ser l'aigua, l'oli o l'aire, i el seu nom és degut a *Claud-Louis Navier* i *George Gabriel Stokes*. Tenen gran importància avui en dia per les seves aplicacions, com ara el disseny d'avions i cotxes, la meteorologia, l'estudi del flux de la sang o la física dels plasmes, entre d'altres.

Matemàticament també tenen un especial interés, donat que en tres dimensions no existeix cap resultat que provi la existència o no existència de solucions regulars. Això és degut a que les equacions contenen un terme no lineal i requereixen d'un anàlisi funcional avançat per estudiar-les. És un dels problemes del mil·leni en la seva forma més general.

Aquests fets, juntament amb el fet de ser estudiant del grau simultani en Matemàtiques i Física i haver cursat l'optativa d'Equacions amb derivades parcial, fonamenten la meva motivació per estudiar un cas més complex en l'àmbit de les EDP's.

En el present treball, només estudiem el cas estacionari en dimensió 3, per simplificar el problema, i com a primera aproximació. Introduïm part de les eines necessàries per a l'anàlisi funcional d'aquestes equacions en derivades parcials i provem dos resultats d'existència de solucions febles, sota certes condicions d'integrabilitat en la força externa. La continuació natural és demostrar resultats de regularitat i unicitat per a les solucions febles, fins al punt de veure que si el domini Ω i la força externa són suficientment regulars, les solucions són C^∞ locament.

Pel que fa a la notació, fem servir la negreta per destacar quan treballem amb funcions vectorials. A més a més, alguns resultats necessaris no els demostrem, encara que donem referències on poder trobar la prova.

Estructura de la Memòria

La memòria està dividida en tres blocs principals: una deducció física de les equacions de Navier-Stokes, una segona part d'anàlisi funcional i una tercera, la més extensa, amb l'objectiu de presentar dos resultats d'existència de solucions febles.

2 Deducció física de les equacions de Navier-Stokes

La nostra motivació és descriure el moviment d'un fluid contingut en una certa regió D de l'espai. El primer pas és establir unes equacions de conservació per al fluid, que vindran d'aplicar tres principis físics de conservació de:

(i) massa;

(ii) moment (**Segona llei de Newton**);

(iii) energia.

Comencem considerant una partícula amb posició determinada per $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$, que es mou amb el temps, t. Anomenem $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la velocitat d'aquesta partícula. Suposem que per a cada instant de temps t, el fluid té una densitat de massa ben definida $\rho(\mathbf{x}, t)$. Aleshores, per a cada subregió W de D, la massa del fluid en W en un temps t es pot escriure com

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t)\, dV,$$

on dV és el diferencial de volum a l'espai.

Observem que per fer aquest càlcul i els que venen a continuació hem d'imposar unes certes condicions de regularitat en les funcions $\mathbf{u}$ i ρ.[1] Per això, suposem d'entrada que aquestes funcions són suficientment regulars per fer els càlculs. De fet, en aquesta secció, el nostre objectiu és obtenir les equacions de Navier-Stokes del problema físic. Més endavant tractarem aquestes equacions amb més rigorositat matemàtica.

Passem a tractar els tres principis de conservació.

(i) Conservació de massa

Sigui W una regió fixa de D. La variació de massa en W s'expressa com

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t)\, dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\, dV.$$

Sigui ∂W la frontera de W, que suposem regular, i sigui $\mathbf{n}$ el vector normal unitari exterior definit als punts de ∂W. Denotem dA com l'element d'àrea sobre la frontera. Podem formular el principi de conservació de massa com: *la variació de massa en W és igual al flux de massa que travessa ∂W*; de manera que si la massa travessa la frontera en el sentit de $\mathbf{n}$, la massa a l'interior disminueix;

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_W \rho\, dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dA} \tag{2.1}$$

[1] Les condicions de regularitat en ρ no tenen sentit a escala molecular. No obstant, a escala macroscòpica, és pot considerar ρ com una funció regular.

Aquesta és la **fórmula integral de la llei de conservació de massa**. Utilitzant el teorema de la divergència obtenim

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u})\right] dV = 0.$$

(Fem servir la notació habitual: $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$).
Com que aquesta integral s'ha d'anul·lar per a tota subregió W de D, concloem que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0} \tag{2.2}$$

Aquesta equació s'anomena la **fórmula diferencial de la llei de conservació de massa** o **equació de continuïtat**.

(ii) Conservació de moment

Sigui $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ el camí que segueix la partícula al fluid. Aleshores, el camp de velocitats és

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t)).$$

I l'acceleració es pot calcular com

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

que és pot escriure de manera equivalent com

$$\mathbf{a}(t) = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

on

$$\partial_t \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad \text{i} \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Les forces que actuen sobre una part de fluid poden ser de dos tipus:

- Forces de tensió o de superfície: degudes a la resta del fluid.
- Forces externes: que exerceixen un força per unitat de volum en cada punt del fluid; com per exemple, la gravetat.

Més endavant, tractarem unes forces de tensió més generals, però de moment treballarem amb un fluid ideal, que satisfà la següent propietat: *Per a qualsevol moviment del fluid existeix una funció $p(\mathbf{x}, t)$, anomenada* **pressió***, tal que si S és una superfície en el fluid amb vector normal unitari $\mathbf{n}$, la força exercida sobre la superfície S per unitat d'àrea a $\mathbf{x} \in S$ en un temps t és $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$.*

Observem que l'absència de forces tangencials exclou qualsevol moviment rotatori que es pugui iniciar al fluid. És a dir, les rotacions al fluid provenen de les condicions inicials. Per suposat, la condició de fluid ideal deixa de banda molts fenòmens físics que ocorren a la natura on apareixen rotacions. És per això que haurem d'incloure un terme més general, de caràcter tensorial, com hem comentat abans.

Així doncs, si W és una regió del fluid en un instant de temps t, la força total exercida sobre el fluid dins W és

$$\mathbf{S}_{\partial W} = -\int_{\partial W} p\mathbf{n}\, dA.$$

Llavors, si considerem un vector $\mathbf{e}$ fix a l'espai, pel teorema de la divergència obtenim

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{S}_{\partial W} = -\int_{\partial W} p\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\, dA = -\int_{W} \operatorname{div}(p\mathbf{e})\, dV = -\int_{W} (\nabla p)\cdot\mathbf{e}\, dV.$$

Per tant,

$$\mathbf{S}_{\partial W} = -\int_{W} \nabla p\, dV.$$

Si $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ denota la força externa per unitat de massa, la força externa total sobre la regió W serà

$$\mathbf{B} = \int_{W} \rho\mathbf{b}\, dV.$$

Per tant, estem en condicions d'escriure el balanç de forces del fluid fent servir la segona llei de Newton:

$$\boxed{\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{b}} \tag{2.3}$$

que és la forma diferencial de l'anomenada llei de **conservació de moment**.

Per expressar la llei de conservació de moment en forma integral desenvolupem la derivada total

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\mathbf{b},$$

i fent servir l'equació de continuitat (2.2),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} - \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p + \rho\mathbf{b}.$$

Considerem de nou un vector fix de l'espai $\mathbf{e}$. Llavors, es compleix

$$\begin{aligned}\mathbf{e}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) &= -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u}\cdot\mathbf{e} - \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{e} - (\nabla p)\cdot\mathbf{e} + \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}\\ &= -\operatorname{div}(p\mathbf{e} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})) + \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}.\end{aligned}$$

Aleshores, per a una regió fixa del fluid W, la variació del moment en la direcció de $\mathbf{e}$ en W és

$$\mathbf{e}\cdot\frac{d}{dt}\int_{W}\rho\mathbf{u}\, dV = -\int_{\partial W}(p\mathbf{e} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{u}))\cdot\mathbf{n}\, dA + \int_{W}\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}\, dV$$

pel teorema de la divergència. Així doncs, la forma integral del balanç de moment és

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_W \rho\mathbf{u}\,dV = -\int_{\partial W}(p\mathbf{n}+\rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}))\,dA + \int_W \rho\mathbf{b}\,dV.} \tag{2.4}$$

La quantitat $p\mathbf{n}+\rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})$ és el **flux de moment per unitat d'àrea** que travessa ∂W.

A continuació provarem que aquesta fórmula integral es pot escriure d'una altra forma equivalent. Aquesta forma ens servirà per deduir el Teorema del Transport que ens serà útil més endavant. Per fer això, hem d'introduir primer algunes definicions. Considerem Ω una regió del fluid en moviment. Sigui $\mathbf{x}\in\Omega$, escrivim com $\varphi(\mathbf{x},t)$ la trajectòria que segueix la partícula que es troba en $\mathbf{x}$ a $t=0$. Suposarem que φ és suficientment regular per els càlculs que venen a continuació, i també que donat un t fix, φ és invertible[2]. Sigui φ_t l'aplicació $\mathbf{x}\to\varphi(\mathbf{x},t)$, que envia cada partícula a la posició t en el temps. Anomenem φ **l'aplicació flux del fluid**. Si W és una regió de Ω, aleshores $\varphi_t(W)=W_t$ representa l'evolució d'aquesta en el fluid.

Proposició 2.1. *La fórmula integral (2.4) és equivalent a*

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t}\rho\mathbf{u}\,dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t}\rho\mathbf{b}\,dV, \tag{2.5}$$

que es pot interpretar físicament com: la variació del moment d'una regió en moviment d'un fluid és igual al total de forces que actuen sobre aquesta (i.e. tensió superficial i forces externes).

Demostració: Per provar-ho utilitzem el teorema del canvi de variable per escriure

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t}\rho\mathbf{u}\,dV = \frac{d}{dt}\int_W (\rho\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{u},t),t)\,|J(\mathbf{x},t)|\;dV,$$

on $J(\mathbf{x},t)=\det(D\varphi_t)$ és el determinant del Jacobià de φ_t. Com que el volum és fix a l'instant inicial, l'expressió anterior és equivalent a

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t}\left((\rho\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x},t),t)|J(\mathbf{x},t)|\right)\,dV =$$

$$= \int_W \left[\frac{\partial}{\partial t}((\rho\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x},t),t))\,|J(\mathbf{x},t)| + (\rho\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x},t),t)\frac{\partial}{\partial t}|J(\mathbf{x},t)|\right]\,dV$$

El primer terme el sabem calcular. Vegem com calcular el segon:

Lema 2.1.

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\mathbf{x},t) = J(\mathbf{x},t)[\operatorname{div}(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x},t),t))].$$

[2] De fet, aquesta és una condició bastant natural, ja que esperem que la trajectòria d'una partícula sigui suau i no es talli enlloc. Així mateix, esperem poder tornar enrere en el temps i rècorrer el camí invers.

Demostració: (A l'annex)

Llavors, fent servir el Lema 2.1,

$$\frac{d}{dt}\int_W (\rho\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{x},t),t)\,|J(\mathbf{x},t)|\,dV = \int_W \left[\frac{\partial}{\partial t}((\rho\mathbf{u})(\varphi(\boldsymbol{x},t),t)) + (\rho\mathbf{u})\mathrm{div}(\mathbf{u})\right]|J(\mathbf{x},t)|\,dV.$$

Ens fixem ara en el primer terme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}((\rho\mathbf{u})(\varphi(\boldsymbol{x},t),t)) &= \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho\right)\\ &= \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho\right)\end{aligned}$$

El substituïm a l'integrand i ens queda

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}(\mathbf{u})\right) = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\right) = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

per la fórmula de conservació de massa (2.2). És a dir,

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t}\rho\mathbf{u}\,dV = \int_{W_t}\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}\,dV.$$

Observem que, en efecte, el terme de l'esquerra correspon a la variació del moment de la regió W_t. Per tant, com que la igualtat es satisfà per a W_t arbitrari, hem provat que (2.5) és equivalent a (2.3), la qual és equivalent a la vegada a (2.4).

□

Corol·lari 1. (**Teorema del transport**)
Donades funcions $\rho, f \in C^1(\Omega)$ de $\mathbf{x}$ i t, amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ compacte, i $W_t \subseteq \Omega$ obert, aleshores

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t}\rho f\,dV = \int_{W_t}\rho\frac{df}{dt}\,dV.$$

□

Aprofitem ara que hem introduït el Lema 2.1 per definir el concepte de fluid **incompressible**. Un fluid és incompressible si per qualsevol regió W_t,

$$\mathrm{volum}(W_t) = \int_{W_t} dV = \text{constant en } t.$$

Proposició 2.2. *Les següents afirmacions, referides a un fluid amb densitat ρ i camp de velocitats $\mathbf{u}$, són equivalents:*

(i) *El fluid és incompressible.*

(ii) $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$.

(iii) $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$.

Demostració:
$(i) \Leftrightarrow (ii)$
Per la definició de fluid incompressible

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{W_t} dV = \frac{d}{dt}\int_W J\,dV = \int_W \mathrm{div}(\mathbf{u})J\,dV = \int_{W_t} \mathrm{div}(\mathbf{u})\,dV$$

per qualsevol W_t.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$
Per l'equació de continuïtat (2.2)

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}(\mathbf{u}),$$

i com que ρ no es pot anul·lar (en el límit de densitat petita no és vàlida la suposició de regularitat sobre la funció ρ a nivell macroscòpic),

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

□

(iii) Conservació d'energia
Fins ara hem vist les 3 equacions, una per cada component, (2.3) pel balanç del moment

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}$$

més l'equació (2.2) per la conservació de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Això fa un total de 4 equacions si treballem en un espai tridimensional. En canvi, tenim 5 funcions escalars per determinar: ρ, $\mathbf{u}$ i p. Llavors, per descriure el moviment del fluid ens cal una altra equació que vindrà d'imposar la conservació de l'energia. No obstant, aquesta última equació no formarà part del sistema de Navier-Stokes, encara que serà necessària per resoldre el problema en general.

Si suposem que no hi ha un intercanvi de treball per part del fluid amb l'exterior, l'energia total del sistema es pot escriure com una suma de l'energia cinètica del fluid més un terme d'energia interna, que depèn de la interacció molecular i dels efectes vibracionals o de temperatura,

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{int}\,.$$

L'energia cinètica d'un fluid en moviment en una regió W d'un domini D amb velocitat $\mathbf{u}$ és

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\int_W \rho||\mathbf{u}||^2\,dV,$$

on $||\mathbf{u}||^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$; mentre que l'energia interna dependrà de les característiques del nostre fluid i, en cada cas, s'haurà de deduir. Aleshores, podem obtenir l'última equació imposant que la variació de l'energia total del fluid per unitat de temps ve donada per la variació del treball (potència) produïda per les forces aplicades sobre aquest (Primer principi de la Termodinàmica[3] per unitat de temps), és a dir,

$$\frac{d}{dt}E_{tot} = -\int_{\partial W_t} p\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dA + \int_{W_t} \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}\,dV,$$

on a l'expressió de la dreta hem fet servir que les forces aplicades sobre W_t són degudes a la pressió i a forces externes, i que la poténcia és la força per la velocitat. Per altra banda, pel Teorema del Transport,

$$\frac{d}{dt}E_{tot} = \frac{d}{dt}E_{int} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{W_t}\rho||\mathbf{u}||^2\,dV = \frac{d}{dt}E_{int} + \frac{1}{2}\int_{W_t}\rho\frac{d||\mathbf{u}||^2}{dt}\,dV.$$

Amb això introduïm la forma de derivar aquesta última equació en el cas que sigui necessària.

Equacions de Navier-Stokes
Considerarem ara el cas d'un fluid més general que el del cas ideal. És a dir, un fluid afectat també per les forces transversals a la superfície d'una certa regió considerada. Aleshores, ens apareixerà un nou terme a l'expressió de la força

$$\text{força en } S \text{ per unitat d'àrea } = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{n} + \tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$$

De fet, suposarem més endavant que aquest nou terme depèn d'una manera específica de $\boldsymbol{x}$ i t: a partir de $D_x\boldsymbol{u}$. Vegem com és aquest nou terme:

Teorema 2.1. (Teorema de Cauchy)
Suposem un fluid amb densitat ρ, velocitat $\mathbf{u}$ i força externa $\mathbf{b}$ suficientment regulars. Suposem també que donat qualsevol vector normal unitari fix $\mathbf{n}$, la funció $\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$ és continua, i que satisfà

$$\int_W h\,dV = \int_{\partial W}\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})\,dA$$

on $h = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - \rho\mathbf{b}$. Aleshores, existeix una matriu $\sigma(\mathbf{x},t)$ tal que per a tot $\mathbf{x}$ i per a tot vector normal unitari $\mathbf{n}$ es dóna la igualtat

$$\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}.$$

És a dir, τ és lineal en $\mathbf{n}$. A la matriu σ se l'anomena **tensor de tensions**.

Demostració: (A l'annex)

Teorema 2.2. *Sota les mateixes hipòtesis del Teorema anterior el tensor de tensions σ és simètric.*

[3] $\Delta U = Q + W$, la variació de l'energia del sistema és la calor bescanviada amb la frontera més el treball intercanviat amb l'entorn.

Demostració: Aquesta propietat és pot deduir de la conservació del moment angular (veure [2] Teorema I.3.4.).

En definitiva, σ és un tensor simètric i la força associada a aquest terme tangencial a la superfície d'una regió del fluid és $\sigma \cdot \mathbf{n}$, on $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari de la superfície. A més a més, ens caldrà suposar dos condicions extra:

(i) σ depèn linealment de la diferencial de la velocitat $D_x\mathbf{u}$[4].

(ii) σ és invariant sota rotacions del sistema de referència[5], és a dir, si P és una matriu ortogonal,

$$\sigma(P \cdot D_x\mathbf{u} \cdot P^{-1}) = P \cdot \sigma(D_x\mathbf{u}) \cdot P^{-1}.$$

Els fluids que satisfan aquestes condicions s'anomenen Newtonians.

A continuació definim el **tensor de deformacions** $\mathcal{D}$ com

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(D_x\mathbf{u} + (D_x\mathbf{u})^T),$$

que és simètric com podem observar a la definició. Observem també que traça$(\mathcal{D}) :=$ tr$(\mathcal{D}) =$ div$(\mathbf{u})$.

Així doncs, com que σ és simètric i satisfà (i), només pot dependre de la part simètrica de $D_x\mathbf{u}$; és a dir, de $\mathcal{D}$. Per tant, $\sigma = \sigma(\mathcal{D})$, i més concretament:

Proposició 2.3. *Per a un fluid Newtonià, el tensor de tensions com a funció del tensor de deformacions és necessàriament de la forma*

$$\sigma = 2\mu\mathcal{D}(\mathbf{u}) + \lambda(\mathrm{div}(\mathbf{u}))Id,$$

on λ i μ són coeficients reals. μ rep el nom de **coeficient de viscositat dinàmic**.

Demostració: Sigui $\mathcal{D}$ una matriu simètrica i $\mathbf{x}$ un vector propi de $\mathcal{D}$ amb valor propi Λ. Considerem la matriu P corresponent a la simetria especular respecte l'hiperplà ortogonal a $\mathbf{x}$, Σ. És a dir, $P\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ i $P_{|\Sigma} = Id$.
Aleshores, com que $\mathcal{D}$ és simètrica (i per tant diagonalitzable), els seus vectors propis són ortogonals i, descomposant un vector qualsevol en una contribució de $\mathbf{x}$ i una de l'espai ortogonal, tenim que se satisfà $P^T\mathcal{D}P = \mathcal{D}$. Per tant, per la propietat (ii)

$$P^T\sigma(\mathcal{D})P = \sigma(\mathcal{D}),$$

i com que P és ortogonal,

$$\sigma(\mathcal{D})P = P\sigma(\mathcal{D}).$$

Així doncs, $P\sigma(\mathcal{D})\mathbf{x} = \sigma(\mathcal{D})P\mathbf{x} = -\sigma(\mathcal{D})\mathbf{x}$, és a dir, $\sigma(\mathcal{D})\mathbf{x}$ és proporcional a $\mathbf{x}$. Dit d'una altra manera, $\mathbf{x}$ és vector propi de $\sigma(\mathcal{D})$ amb valor propi Λ'. Observem

[4] Es pot veure que una matriu associada a una deformació del fluid depèn linealment de $D_x\boldsymbol{u}$

[5] Aquesta condició és raonable, ja que el fluid hauria de rebre la mateixa tensió independent del sistema de referència.

que aquest valor propi no depèn de $\mathbf{x}$, sinó que depèn només de Λ. En efecte, si $\mathbf{y}$ és un altre vector propi amb valor propi Λ, podem considerar el vector $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, que torna a ser propi de $\mathcal{D}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Això vol dir que el valor propi d'aquest vector depèn contínuament de t, però si aquest valor no és Λ, n'haurien d'haver infinits. Absurd. Per tant, $\forall t \in \mathbb{R}$, el valor propi és el mateix.

Acabem de veure que $\sigma(\mathcal{D})$ té els mateixos vectors propis que $\mathcal{D}$. Considerem ara la matriu E_i que té zeros a tot arreu menys a la posició (i,i) on té un 1. Aleshores, existeixen constants μ i λ tal que

$$\sigma(E_i) = 2\mu E_i + \lambda Id,$$

és a dir, els vector propis de $\sigma(E_i)$ són els de E_i amb un valor propi diferent.

Llavors, si considerem la nostra matriu de tensions $\tilde{\mathcal{D}}$ en el sistema de referència dels seus eixos principals, és a dir, en el sistema de referència en el qual és diagonal, la podem descomposar de la següent manera

$$\tilde{\mathcal{D}} = d_1 E_1 + d_2 E_2 + d_3 E_3,$$

i

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{\mathcal{D}}) &= d_1(2\mu E_1 + \lambda Id) + d_2(2\mu E_2 + \lambda Id) + d_3(2\mu E_3 + \lambda Id)\\ &= 2\mu\tilde{\mathcal{D}} + \lambda(d_1 + d_2 + d_3)Id = 2\mu\tilde{\mathcal{D}} + \lambda(\operatorname{tr}(\tilde{\mathcal{D}}))Id.\end{aligned}$$

Finalment, fem una canvi del sistema de referència per recuperar la matriu original $\mathcal{D} = P\tilde{\mathcal{D}}P^{-1}$, per una certa matriu P ortogonal. Aleshores, per la propietat (ii)

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(P\tilde{\mathcal{D}}P^{-1}) = P\sigma(\tilde{\mathcal{D}})P^{-1} &= 2\mu P\tilde{\mathcal{D}}P^{-1} + \lambda\operatorname{tr}(\tilde{\mathcal{D}})PP^{-1}\\ &= 2\mu\mathcal{D} + \lambda\operatorname{tr}(\mathcal{D})Id,\end{aligned}$$

ja que la traça és un invariant sota canvis de referència. L'enunciat segueix directament recordant que $\operatorname{tr}(\mathcal{D}) = \operatorname{div}(\mathbf{u})$.

□

Ara ja ens trobem amb disposició de deduir les equacions de Navier-Stokes. Simplifiquem el problema lleugerament eliminant les forces externes (només afegeix un terme a les equacions que no depèn de $\mathbf{u}$ i no aporta contingut matemàtic). Aleshores, l'equació del balanç de moment en la seva formulació integral, en una regió W_t que es mou amb el fluid, serà de la forma

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\mathbf{u}\, dV = \int_{\partial W_t} (-p\mathbf{n} + \sigma \cdot \mathbf{n})\ dA.$$

El primer terme el podem reescriure de manera equivalent utilitzant el Teorema del Transport com

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\mathbf{u}\, dV = \int_{W_t} \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV.$$

El segon terme el dividirem en dos parts. La part corresponent a la pressió p ja l'hem calculat anteriorment. Pel que fa a la segona part, considerem un vector fix

$\mathbf{e}$ de l'espai per projectar l'equació sobre la direcció d'aquest vector i facilitar els càlculs. És a dir

$$\int_{\partial W_t} \sigma \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{W_t} \operatorname{div}(\sigma \cdot \mathbf{e}) \, dV,$$

pel Teorema de la divergència. Calculem doncs el terme de la dreta. Tenint en compte l'expressió obtinguda per a σ,

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \mathbf{e}) = 2\mu \operatorname{div}(D \cdot \mathbf{e}) + \lambda \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}.$$

Ara només ens queda calcular el primer terme de la dreta, que és

$$2\mu \operatorname{div}(D \cdot \mathbf{e}) = \mu \operatorname{div}(D_x \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} + (D_x \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{e}).$$

Si expressem $\mathbf{e} = (a, b, c)$ en les seves components i desenvolupem el càlcul, obtenim

$$\mu \operatorname{div} \left[\left(2a \frac{\partial u_x}{\partial x} + b \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + c \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), a \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 2b \frac{\partial u_y}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), a \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right],$$

i aplicant l'operador divergència, i ordenant-ho de manera intencionada, obtenim

$$\mu \left[a \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + b \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + c \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right.$$

$$\left. + a \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + b \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) + c \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right],$$

que es pot escriure de manera compacta com

$$\mu \left[\Delta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{e} \cdot \nabla) \operatorname{div}(\mathbf{u}) \right],$$

on $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ és l'operador Laplacià. Per tant, introduint tots els termes dins de l'integral i fent servir que la igualtat es manté per a W_t arbitrari, arribem a les equacions diferencials en derivades parcials següents

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}, \tag{2.6}$$

que són les anomenades **equacions de Navier-Stokes**. Aquestes equacions juntament amb l'equació de continuïtat (2.2) i una equació per la conservació de l'energia descriuen completament el comportament d'un fluid viscós. No obstant, com ja veurem més endavant, nosaltres suposarem un fluid incompressible i no tindrem en compte els efectes deguts a variacions de la temperatura (variacions de l'energia interna). Per tant, no té sentit considerar una equació de conservació de l'energia. A més a més, com ja hem vist abans, quan el fluid és incompressible, la densitat és constant. Per tant, ja tenim una funció determinada.

3 Eines d'anàlisi funcional

Per analitzar les equacions de Navier-Stokes, en el nostre cas, estacionàries, hem d'introduir una sèrie d'eines d'anàlisi funcional que ens ajudaran en aquesta tasca.

3.1 Espais de funcions diferenciables i espais L^q

Per l'anàlisi de solucions d'equacions diferencials en derivades parcials necessitem definir els diferents tipus d'espais de funcions, així com certes nocions útils, i introduir la notació que farem servir d'ara endavant. Considerem un domini obert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, amb $n \geq 1$.

Definició 3.1. Sigui $k \in \mathbb{N}$. Aleshores, $C^k(\Omega)$ és l'espai de les funcions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $D^\alpha u$ existeix i és contínua en Ω per a tot $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ amb $0 \leq |\alpha| \leq k$. En particular, $C^0(\Omega)$ correspon a l'espai de les funcions contínues. Així mateix, l'espai de les funcions diferenciables en Ω és

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

Nota: α denota el multiíndex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_k \alpha_k$ i

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Definició 3.2. Sigui $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o $k = \infty$, definim

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) |\ \mathrm{sup}(u) \text{ és compacte },\ \mathrm{sup}(u) \subseteq \Omega\},$$

on $\mathrm{sup}(u) = \overline{\{x \in \Omega \,|\, u(x) \neq 0\}}$ denota el suport de u.

Definició 3.3. Definim la norma $\|u\|_{C^k}$ com

$$\|u\|_{C^k} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sup_{|\alpha| \leq k,\, x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

on $C^k(\overline{\Omega})$ denota l'espai de les restriccions de funcions $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ a $\overline{\Omega}$, $u|_{\overline{\Omega}}$, tal que

$$\sup_{|\alpha| \leq k,\, x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| < \infty$$

Definim també l'espai

$$C_{loc}^k(\overline{\Omega}) := \{u|_{\overline{\Omega}} \,|\, u \in C^k(\mathbb{R}^n)\}$$

Definició 3.4. Una funció contínua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ s'anomena funció Lipschitz si

$$\|u\|_{C^{0,1}} = \|u\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x,y \in \overline{\Omega},\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}$$

és finit. Aleshores, anomenem $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ a l'espai de funcions Lipschitz en $\overline{\Omega}$ amb norma $\|\cdot\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$.

Definició 3.5. Definim també els espais corresponents per als camps vectorials $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_m)$, $m \in \mathbb{N}$, de forma anàloga a

$$C^k(\Omega)^m := \{(u_1, ..., u_m) | u_j \in C^k(\Omega), j = 1, ..., m\}$$

Així doncs, podem definir de la mateixa manera $C_0^k(\Omega)^m$, $C^k(\overline{\Omega})^m$, $C_0^k(\overline{\Omega})^m$ i $C^{0,1}(\overline{\Omega})^m$, i les seves normes associades de forma anàloga a

$$\|\boldsymbol{u}\|_{C^k} = \|\boldsymbol{u}\|_{C^k(\overline{\Omega})^m} := \sup_{j=1,...,m} \|u_j\|_{C^k(\overline{\Omega})}$$

Per últim, definim un espai molt important per a nosaltres en l'estudi de solucions febles del sistema de Navier-Stokes, que conté aquelles funcions amb divergència nula:

Definició 3.6. Per a $n \geq 2$

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in C_0^\infty(\Omega)^n | \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0\}$$

Pel que fa a la frontera del nostre domini, Ω, també hem d'introduir certes nocions de regularitat. Per tant, suposem $\partial\Omega \neq \emptyset$ i $n \geq 2$. Procedim agafant per a cada $x \in \partial\Omega$ un nou sistema de coordenades, $y = (y_1, ..., y_n)$, amb origen x i definint el conjunt obert

$$U = U_{r,\beta,h}(x) = \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n | h(y') - \beta < y_n < h(y') + \beta, |y'| < r\},$$

amb $r > 0$, $\beta > 0$, $y' = (y_1, ..., y_{n-1})$ i $h : y' \mapsto h(y')$ una funció contínua real amb $|y'| < r$.

Definició 3.7. Un domini Ω és un domini Lipschitz si per cada $x \in \partial\Omega$, existeix un sistema de coordenades local amb origen a x, constants $r > 0$, $\beta > 0$, i una funció Lipschitz $h : y' \mapsto h(y')$, $|y'| \leq r$, tal que

$$U_{r,\beta,h}(x) \cap \partial\Omega = \{(y_1, ..., y_n) | y_n = h(y'), |y'| < r\}$$

i

$$U_{r,\beta,h}(x) \cap \Omega = \{(y_1, ..., y_n) | h(y') - \beta < y_n < h(y'), |y'| < r\}$$

Anàlogament, Ω serà un domini C^k si satisfà les mateixes condicions per a una funció $h \in C^k(\overline{B'}_r)$, $B'_r := \{ y' \in \mathbb{R}^{n-1} | \, |y'| < r\}$.

A més a més, les constants r, β i la funció h poden dependre del punt x. Si per un domini Ω podem escollir constants r i β independentment de x, i existeix una constant $\gamma(\Omega) > 0$ tal que, per cada $x \in \partial\Omega$,

$$\|h_x\|_{C^{0,1}(\overline{B'}_r)} \leq \gamma,$$

aleshores, diem que Ω és un domini uniformement Lipschitz.

Per últim, Ω serà C^k uniformement si satisfà les mateixes hipòtesis que un domini Lipschitz amb la diferència que $\gamma = \gamma(\Omega, k) > 0$ i, que per cada $x \in \partial\Omega$,

$$\|h_x\|_{C^k(\overline{B'}_r)} \leq \gamma$$

Definició 3.8. Sigui $1 \leq q < \infty$. Llavors, $L^q(\Omega)$ és l'espai de les funcions reals u Lebesgue-mesurables amb norma finita

$$\|u\|_q = \|u\|_{L^q(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Anàlogament, $L^\infty(\Omega)$ és l'espai de funcions reals Lebesgue-mesurables amb

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess-sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty$$

on ess-sup és el suprem essencial i està definit com el suprem excepte en un conjunt de mesura nul·la.

Introduim també l'exponent conjugat o dual de q com $q' = \dfrac{q}{q-1}$ i per $q = 1$ i $q = \infty$ prenem $q' = \infty$ i $q' = 1$, respectivament. Amb aquestes definicions ja podem provar la següent desigualtat:

Proposició 3.1 (Desigualtat de Hölder)**.** *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un domini obert i siguin $p, p' \in \mathbb{R}^+$. Sigui $r \in [1, +\infty)$ tal que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Aleshores, si $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$, es compleix que $uv \in L^r(\Omega)$ i

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

Demostració: Demostrarem la desigualtat per a $r = 1$. Aleshores, l'únic que hem de fer *a posteriori* és redefinir $p = \frac{\tilde{p}}{r}$ i $p' = \frac{\tilde{p}'}{r}$ per obtenir la desigualtat general. En efecte, si tenim que $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$, amb $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$, podem considerar $\tilde{u} \in L^{\tilde{p}}(\Omega)$, $\tilde{v} \in L^{\tilde{p}'}(\Omega)$ tal que $\tilde{u} = |u|^{1/r}$, $\tilde{v} = |v|^{1/r}$. Aleshores, $\|\tilde{u}\tilde{v}\|_r \leq \|\tilde{u}\|_{\tilde{p}} \|\tilde{v}\|_{\tilde{p}'}$.

Observem primer que la desigualtat se satisfà si $\|u\|_p = 0$ (respectivament, $\|v\|_{p'} = 0$), perquè això vol dir que u (respectivament, v) és nul·la (excepte en un conjunt de mesura nul·la). Així mateix, si p és infinit, $\|uv\|_1 \leq \|u\|_\infty \|v\|_{p'}$ es compleix efectivament (anàlogament és cert per a p' infinit). Per tant, podem suposar p i p' finits i $\|u\|_p \neq 0$, $\|v\|_{p'} \neq 0$.

Aleshores, podem redefinir $\hat{u} = \dfrac{u}{\|u\|_p}$ i $\hat{v} = \dfrac{v}{\|v\|_{p'}}$ de tal manera que si veiem que

$$|\hat{u}\hat{v}| \leq \frac{|\hat{u}|^p}{p} + \frac{|\hat{v}|^{p'}}{p'}, \tag{3.1}$$

haurem demostrat que $\|\hat{u}\hat{v}\|_1 \leq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ integrant la desigualtat anterior. És a dir, que $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$. Vegem doncs que la desigualtat (3.1), coneguda com la desigualtat de Young, és certa. En efecte, si fem servir que la funció logaritme és còncava, és a dir,

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t \log(x) + (1-t) \log(y),$$

per a x, y positius i $0 \leq t \leq 1$, obtenim

$$\log\left(\frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^{p'}}{p'}\right) = \log(t|u|^p + (1-t)|v|^{p'}) \geq t\log(|u|^p) + (1-t)\log(|v|^{p'})$$

$$= \log(|u|) + \log(|v|) = \log(|uv|),$$

on hem agafat $t = \frac{1}{p}$. I com que la funció logaritme és monòtona, la desigualtat queda demostrada.

$\square$

Una altra desigualtat que ens serà útil és la següent:

Proposició 3.2 (Desigualtat d'interpolació)**.** *Sigui* $1 \leq q \leq \gamma \leq r \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *tal que*

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{r},$$

i sigui $u \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. *Aleshores* $u \in L^\gamma(\Omega)$ *i*

$$\|u\|_\gamma \leq \|u\|_q^\alpha \|u\|_r^{1-\alpha} \leq \|u\|_q + \|u\|_r$$

Demostració: Per demostrar la primera desigualtat l'únic que hem de fer és escriure $|u| = |u|^\alpha |u|^{1-\alpha}$ i aplicar la desigualtat de Hölder per $p = q/\alpha$ i $p' = r/(1-\alpha)$. Per la segona, apliquem la desigualtat de Young per a $p = 1/\alpha$ i $p' = 1/(1-\alpha)$ per obtenir

$$\|u\|_q^\alpha \|u\|_r^{1-\alpha} \leq \alpha\|u\|_q + (1-\alpha)\|u\|_r \leq \|u\|_q + \|v\|_r$$

$\square$

Definició 3.9. Definim també els espais $L^q_{loc}(\Omega)$ i $L^q_{loc}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q \leq \infty$, de tal manera que $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ si $u \in L^q(B)$ per a tot obert $B \subseteq \Omega$ tal que $\overline{B} \subseteq \Omega$; i $u \in L^q_{loc}(\overline{\Omega})$ si $u \in L^q(B \cap \Omega)$ per a tot obert $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $B \cap \Omega \neq \emptyset$.

Tal com hem fet abans, podem definir aquests espais per a camps vectorials.

Definició 3.10. Per a $m \in \mathbb{N}$,

$$L^q(\Omega)^m = \{(u_1, ..., u_m)|\, u_j \in L^q(\Omega), j = 1, ..., m\}$$

i la seva norma associada és

$$\|\boldsymbol{u}\|_q = \|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega)^m} = \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Anàlogament, podem definir $L^q_{loc}(\Omega)^m$ i $L^q_{loc}(\overline{\Omega})^m$.

Observació: La desigualtat de Hölder també se satisfà per a camps vectorials. En efecte, si definim

$$U = \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_p^p \right)^{1/p}, \quad V = \left(\sum_{j=1}^{m} \|v_j\|_q^q \right)^{1/q}$$

per a $\boldsymbol{u} \in L^p(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in L^q(\Omega)$ i $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, podem fer servir les desigualtats de Hölder per a camps escalars (Proposició 3.1) i de Young (3.1) per obtenir

$$\frac{\|u_i v_j\|_1}{UV} \leq \frac{\|u_i\|_p \|v_j\|_q}{UV} \leq \frac{1}{p} \frac{\|u_i\|_p^p}{U^p} + \frac{1}{q} \frac{\|v_j\|_q^q}{V^q}$$

i, sumant sobre i i j

$$\frac{\|\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}\|_1}{UV} \leq m$$

on $\otimes$ denota el producte tensorial, i.e. $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} := (u_i u_j)_{ij}$. Tal i com vam fer per demostrar la desigualtat de Hölder per a camps escalars, definim $\tilde{\boldsymbol{u}} \in L^{\tilde{p}}(\Omega)$ i $\tilde{\boldsymbol{v}} \in L^{\tilde{q}}(\Omega)$ per a $\tilde{p} = p/r$ i $\tilde{q} = q/r$, $r \in [1, +\infty)$ tal que $\tilde{\boldsymbol{u}}^r = \boldsymbol{u}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}^r = \boldsymbol{v}$ (en el sentit que $\tilde{u}_j = |u_j|^{1/r}$, $\tilde{v}_j = |v_j|^{1/r}$, per a $j = 1, ..., m$). Aleshores,

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}^r \otimes \tilde{\boldsymbol{v}}^r\|_1 \leq C \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_p^r \|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_q^r$$

i treient l'arrel r-èsima, que és monòtona, obtenim la desigualtat que buscàvem

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{v}}\|_r \leq C \|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_p \|\tilde{\boldsymbol{v}}\|_q \tag{3.2}$$

3.2 Distribucions

En teoria de distribucions, l'espai $C_0^\infty(\Omega)$ s'anomena espai test i cada funció d'aquest espai s'anomena funció test. Aquest espai està dotat amb una topologia tal que la successió $(\varphi_k)_k$ convergeix cap a φ si existeix un compacte $K \subset \Omega$ que conté el suport compacte de φ i de φ_k, i si per cada multiíndex $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la successió $(\partial^\alpha \varphi_k)_k$ convergeix uniformement cap a $\partial^\alpha \varphi$.

Definició 3.11. Un funcional lineal $F : \varphi \mapsto F(\varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, s'anomena distribució si és continu en el sentit que per a tot subdomini acotat $G \subseteq \Omega$ amb $\overline{G} \subseteq \Omega$, existeix un $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $C = C(F, G) > 0$ tal que

$$|F(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{C^k(\overline{G})}$$

per a tota funció $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. L'espai de les distribucions és $C_0^\infty(\Omega)'$, l'espai dels funcional lineals. Existeixen diverses definicions equivalents de distribució que es poden trobar a [5] (Teorema 2.1.4. i Teorema 2.1.5.).

Utilitzem la notació

$$F(\varphi) = [F, \varphi] = [F, \varphi]_\Omega$$

per denotar la imatge de φ pel funcional, i escrivim equivalentment $F = [F, \cdot\,]$.

Definició 3.12 (Derivada d'una distribució)**.** Donada una distribució $F \in C_0^\infty(\Omega)'$. La distribució $D^\alpha F \in C_0^\infty(\Omega)'$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es defineix com

$$[D^\alpha F, \varphi] = (-1)^{|\alpha|}[F, D^\alpha \varphi], \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Donada una funció $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, podem associar-la a un funcional $F \in C_0^\infty(\Omega)'$ definit com

$$[F, \varphi]_\Omega = \int_\Omega f\varphi \, dx =:< f, \varphi >_\Omega,$$

Llavors, $F = F_f =< f, \cdot >$. És a dir, identifiquem un subespai de $C_0^\infty(\Omega)'$ amb l'espai de funcions localment integrables, $L^1_{loc}(\Omega)$. Dos distribucions definides per funcions locament integrables són iguals si les funcions coincideixen a tot arreu excepte en un conjunt de mesura nul·la. Diem que f és una distribució regular.

Definició 3.13. Sigui $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ i $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Si la distribució $D^\alpha f$ és regular, és a dir, $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'anomenem derivada feble o derivada generalitzada α-èsima de f. A més, per $1 \leq q \leq \infty$, farem servir

$$D^\alpha f \in L^q(\Omega)$$

per dir que $D^\alpha f$ és una distribució regular i que és una funció de $L^q(\Omega)$.

Nota: si $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, aleshores la distribució $D^\alpha f$ coincideix gairebé a tot arreu amb la derivada usual. Aquest fet és el que motiva la definició de la derivada d'una distribució.

A continuació, tal com hem fet abans, definim també els espais corresponents per als camps vectorials. Així doncs, sigui $m \in \mathbb{N}$

$$C_0^\infty(\Omega)^m := \{(\varphi_1, ..., \varphi_m) | \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega), j = 1, ..., m\}$$

Aleshores, per a $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_m)$, $F_j \in C_0^\infty(\Omega)'$, $j = 1, ..., m$, definim també el funcional

$$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{\varphi} \mapsto [\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}] = [F_1, \varphi_1] + \cdots + [F_m, \varphi_m]$$

per a $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$. Per tant, definim

$$C_0^\infty(\Omega)'^m = C_0^\infty(\Omega)^{m\prime} := \{(F_1, ..., F_m) | F_j \in C_0^\infty(\Omega)', j = 1, ..., m\},$$

l'espai de distribucions de l'espai de funcions test $C_0^\infty(\Omega)^m$.

De nou, una funció $\boldsymbol{f} \in L^1_{loc}(\Omega)^m$, $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_m)$, defineix una distribució

$$\boldsymbol{\varphi} \mapsto [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}] =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} >= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx$$

on $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} = f_1\varphi_1 + \cdots + f_m\varphi_m$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in C_0^\infty(\Omega)^m$. Això ens porta a un embedding, de forma similar a l'anterior, de $L^1_{loc}(\Omega)^m$ en $C_0^\infty(\Omega)^{m\prime}$. També de forma anàloga podem definir $D^\alpha f$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m$.

Per últim, introduirem un espai molt important per a la definició de solucions febles de les equacions de Navier-Stokes.

Definició 3.14.
$$C_{0,\sigma}^{\infty} = \{\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)^n |\ \mathrm{div}(\varphi) = 0\}$$
és l'espai de les funcions test solenoidals (amb divergència nul·la).

Es pot demostrar que els espais $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, són espais complets, és a dir, són espais de Banach ([1] Teorema 2.16).

Cal destacar el fet que l'espai $L^2(\Omega)$ té una importància especial, ja que es tracta d'un espai de Hilbert, encara que no ens entretindrem a provar-ho ([1] Corol·lari 2.18), amb un producte escalar definit com

$$< f, g >_\Omega = \int_\Omega f\, g\, dx,$$

per a $f, g \in L^2(\Omega)$, que indueix la norma sobre aquest espai.

3.3 Espais de Sobolev

La idea en la definició d'aquest espais és la d'obtenir funcions que no només siguin integrables en un cert espai L^q, sinó que tinguin derivades integrables fins a un cert ordre. Aquests espais són els que farem servir per al tractament de les solucions febles de les equacions de Navier-Stokes.

Definició 3.15. Sigui $k \in \mathbb{N}$ i $1 \leq q \leq \infty$. L'espai L^q-Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$ d'ordre k és defineix com l'espai de les funcions $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u \in L^q(\Omega)$$

per tot $|\alpha| \leq k$. I li associem la norma

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} = \|u\|_{k,q} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

per $1 \leq q < \infty$, i
$$\|u\|_{k,\infty} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty,$$
per $q = \infty$.

Freqüentment farem servir l'espai $W^{k,2}(\Omega)$, ja que es tracta d'un espai de Hilbert amb producte escalar

$$\sum_{|\alpha| \leq k} < D^\alpha u, D^\alpha v >, \quad u, v \in W^{k,2}(\Omega)$$

Definició 3.16. Anomenem
$$W_0^{k,q}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,q}}$$
al subespai de $W^{k,q}(\Omega)$ obtingut com la clausura de les funcions de $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma $\|\cdot\|_{k,q}$.

Definició 3.17. Donats $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. L'espai $W^{-k,q}(\Omega)$ d'ordre negatiu $-k$ es defineix com l'espai dual de $W^{k,q'}(\Omega)$, on $q' = \dfrac{q}{q-1}$ és el conjugat de q. Ho escrivim com

$$W^{-k,q}(\Omega) = W^{k,q'}(\Omega)'$$

És a dir, és l'espai dels funcionals lineals

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi], \quad \varphi \in W_0^{k,q'}(\Omega)$$

continus en la norma $\|\varphi\|_{k,q'}$. F és continu en $\|\varphi\|_{k,q'}$ si existeix una constant $C(F) > 0$ tal que

$$|[F, \varphi]| \leq C\|\varphi\|_{k,q'}$$

per a tot $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definim la norma en $W^{-k,q}(\Omega)$ com

$$\|F\|_{W^{-k,q}(\Omega)} = \|F\|_{-k,q} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} |[F, \varphi]|/\|\varphi\|_{k,q'}$$

Ens ajudem ara de les definicions dels espais de Lebesgue locals $L^q_{loc}(\Omega)$ i $L^q_{loc}(\overline{\Omega})$ per definir els següents espais.

Definició 3.18. Donat $k \in \mathbb{N}$. $u \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$ si $D^\alpha u \in L^q_{loc}(\Omega)$ per tot $|\alpha| \leq k$; i $u \in W^{k,q}_{loc}(\overline{\Omega})$ si $D^\alpha u \in L^q_{loc}(\overline{\Omega})$ per tot $|\alpha| \leq k$.

Per últim, com abans, definim els espais de Sobolev per a camps vectorials $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_m)$, $m \in \mathbb{N}$, de forma anàloga a

$$W^{k,q}(\Omega)^m := \{(u_1, ..., u_m) | u_j \in W^{k,q}(\Omega), j = 1, ..., m\}$$

amb norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{W^{k,q}(\Omega)^m} = \|\boldsymbol{u}\|_{k,q} := \left(\sum_{j=1}^m \|u_j\|^q_{k,q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Així doncs, tenim $W_0^{k,q}(\Omega)^m$, $W^{-k,q}(\Omega)^m$, $W^{k,q}_{loc}(\Omega)^m$, $W^{k,q}_{loc}(\overline{\Omega})^m$ i $W^{-k,q}_{loc}(\Omega)^m$.

Com hem fet notar pel cas de camps escalars, es pot demostrar que l'espai $W^{1,2}(\Omega)^m$ és un espai de Hilbert amb producte escalar

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > + < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T > := \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_\Omega (D\boldsymbol{u})^T : (D\boldsymbol{v})^T \, dx$$

on $(D\boldsymbol{u})^T : (D\boldsymbol{v})^T = \sum_{i,j=1}^m \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$.

3.4 Teorema de Hahn-Banach i Teorema de representació de Riesz

A continuació, donarem dos resultats importants en teoria de distribucions que ens seran d'utilitat més endavant.

Teorema 3.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sigui X un espai vectorial real i $p(x)$ una funció a X tal que*

$$\begin{array}{l} p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \textit{(subadditivitat)} \\ p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \textit{per a} \quad \alpha \geq 0 \end{array}$$

Considerem un subespai vectorial $M \subset X$ i f_0 un funcional lineal definit a M, i.e.

$$f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(x), \quad x, y \in M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Suposem $f_0(x) \leq p(x)$ a M. Aleshores, existeix un funcional lineal F sobre X tal que:

i) F és una extensió de f_0, i.e. $F(x) = f_0(x)$, $x \in M$.

ii) $F(x) \leq p(x)$ a X.

Demostració: Considerem l'espai generat per M i $x_0 \notin M$, $M_0 = \{x = m + \alpha x_0 \,|\, m \in M, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Com que $x_0 \notin M$, és fàcil veure que la representació per $x \in M_0$ és única. Llavors, si per a $c \in \mathbb{R}$ qualsevol definim

$$g(x) = g(m + \alpha x_0) = f_0(m) + \alpha c,$$

g és una extensió de f_0 i un funcional lineal a M_0. Ara només ens queda escollir c per tal que $g(x) \leq p(x)$ a M_0. És a dir, $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_0(m) + \alpha c \leq p(m + \alpha x_0),$$

i això és equivalent a

$$\begin{array}{ll} f_0\left(\frac{m}{\alpha}\right) + c \leq p(x_0 + \frac{m}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ f_0\left(\frac{m}{-\alpha}\right) - c \leq p(-x_0 + \frac{m}{-\alpha}), & \alpha < 0 \end{array}$$

(per a $\alpha = 0$, la desigualtat se satisfà per hipòtesi). Per tant, hem d'escollir c tal que

$$f_0(m') - p(m' - x_0) \leq c \leq p(m'' + x_0) - f_0(m''), \quad m', m'' \in M$$

Aquesta c existeix, ja que

$$f_0(m') + f_0(m'') = f_0(m' + m'') \leq p(m' + m'') = p(m' - x_0 + m'' + x_0)$$

$$\leq p(m' - x_0) + p(m'' + x_0)$$

Llavors, hem d'escollir $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{m' \in M} [f_0(m') - p(m' - x_0)] \leq c \leq \inf_{m'' \in M} [p(m'' + x_0) - f_0(m'')]$$

Una vegada hem estès f_0 a M_0, veurem que existeix una extensió maximal a X de f_0. En efecte, considerem les extensions g de f_0 tal que $g(x) \leq p(x)$ per a x al domini de g. Llavors, podem construir una familia ordenada d'extensions de f_0 de tal forma que $h > g$, si h és una extensió de g. Aleshores, pel Lema de Zorn, existeix una extensió maximal F de f_0 tal que $F(x) \leq p(x)$, per a x al domini de F, $D(F)$. Només ens queda veure que aquest domini és X. Si suposem que és diferent de X, podem agafar $M = D(F)$ i $f_0 = F$, i procedir com hem fet abans per construir una nova extensió g. Això és una contradicció, ja que F és maximal. Per tant, $D(F) = X$.

$\square$

A continuació demostrarem el Teorema de Riesz, que és també vàlid per un espai de Hilbert sobre un cos $\mathbb{K}$ qualsevol. No obstant, nosaltres el provarem només pel cas real, que és el que estem tractant contínuament.

Teorema 3.2 (Teorema de representació de Riesz). *Sigui X un espai de Hilbert real, i sigui X' el seu espai dual. Aleshores, $f \in X'$ si, i només si, existeix $v \in X$ tal que*

$$f(u) =< v, u >, \quad \forall u \in X$$

En particular, $v \in X$ està unívocament determinat.

Definició 3.19. Un espai de Banach real X és reflexiu si tot funcional lineal continu $f \in X'$ té la forma $f \mapsto [f, v]$, per algun $v \in X$ fixat. Llavors, denotem el funcional com $[\cdot, v]$ i $(X')' = X$.

Per demostrar el Teorema de Riesz necessitarem els següents resultats:

Lema 3.1 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Sigui X un espai de Hilbert amb norma $\|\cdot\|$. Es compleix*

$$| < v, u > | \leq \|v\|\|u\|$$

Demostració: Si $v = 0$, aleshores $| < 0, u > | = 0 = \|0\|\|u\|$. Si $< v, u >= 0$, $0 \leq \|v\|\|u\|$. Suposem $v \neq 0$, $< v, u >\neq 0$, i definim

$$z = u - \frac{< v, u >}{< v, v >} v,$$

la projecció ortogonal de u sobre el subespai ortogonal a v. En efecte,

$$< v, z >=< v, u > - \frac{< v, u >}{< v, v >} < v, v >= 0$$

Llavors, pel Teorema de Pitàgores,

$$\|u\|^2 = \left| \frac{< v, u >}{< v, v >} \right|^2 \|v\|^2 + \|z\|^2 \geq \frac{| < v, u > |^2}{\|v\|^2}$$

$\square$

Lema 3.2. *Sigui* $a : X \times X \to \mathbb{R}$ *una forma bilinial simètrica, acotada, fortament positiva* $(a(u,u) \geq c\|u\|^2$, $c > 0$, $\forall u \in X)$ *sobre l'espai de Hilbert real* X*, i* $b : X \to \mathbb{R}$ *un funcional lineal continu a* X*. Aleshores, l'equació*

$$a(u,v) = b(v) \tag{3.3}$$

té una única solució $u \in X$*, per tot* $v \in X$*.*

Demostració: Unicitat: Siguin u, w dos solucions de l'equació (3.3), $\forall v \in X$. Aleshores, si considerem $v = u - w$ i tenim en compte que per hipòtesi sobre a, existeixen constants $c, d > 0$ tal que

$$c\|u\|^2 \leq a(u,u) \leq d\|u\|^2, \quad \forall u \in X,$$

obtenim

$$c\|u-w\|^2 \leq a(u-w, u-w) = a(u,v) - a(w,v) = 0$$

Per tant, $u = w$.

Existència: L'equació (3.3) és equivalent a trobar $u \in X$ que minimitza $F(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - b(u)$. Vegem-ho:

$$F(u+tv) = \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}t^2 a(v,v) + t[a(u,v) - b(v)] - b(u), \quad t \in \mathbb{R}$$

Llavors, u minimitza $F(u)$ si, i només si, la paràbola $F(u+tv)$ té el mínim a $t = 0$ (observem que és una paràbola creixent, ja que $a(v,v) > 0$). És a dir, si, i només si,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = a(u,v) - b(v) = 0$$

Definim $\alpha = \inf_{u \in X} F(u)$, que és finit, donat que $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - b(u) \geq \frac{1}{2}c\|u\|^2 - \|b\|\|u\|$ (paràbola creixent en $\|u\|$), perquè b és continu.
Aleshores, per la definició d'ínfim, existeix una successió $(u_n)_n$ tal que $F(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
I fent servir la identitat

$$2a(u_n,u_n) + 2a(u_m,u_m) = a(u_n - u_m, u_n - u_m) + a(u_n + u_m, u_n + u_m),$$

obtenim

$$F(u_n) + F(u_m) = \frac{1}{4}(a(u_n - u_m, u_n - u_m) + a(u_n + u_m, u_n + u_m)) - b(u_n) - b(u_m)$$

$$= \frac{1}{4}a(u_n - u_m, u_n - u_m) + 2F\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \geq \frac{1}{4}c\|u_n - u_m\|^2 + 2\alpha$$

Aleshores, com que $F(u_n) + F(u_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 2\alpha$, $\|u_n - u_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. És a dir, $(u_n)_n$ és una successió de Cauchy. En conseqüència, existeix $u \in X$ tal que $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ i $F(u) = \alpha$.

□

Teorema 3.3 (Teorema de descomposició ortogonal)**.** *Sigui $M \subseteq X$ un subespai tancat d'un espai de Hilbert real. Llavors, donat $u \in X$, existeix una única descomposició ortogonal*

$$u = v + w, \quad v \in M, \, w \in M^{\perp}$$

Demostració: <u>Existència:</u> Per veure l'existéncia, veurem primer que existeix un únic $v \in M$ tal que $\|u - v\|$ és mínim.

$$\|u - v\| =< u - v, u - v >=< u, u > + < v, v > -2 < u, v >$$

Si definim $a(v, w) :=< v, w >$ i $b(v) :=< u, v >$, veiem que $\|u - v\|^2$ és mínim si, i només si, $a(v, v) - 2b(v)$ és mínim. Aquesta última condició és justament la que hem tractat a la demostració del Lema 3.2 anterior. Llavors, per poder aplicar el lema, hem de veure que a i b satisfan les hipòtesis d'aquest. En efecte, a és una forma bilinial simétrica, acotada i fortament positiva, ja que per la desigualtat de Cauchy-Schwarz (Lema 3.1)

$$|a(v, w)| \leq \|v\|\|w\| \quad \text{i} \quad a(v, v) = \|v\|^2, \quad \forall v, w \in X,$$

i b és un funcional continu, ja que $|b(v)| \leq \|u\|\|v\|$, per a tot $u, v \in X$. Per tant, com que M és tancat, és també un espai de Hilbert i, pel Lema 3.2, existeix un únic $v \in M$ que minimitza $\|u - v\|^2$. Llavors, agafant $v \in M$ que minimitza $\|u - v\|^2$,

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - (v + \lambda w)\|^2, \quad \forall w \in M, \lambda \in \mathbb{R}$$

Per tant,

$$< u - v, u - v > \leq < u - v, u - v > -2\lambda < u - v, w > +\lambda^2 < w, w >$$

Si $u - v = 0$, $< u - v, w >= 0$ per a tot $w \in M$. Llavors, $u - v \in M^{\perp}$. Suposem $u - v \neq 0$ i $w \neq 0$, aleshores prenent $\lambda = \dfrac{< u - v, w >}{\|w\|^2}$, obtenim

$$- < u - v, w >^2 \geq 0, \quad \forall w \in M \quad \Rightarrow \quad < u - v, w >= 0, \quad \forall w \in M$$

Per tant, $u - v \in M^{\perp}$. Amb això hem provat l'existència de la descomposició ortogonal.

<u>Unicitat:</u> Siguin $u = v + w$ i $u = v_1 + w_1$ dos descomposicions ortogonals de $u \in X$, $v, v_1 \in M$, $w, w_1 \in M^{\perp}$. Aleshores, igualant les dues descomposicions $0 = (v - v_1) + (w - w_1)$, $v - v_1 \in M$ i $w - w_1 \in M^{\perp}$. Llavors,

$$0 =< v - v_1, w - w_1 >= - < v - v_1, v - v_1 >$$

Per tant, $v = v_1$. Anàlogament, $w = w_1$.

□

Ara ja podem provar el Teorema de Riesz.

Demostració: <u>Unicitat:</u> Si $< v, u >=< v_1, u >$ per a tot $u \in X$, aleshores

$$< v - v_1, u >= 0, \quad \forall u \in X$$

i, en particular, per a $u = v - v_1$. Per tant, $v = v_1$.

Existència: Considerem $f \in X'$, $f \neq 0$. $N(f) = \{u \in X \,|\, f(u) = 0\}$ és un subespai tancat de X (donada un successió $(u_n)_n$ de $N(f)$, $f(u_n) = 0$ i per la continuïutat de f, si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, $f(u) = 0$). Així doncs, pel Teorema de descomposició ortogonal (Teorema 3.3), existeix $u_0 \in N(f)^{\perp}$, $u_0 \neq 0$. Si no fos així, voldria dir que $N(f) = X$ i $f = 0$, que és un absurd.

Aleshores, $f(u_0) \neq 0$, i podem suposar $f(u_0) = 1$. Llavors, $u - f(u)u_0 \in N(f)$ per a tot $u \in X$, i obtenim la descomposició ortogonal

$$u = w + f(u)u_0, \quad w \in N(f),\, u_0 \in N(f)^{\perp}$$

Projectant u sobre el subespai generat per u_0 obtenim $< u_0, u >= f(u) < u_0, u_0 >$ per a tot $u \in X$. És a dir, $f(u) =< v, u >$ per a $v = \frac{u_0}{\|u_0\|^2}$. En el cas en que $f = 0$, $v = 0$.

Recíprocament, si $f(u) =< v, u >$, $f \in X'$, ja que és lineal

$$f(\alpha u + \beta w) =< v, \alpha u + \beta w >= \alpha < v, u > + \beta < v, w >= \alpha f(u) + \beta f(w),$$

$$\forall u, w \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

i és continu, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz (Lema 3.1)

$$|f(u)| = |< v, u >| \leq \|v\|\|u\|, \quad \forall u \in X$$

□

4 Les equacions de Navier-Stokes estacionàries

Recordem la forma general de les equacions de Navier-Stokes que vam introduir a l'inici:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right) = -\nabla p + (\lambda + \mu)\, \nabla \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) + \mu \Delta \boldsymbol{u}$$

En aquesta secció ens restringirem al flux estacionari d'un fluid incompressible, i.e. treballarem amb camps vectorials solenoidals ($\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0$). A més a més, si inicialment la densitat és homogènia, es mantindrà constant per tot temps[6]. Per tant, podem dividir les equacions per ρ i redefinir $\nu = \mu/\rho > 0$ com el coeficient de viscositat cinemàtica, i $p' = p/\rho$ (que reanomenarem p). El resultant és el següent

$$\nu \Delta \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p = \boldsymbol{f}, \tag{4.1}$$

on $\boldsymbol{f}$ és una força externa. A més a més, suposarem que se satisfà la condició de contorn $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}$ (si $\partial\Omega \neq \emptyset$). On $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és el nostre domini i tractarem només el cas $n = 3$. Per tant, el nostre objectiu és provar resultats sobre l'existència de solucions febles del següent sistema

$$\begin{cases} \nu \Delta \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla p = \boldsymbol{f}, \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{4.2}$$

A continuació definirem el concepte de solució feble i veurem la seva l'existència tant en dominis acotats, primer, com en dominis no acotats a seguidament, fent una aproximació que ens retornarà al cas d'un domini acotat.

4.1 Solucions febles

Per definir el concepte de solució feble necessitarem introduir l'espai on viuran

$$\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) = \overline{C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2},$$

que és la completació de $C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$ respecte la norma $\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2$, on $(D\boldsymbol{u})^T$ és la diferencial transposada de $\boldsymbol{u}$. És a dir, és l'espai de les classes d'equivalència de les successions de Cauchy $(\boldsymbol{u}_j)_{j=1}^{\infty} \subset C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$ respecte la norma $\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2$. Això vol dir que per a cada successió $(\boldsymbol{u}_j)_j$, $((D\boldsymbol{u}_j)^T)_j$ és una successió de Cauchy respecte la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ i la seva classe d'equivalència convergeix a $(D\boldsymbol{u})^T \in L^2(\Omega)^{n^2}$. A més a més, veurem al Lema 4.4 que existeix un embedding $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \subseteq L^6(\Omega)^3$, i podem identificar cada element de $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ amb una única funció $\boldsymbol{v} \in L^6(\Omega)^3$.
Aquest espai té un producte escalar definit com

$$< (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >= \int_{\Omega} (D\boldsymbol{u})^T : (D\boldsymbol{v})^T \, dx$$

[6]En un fluid incompressible la densitat no canvia al llarg de les trajectòries de les partícules. Llavors, $\rho(\varphi(t; 0, x_0), t) = \rho(x_0, 0) = \rho_0$, $\forall t$, $\forall x_0$

per a $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

Per definir la noció de solució feble haurem de tractar cada terme a les equacions de Navier-Stokes (4.1) com un funcional definit a l'espai de les funcions test, $C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$. Així doncs, podem reescriure les equacions reinterpretades en sentit distribucional com

$$< \nu\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > - < (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > - < \nabla p, \boldsymbol{v} > = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} > \tag{4.3}$$

per a $\boldsymbol{v} \in C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$ arbitrària. Ara bé, podem fer algunes operacions en els diferents termes d'aquesta equació per tractar de simplificar-los. Pel que fa al primer, per cada component

$$< \Delta u_i, v_i > = - < \nabla u_i, \nabla v_i >, \quad 1 \leq i \leq 3$$

per la definició de la derivada d'una distribució. Llavors, aquest terme es pot escriure de manera compacta com $- < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >$.
Pel que fa al tercer, de forma similar

$$< \nabla p, \boldsymbol{v} > = - < p, \nabla\cdot\boldsymbol{v} > = 0$$

perquè $\boldsymbol{v}$ té divergència nul·la per definicó de funció test.
Per últim, el segon terme té és una mica més complicat i no serà tan directe trobar una expressió que contingui termes en $(D\boldsymbol{u})^T$ i en $\boldsymbol{u}$. Per això, haurem de provar la Proposició 4.1 que ens diu que, si $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \in L^{3/2}_{loc}(\overline{\Omega})^3$. És a dir, en sentit distribucional

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= (u_1\partial_1 + u_2\partial_2 + u_3\partial_3)\boldsymbol{u} = (u_1\partial_1 u_j + u_2\partial_2 u_j + u_3\partial_3 u_j)_{j=1}^3 \\
&= (\partial_1(u_1u_j) + \partial_2(u_2u_j) + \partial_3(u_3u_j))_{j=1}^3 - (u_j\partial_1 u_1 + u_j\partial_2 u_2 + u_j\partial_3 u_3)_{j=1}^3 \\
&= (\partial_1(u_1u_j) + \partial_2(u_2u_j) + \partial_3(u_3u_j))_{j=1}^3 = \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

Observem que a la segona línia ens apareix el terme $\operatorname{div}(\boldsymbol{u})$, que s'anul·la per la definició de $\boldsymbol{u}$. Així mateix, notem que la divergència del producte tensorial $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ s'aplica per columnes.
Aleshores,

$$< (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} > = < \operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} > = - < \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T >$$

de forma similar a com hem operat abans.

Ara sí, estem en condicions de definir el concepte de solució feble.

Definició 4.1. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domini qualsevol. Siguin $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \operatorname{div} F$ amb $\boldsymbol{f}_0 \in L^2_{loc}(\Omega)^3$, $F \in L^2(\Omega)^9$, i $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Aleshores, $\boldsymbol{u}$ s'anomena solució feble del sistema d'equacions de Navier-Stokes (4.2) amb força $\boldsymbol{f}$ si

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T > - < \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T > = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}] \tag{4.4}$$

per a tot $\boldsymbol{v} \in C^{\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$.

Si $\boldsymbol{u}$ satisfà (4.4) i $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ és una funció tal que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

en el sentit de les distribucions en Ω i p s'anomena pressió associada a $\boldsymbol{u}$. A $(\boldsymbol{u}, p)$ se l'anomena parell solució feble del sistema (4.2).

Nota: veurem que aquesta pressió associada p existeix i, a més a més, és única sota una certa restricció.

4.2 Principi de Leray-Schauder

Per demostrar el teorem d'existència de solucions en dominis acotats utilitzarem el principi de Leray-Schauder, que ens dóna una sèrie d'hipòtesis sobre un operador per tal que existeixi una funció fixa per aquest.

Definició 4.2. Diem que un operador $A : X \to X$ (no necessàriament lineal) és completament continu si A és continu i per a tota successió acotada $(v_j)_j$ a X, la successió $(Av_j)_j$ conté una successió parcial que convergeix a X amb la norma d'aquest espai.

Teorema 4.1 (Principi de Leray-Schauder). *Sigui X un espai de Banach i $A : X \to X$ un operador completament continu. Suposem que existeix un $r > 0$ que compleix la següent propietat:*

$$\text{Si } v \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ v = \lambda Av, \text{ aleshores } \|v\|_X \leq r.$$

Llavors, existeix al menys un $v \in X$ tal que $v = Av$, $\|v\|_X \leq r$.

Aquest resultat, a diferència dels altres, ens assegura que una cota *a priori* implica existència. Per demostrar aquest Teorema, necessitarem provar abans alguns resultats:

Lema 4.1 (Teorema d'aproximació per a operadors completament continus). *Sigui $A : M \subseteq X \to Y$, un operador completament continu, X, Y espais de Banach, i M un subespai, no buit, acotat de X. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeixen operadors continus*

$$A_n : M \to Y$$

tals que

$$\sup_{u \in M} \|Au - A_n u\| \leq \frac{1}{n}, \quad A_n(M) \subseteq \text{co}A(M) \quad i \quad \text{dim}X_n < \infty$$

on $\text{co}A(M)$ és el subespai convex més petit que conté $A(M)$ i X_n és el subespai vectorial generat per $A_n(M)$.

Demostració: Com que A és completament continu, $A(M)$ és relativament compacte, i.e. per a tota successió $(u_n)_n$ acotada a M, $(Au_n)_n$ conté una successió parcial que convergeix a Y. Aleshores, $\forall \varepsilon > 0$ existeixen elements $u_j \in A(M)$, $j = 1, ..., J$, $J < \infty$, tals que

$$\min_{1 \leq j \leq J} \|Au - u_j\| \leq \varepsilon, \quad \forall u \in M \tag{4.5}$$

En efecte, si això no és cert, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que no existeix un nombre finit d'elements de $A(M)$ que satisfaci la condició (4.5). Llavors, podem escollir un element $u_1 \in A(M)$ fix, de tal manera que existeix $u_2 \in A(M)$ tal que

$$\|u_1 - u_2\| > \varepsilon_0$$

De la mateixa manera, existeix $u_3 \in A(M)$ tal que

$$\|u_2 - u_3\| > \varepsilon_0, \quad \|u_1 - u_3\| > \varepsilon_0$$

Procedint en aquesta direcció, podem construir una successió $(u_n)_n$ a $A(M)$ tal que

$$\|u_n - u_m\| > \varepsilon_0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\, n \neq m$$

Per tant, $(u_n)_n$ no és una successió de Cauchy. És a dir, no conté cap successió parcial que convergeixi. Això vol dir que $A(M)$ no pot ser relativament compacte. Hem arribat a un absurd. Així doncs, la construcció anterior existeix i podem agafar $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Definim l'operador de Schauder

$$A_n u := \frac{\sum_{j=1}^{J} a_j(u) u_j}{\sum_{j=1}^{J} a_j(u)}, \quad \forall u \in M$$

on $a_j(u) := \max\{\frac{2}{n} - \|Au - u_j\|, 0\}$, $j = 1, ..., J$.

Observem que la funció $u \mapsto \|Au - u_j\|$ és contínua, ja que A és continu i $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.[7] Per tant, a_j també són contínues. A més a més, donat $u \in M$, les funcions a_j no s'anul·len simultàniament.

En definitiva, A_n és continu i donat $u \in M$

$$\|A_n u - Au\| = \frac{\| \sum_j a_j(u)(u_j - Au)\|}{\sum_j a_j(u)} \leq \frac{\sum_j a_j(u) \|u_j - Au\|}{\sum_j a_j(u)} \leq \frac{1}{n}$$

Observem que donat $v \in A_n(M)$, existeix $u \in M$ tal que

$$v = A_n(u) = \frac{\sum_j a_j(u) u_j}{\sum_j a_j(u)} = \sum_j \alpha_j u_j$$

on $\alpha_j = \dfrac{a_j(u)}{\sum_j a_j(u)}$, $\sum_j \alpha_j = 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, per a $j = 1, ..., J$. Aleshores, $\dim X_n = J < \infty$. Així mateix, $v \in \text{co}A(M)$.

Lema 4.2 (Teorema del punt fix de Schauder)**.** *L'operador completament continu $A : M \to M$ té un punt fix si M és un subespai acotat, tancat, convex i no buit d'un espai de Banach X.*

Demostració: Sigui $u_0 \in M$. Podem suposar $0 \in M$, fent el canvi $u \mapsto u - u_0$, si cal. Pel Teorema d'aproximació per a operadors completament continus (Lema 4.1), $\forall n \in \mathbb{N}$, existeix un subespai $X_n \subseteq X$ de dimensió finita i un operador continu $A_n : M \to X_n$ tal que

$$\|Au - A_n u\| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall u \in M$$

[7] Un operador $A : X \to Y$ és continu si per tot $u \in X$ i $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(u, \varepsilon) > 0$ tal que si $\|u - v\| < \delta$, per tot $v \in X$, aleshores $\|Au - Av\| < \varepsilon$.

Definim $M_n := X_n \cap M$. Com que X_n té dimensió finita i és un subespai d'un espai normat, és tancat (Veure [9] Corol·lari 7, Secció 1.13). Aleshores, M_n és un subespai acotat, tancat i convex de X_n, $0 \in M_n$, i $A_n(M) \subseteq \text{co}A(M) \subseteq M$, ja que M és convex. Es pot veure que $M_n \subseteq X_n$ és compacte al ser acotat, tancat i subespai d'un espai normat de dimensió finita (Veure [9] Corol·lari 8, Secció 1.13).

Aleshores, podem aplicar el Teorema del punt fix de Brouwer, que diu que un operador continu d'un subespai compacte, convex, no buit, d'un espai normat de dimensió finita en ell mateix, té un punt fix. Per tant, $A_n : M_n \to M_n$ té un punt fix. És a dir, $A_n u_n = u_n$, $u_n \in M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i

$$\|Au_n - u_n\| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Com que $M_n \subseteq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la successió $(u_n)_n$ és acotada a M. Llavors, per ser A completament continu, $(Au_n)_n$ conté una successió parcial convergent, $(u_{n'})_{n'}$. Sigui $v = \lim_{n' \to \infty} Au_{n'}$. Aleshores,

$$\|v - u_{n'}\| \leq \|v - Au_{n'}\| + \|Au_{n'} - u_{n'}\| \underset{n' \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

És a dir, $u_{n'} \underset{n' \to \infty}{\longrightarrow} v$. Com que $Au_{n'} \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i M és tancat, $v \in M$. Finalment, com que A és continu, $Av = v$, $v \in M$.

$\square$

Ara sí. Ja estem en disposició de demostrar el Principi de Leray-Schauder.

Demostració: Definim $M := \{u \in X \mid \|u\| \leq 2r\}$ i

$$Bu := \begin{cases} Au, & \text{si } \|Au\| \leq 2r \\ \frac{2rAu}{\|Au\|}, & \text{si } \|Au\| > 2r \end{cases}$$

Llavors, $\|Bu\| \leq 2r$, $\forall u \in X$, és a dir, $B(M) \subseteq M$. Vegem que B és completament continu.

B és continu per la continuïtat de A i donat que $Au = \frac{2rAu}{\|Au\|}$ si $\|Au\| = 2r$.

Sigui $(u_j)_j$ és una successió a M. Considerem dos casos per a una successió parcial $(u_{j'})_{j'}$:

(a) $\|Au_{j'}\| \leq 2r, \quad \forall j'$.

(b) $\|Au_{j'}\| > 2r, \quad \forall j'$.

En el cas (a), com que M és acotat i A és completament continu, existeix una successió parcial $(u_{j''})_{j''}$ de $(u_{j'})_{j'}$ tal que $Bu_{j''} = Au_{j''} \underset{j'' \to \infty}{\longrightarrow} z \in M$.
En el cas (b), per ser A completament continu, podem escollir una successió parcial $(u_{j''})_{j''}$ de $(u_{j'})_{j'}$ tal que

$$\frac{1}{\|Au_{j''}\|} \underset{j'' \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$$

i $Au_{j''} \underset{j'' \to \infty}{\longrightarrow} z$. Llavors, $Bu_{j''} \underset{j'' \to \infty}{\longrightarrow} 2r\alpha z$, és a dir, B és completament continu.

Llavors, pel Teorema del punt fix de Schauder (Lema 4.2), $\exists u \in M$ tal que $Bu = u$. Si $\|Au\| \leq 2r$, $Bu = Au = u$. L'altre cas, $\|Au\| > 2r$, no es pot donar pel que hem suposat a l'enunciat del Teorema: si $u = Bu$, $\|Au\| > 2r$, aleshores

$$u = Bu = tAu, \quad t = \frac{2r}{\|Au\|} < 1$$

Per tant, $\|u\| = |t|\,\|Au\| = 2r$. Això és una contradicció, perquè hem suposat $\|u\| \leq r$.

□

4.3 Terme no lineal $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$

A continuació justificarem les operacions que hem fet per definir una solució feble, demostrant algunes propietats de integrabilitat sobre el terme no lineal.

Proposició 4.1. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un domini qualsevol. Suposem $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Aleshores*

a)

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \in L^3_{loc}(\overline{\Omega})^{n^2}, \quad (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \in L^{3/2}_{loc}(\overline{\Omega})^n, \\ \nabla|\boldsymbol{u}|^2 \in L^{3/2}_{loc}(\overline{\Omega})^n, \quad ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \in L^{6/5}_{loc}(\overline{\Omega}), \end{array} \tag{4.6}$$

i, a més a més,

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}), \quad ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \nabla|\boldsymbol{u}|^2 \tag{4.7}$$

b) Per $\Omega' \subseteq \Omega$ subdomini acotat,

$$\|\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega')} + \|(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}\|_{L^{3/2}(\Omega')} \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.8}$$

i

$$\|((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}\|_{L^{6/5}(\Omega')} \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|^3_{L^2(\Omega)}, \tag{4.9}$$

on $C > 0$.

c) Si $n = 3$, $1 < q \leq 6$, per a $\Omega' \subseteq \Omega$ subdomini acotat,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega')} \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.10}$$

on $C = C(q, \Omega') > 0$.

d) Si Ω és acotat, aleshores

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \in L^3(\Omega)^{n^2}, \quad (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \in L^{3/2}(\Omega)^n, \quad ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \in L^{6/5}(\Omega),$$

i

$$\begin{aligned} < (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} > &= - < \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{u})^T >= \tfrac{1}{2} < \boldsymbol{u}, \nabla|\boldsymbol{u}|^2 > \\ &= -\tfrac{1}{2} < \operatorname{div}(\boldsymbol{u}), |\boldsymbol{u}|^2 >= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

on $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.

Per demostrar aquesta proposició introduirem una desigualtat de Sobolev i un lema sobre les propietats d'embedding de $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

Lema 4.3. *Sigui $r \in [q, nq/(n-q)]$, si $1 \leq q < n$ i $r \in [q, \infty)$, si $n \leq q < \infty$. Aleshores, per a tot $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$\|u\|_r \leq C\|u\|_q^{1-\lambda}\|\nabla u\|_q^\lambda$$

on $C = C(q, n, r)$ i $\lambda = n(r-q)/rq$.

Demostració: [Veure [4], Lema II.3.2]

□

Si considerem $r = nq/(n-q)$ al lema anterior, per a $1 \leq q < n$, obtenim la desigualtat de Sobolev

$$\|u\|_r \leq C\|\nabla u\|_q \tag{4.12}$$

que en principi es satisfà per a $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, però que es pot estendre per completesa a $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Lema 4.4. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un domini qualsevol. Aleshores, per a $q = \frac{2n}{n-2}$ es compleix que*

$$\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)^n, \tag{4.13}$$

i

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega)^n} \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)^{n^2}}, \quad \boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega),$$

amb $C = C(n) > 0$.

Demostració: Només ens cal agafar la desigualtat de Sobolev (4.12) prenent $q = 2$ i reanomenant $r = q = 2n/(n-2)$. Aleshores, $(\boldsymbol{u}_j)_j$ és una successió de Cauchy a $L^q(\Omega)^n$ per a $(\boldsymbol{u}_j)_j \subset \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, i convergeix a una funció $\boldsymbol{u} \in L^q(\Omega)$ que satisfà l'enunciat del lema.

□

Demostració de la Proposició 4.1: Per demostrar la Proposició partirem d'una successió $(\boldsymbol{u}_j)_j$ a $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ tal que $((D\boldsymbol{u}_j)^T)_j$ és una successió de Cauchy a $L^2(\Omega)^{n^2}$, que podem trobar per la definició de $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Tot seguit utilitzarem (4.13) per acotar la norma de les diferents expressions a (4.6) per les normes de les funcions que coneixem bé: $\boldsymbol{u}$ i $(D\boldsymbol{u})^T$, sobre diferents espais de funcions, considerats sempre en un subdomini acotat Ω' de Ω.

Per $n = 3$, aplicant (4.13) amb $q = 6$, obtenim que $\boldsymbol{u} = \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{u}_j \in L^6(\Omega)^3$, i

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)}$$

amb $C > 0$. Aleshores, per a qualsevol subdomini acotat $\Omega' \subseteq \Omega$, utilitzant la desigualtat de Hölder (Proposició 3.1), veiem que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega')} \leq C_1\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega')} \leq C_1 C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)},$$

amb $C_1(q,\Omega')>0$, $1<q\le 6$. Això vol dir que $\boldsymbol{u}\in L^q(\Omega')^3$, per a $1<q\le 6$. Això prova c).

Fent servir de nou la desigualtat de Hölder obtenim

$$\|\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega')}\le C_1\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^6(\Omega')}\le C_2\|(D\boldsymbol{u})^T\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\|_{L^{3/2}(\Omega')}=\|\boldsymbol{u}\cdot(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^{3/2}(\Omega')} &\le C_1\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega')}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C_2\|(D\boldsymbol{u})^T\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\|((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^{6/5}(\Omega')} &=\|(\boldsymbol{u}\cdot(D\boldsymbol{u})^T)\cdot\boldsymbol{u}\|_{L^{6/5}(\Omega')}\\ &\le C_1\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega')}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega')}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega')}\\ &\le C_2\|(D\boldsymbol{u})^T\|^3_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{4.16}$$

per a $C_1>0$, $C_2>0$. Aleshores,

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}=\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{u}_j\otimes\boldsymbol{u}\in L^3(\Omega'),$$

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{u}_j\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\in L^{3/2}(\Omega'),$$

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}=\lim_{j\to\infty}((\boldsymbol{u}_j\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\in L^{6/5}(\Omega')$$

Amb això la primera part de d) queda demostrada.

A més a més, com que $\boldsymbol{u}\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_j\otimes\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}_j\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$, com ja hem vist anteriorment. Llavors, al passar al límit $j\to\infty$, tenim les següents igualtats

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}),\quad ((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}\cdot\nabla|\boldsymbol{u}|^2 \tag{4.17}$$

on la segona igualtat es pot comprovar fàcilment.

Per tant, com que $\Omega'\subsetneq\Omega$ és un subdomini acotat i arbitrari, obtenim, per la definició de $L^q_{loc}(\overline{\Omega})$, les propietats de l'apartat a). Així mateix, b) queda demostrat fent servir (4.14), (4.15) i (4.16). L'únic que ens falta és veure la segona part de d). Per la definició de $\boldsymbol{u}_j$ tenim que $\sup(\boldsymbol{u}_j)\subseteq\Omega$ i $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_j)=0$, aleshores

$$\begin{aligned}<(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}> &=<\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}>=\lim_{j\to\infty}<\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}_j>\\ &=-\lim_{j\to\infty}<\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u},(D\boldsymbol{u}_j)^T>=-<\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u},(D\boldsymbol{u})^T>\end{aligned}$$

i, per altra banda, fent servir la igualtat (4.17)

$$\begin{aligned}<(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}> &=\frac{1}{2}<\boldsymbol{u},\nabla|\boldsymbol{u}|^2>=\frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}<\boldsymbol{u}_j,\nabla|\boldsymbol{u}|^2>\\ &=-\frac{1}{2}\lim_{j\to\infty}<\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_j),|\boldsymbol{u}|^2>=0\end{aligned}$$

□

4.4 Pressió associada p

Ja hem vist que a l'hora de tractar el sistema de Navier-Stokes de forma distribucional el terme corresponent a la pressió s'anul·la. Això ens porta a haver de definir la pressió (o millor dit ∇p) com a distribució en termes de la resta de termes. Vegem-ho:

Proposició 4.2. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ qualsevol subdomini. Sigui $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \mathrm{div}(F)$ amb $\boldsymbol{f}_0 \in L^2_{loc}(\Omega)^3$, $F \in L^2(\Omega)^9$. Sigui $\Omega_0 \subseteq \Omega$ un subdomini acotat tal que $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$, $\Omega_0 \neq \emptyset$.*

Suposem que $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ és una solució feble del sistema de Navier-Stokes (4.2) amb força $\boldsymbol{f}$. Aleshores, existeix un única $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ satisfent

$$\int_{\Omega_0} p\, dx = 0$$

tal que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

se satisfà en sentit distribucional. És a dir, $(\boldsymbol{u}, p)$ és un parell solució feble de (4.2).

Per demostrar aquesta proposició necessitarem de nou alguns resultats.

Lema 4.5 (Desigualtat de Poincaré)**.** *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un domini acotat qualsevol, i sigui $1 < q < \infty$. Aleshores, per a tot $u \in W^{1,q}_0(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)^n}$$

on $C = C(q, \Omega) > 0$.

Demostració: Denotem $d = d(\Omega) := \sup_{x,y\in\Omega}|x-y|$ el diàmetre de Ω. Considerem $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$. Sense perdre generalitat podem suposar que Ω està contingut entre els hiperplans $x_n = c$, $x_n = 0$ i $d = |x_n| = c$, amb $x = (x', x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$. Aleshores,

$$\phi(x) = \int_0^{x_n} \frac{d}{dz}\phi(x', z)dz$$

i podem utilitzar la desigualtat de Hölder (Proposició 3.1) per $r = 1$ amb $u = \frac{d}{dz}\phi$ i $v = 1$, per acotar la norma sobre $L^q(\Omega)$

$$\|\phi\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^c |\phi(x)|^q dx_n$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^c dx_n \left(\int_0^{x_n} dz'\right)^{q-1} \int_0^{x_n} |\frac{d}{dz}\phi(x', z)|^q dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^c x_n^{q-1} dx_n \int_0^c |\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x', z)|^q dz \leq \frac{c^q}{q}\|\nabla\phi\|^q_{L^q(\Omega)^n}$$

Si recordem que $W^{1,q}_0(\Omega) = \overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,q}}$, per completesa obtenim que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)^n}$$

per a $C = C(q, \Omega) > 0$.

$\square$

Observació: Aquesta desigualtat és també vàlida per a camps vectorials, ja que

$$\|\boldsymbol{u}\|_q \leq \left(\sum_i \|u_i\|_q^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_i C^q \|\nabla u_i\|_q^q\right)^{1/q} = C\left(\sum_{i,j} \|\partial_j u_i\|_q^q\right)^{1/q} = C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_q$$

Per demostrar l'existència de solucions de les equacions de Navier-Sokes, ens restringirem al cas en que la força externa és de la forma $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$, on F és una matriu, com a [7]. Aleshores, necessitarem condicions sobre $\boldsymbol{f}$ per tal d'assegurar que la representació anterior existeix.

Lema 4.6. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un domini acotat qualsevol, $n \geq 2$. Si $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)^n$, aleshores existeix al menys una matriu $F \in L^2(\Omega)^{n^2}$ tal que $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$ en sentit distribucional, i*

$$\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,2}(\Omega)^n} \leq \|F\|_{L^2(\Omega)^{n^2}} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{W^{-1,2}(\Omega)^n}$$

per a $C(\Omega) > 0$.

Demostració: Considerem el subespai

$$D := \{(D\boldsymbol{v})^T \in L^2(\Omega)^{n^2} | \boldsymbol{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^n\} \subseteq L^2(\Omega)^{n^2}$$

i definim el funcional

$$\tilde{f} : (D\boldsymbol{v})^T \mapsto [\tilde{f}, (D\boldsymbol{v})^T], \quad (D\boldsymbol{v})^T \in D$$

com $[\tilde{f}, (D\boldsymbol{v})^T] := [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]$ per a tot $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^n$. Aleshores, fem servir la desigualtat de Poincaré (Lema 4.5) per obtenir

$$|[\tilde{f}, (D\boldsymbol{v})^T]| = |[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]| \leq \|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}\|\boldsymbol{v}\|_{1,2} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$$

per a $C(\Omega) > 0$, per a tot $(D\boldsymbol{v})^T \in D$. Per tant, $\tilde{f}$ és un funcional continu definit sobre D, i pel Teorema de Hahn-Banach (Teorema 3.1), podem estendre'l a $L^2(\Omega)^{n^2}$ amb la mateixa norma. A continuació, pel Teorema de representació de Riesz (Teorema 3.2) obtenim una matriu $F \in L^2(\Omega)^{n^2}$ tal que

$$< F, (D\boldsymbol{v})^T >= \int_\Omega F : (D\boldsymbol{v})^T \, dx = [\tilde{f}, (D\boldsymbol{v})^T]$$

És a dir, F és una distribució associada al funcional $\tilde{f}$. A més a més,

$$\|F\|_{L^2(\Omega)^{n^2}} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2}$$

Per altra banda,

$$|[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]| = |[\tilde{f}, (D\boldsymbol{v})^T]| = |[F, (D\boldsymbol{v})^T]| \leq \|F\|_2\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 \leq \|F\|_2(\|\boldsymbol{v}\|_2^2 + \|(D\boldsymbol{v})^T\|_2^2)^{1/2}$$

per a tot $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^n$, la qual cosa implica que

$$\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2} := \sup_{0 \neq \boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n} |[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]| / \|\boldsymbol{v}\|_{1,2} \leq \|F\|_2$$

Amb això queda demostrada la segona part del lema. Per últim, si $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n$

$$< F, (D\boldsymbol{v})^T >= \sum_{i,j=1}^{n} < F_{ij}, \partial_i v_j >= -\sum_{i,j=1}^{n} < \partial_i F_{ij}, v_j >$$

$$= -[\mathrm{div} F, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}]$$

i obtenim una representació per a $\boldsymbol{f}$ com la que buscàvem canviant F per $-F$, i.e. $\mathrm{div} F = \boldsymbol{f}$.

□

Introduirem també un mètode anomenat *mollification method*, o mètode regularitzador, que ens permetrà aproximar funcions de L^q per funcions C^∞ mitjançant el producte de convolució $*$.

Definim llavors un *mollifier* o regularitzador com una funció $\mathcal{F} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ no negativa amb les següents propietats:

i) $\mathcal{F}(x) = 0$ si $|x| \geq 1$,

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\, dx = 1$,

iii) $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Aleshores, si $\varepsilon > 0$, la funció $\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\mathcal{F}(x/\varepsilon)$ és no negativa, pertany a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ i satisfà:

i) $\mathcal{F}_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$,

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\varepsilon\, dx = 1$,

iii) $\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \mathcal{F}_\varepsilon(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

La primera i la tercera propietat són evidents i la segona ve del fet que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\varepsilon\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\mathcal{F}(x/\varepsilon)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(y)\, dy = 1$$

on hem fet el canvi $y = x/\varepsilon$ ($dy = \varepsilon^{-n}dx$). Llavors, una regularització de u es defineix com el producte de convolució

$$(\mathcal{F}_\varepsilon * u)(x) = \int \mathcal{F}_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy$$

Vegem dos resultats sobre aquest mètode:

Lema 4.7. *Sigui u una funció definida a $\mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = 0$, si $x \notin \Omega$. Aleshores* *a)* *Si* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) *Si* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *i* $\sup(u) \subseteq \Omega$, $\mathcal{F}_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ *donat* $\varepsilon < \mathrm{dist}(\sup(u), \partial\Omega)$.

$(\mathrm{dist}(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} |x-y|)$

Demostració: Com que $\mathcal{F}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, s'anul·la per a $|x| > \varepsilon$ i per a qualsevol multiíndex α tenim

$$D^\alpha(\mathcal{F}_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha \mathcal{F}_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy,$$

es compleixen directament *a)* i *b)*.

$\square$

Lema 4.8. *Sigui* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *un domini qualsevol, i sigui* $1 \leq q < \infty$, $\varepsilon > 0$. *Llavors, per a tot* $u \in L^q(\Omega)$

$$\|(\mathcal{F}_\varepsilon * u)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

i

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathcal{F}_\varepsilon * u) = u$$

respecte de la norma $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostració: Per definició

$$u^\varepsilon(x) := (\mathcal{F}_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(z)u(z-\varepsilon x)dz$$

Llavors, si $u \in L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, fent servir la desigualtat de Hölder (Proposició 3.1) i el teorema de Fubini

$$\|u^\varepsilon\|_q = \left(\int_\Omega \left|\int_{|z|\leq 1} \mathcal{F}(z)^{1/q'}\mathcal{F}(z)^{1/q}u(x-\varepsilon z)dz\right|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_\Omega \left|\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)dz\right)^{1/q'}\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)|u(x-\varepsilon z)|^q dz\right)^{1/q}\right|^q dx\right)^{1/q}$$

$$= \left(\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)dz\right)^{q/q'}\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)\left(\int_\Omega |u(x-\varepsilon z)|^q dx\right)dz\right)\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)dz\right)^{1/q'}\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)\left(\int_\Omega |u(x-\varepsilon z)|^q dx\right)dz\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)dz\right)^{1/q'}\left(\int_{|z|\leq 1}\mathcal{F}(z)dz\right)^{1/q}\|u\|_q = \|u\|_q$$

Aleshores, l'operador

$$\mathcal{F}_\varepsilon * : u \mapsto \mathcal{F}_\varepsilon * u, \quad u \in L^q(\Omega)$$

és acotat, amb norma $\|\mathcal{F}_\varepsilon * \|_q \leq 1$, $\varepsilon > 0$. Fent servir la clausura $L^q(\Omega) =: W^{0,q}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_q}$ i el fet que si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, llavors

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(u^\varepsilon(x) - u(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(z)(u(x - \varepsilon z) - u(x))dz = 0$$

És a dir, si agafem una successió a $C_0^\infty(\Omega)$ que convergeixi cap a u en la norma $\|\cdot\|_p$ i tenim en compte que la norma de $\mathcal{F}_\varepsilon *$ està acotada, obtenim que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathcal{F}_\varepsilon * u - u\|_p = \lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - u\|_p = 0$$

la qual cosa demostra el lema.

$\square$

Lema 4.9. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un domini arbitrari, i sigui $\Omega_0 \subseteq \Omega$ un subdomini acotat tal que $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$, $\Omega_0 \neq \emptyset$. Si $\boldsymbol{f} \in W_{loc}^{-1,2}(\Omega)^n$ satisfà*

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}] = 0 \quad \textit{per tot} \quad \boldsymbol{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega),$$

aleshores existeix una única $p \in L_{loc}^2(\Omega)$ que satisfà $\nabla p = \boldsymbol{f}$ en sentit distribucional i

$$\int_{\Omega_0} p\, dx = 0$$

Demostració: Per provar aquest lema el que farem serà veure que per a tot subdomini Lipschitz acotat $\Omega_1 \subseteq \Omega$ amb $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega$, existeix una única $p \in L^2(\Omega_1)$ amb $\nabla p = \boldsymbol{f}$ en sentit distribucional a Ω_1, i $\int_{\Omega_0} p\, dx = 0$.

Això és equivalent perquè podem contruir una successió de subdominis Lipschitz acotats, $(\Omega_j)_j$, de Ω tal que $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$, com ara provarem. Aleshores, veurem que podem estendre p a una funció sobre Ω que satisfaci les condicions del lema.

Vegem que és possible construir la successió de subdominis de Ω. Fixem $x_0 \in \Omega$ i considerem $\tilde{\Omega}$ el domini més gran tal que $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega \cap B_1(x_0)$, on $B_1(x_0)$ representa la bola de radi 1 i centre x_0. Llavors, $\partial\tilde{\Omega}$ és compacte (és tancat i acotat) i podem escollir un recobriment per boles B_ε de $\partial\tilde{\Omega}$ del qual podem extreure un de finit. Així doncs tindrem

$$\partial\tilde{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j)$$

per a $x_j \in \partial\tilde{\Omega}$. Definim ara $\hat{\Omega} := \tilde{\Omega} \backslash \bigcup_{j=1}^m \overline{B}_\varepsilon(x_j)$ i escollim $0 < \varepsilon < 1$ de tal manera que $x_0 \in \hat{\Omega}$. Observem que $\hat{\Omega}$ és un domini Lipschitz acotat, ja que la seva frontera no és més que parts de les fronteres de les boles. Llavors, definim $\Omega_1 := \hat{\Omega}$ i $\varepsilon_1 := \varepsilon$. A continuació, construïm $\tilde{\Omega}$ de la mateixa manera: el domini més gran tal que $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega \cap B_2(x_0)$ i agafem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\varepsilon < \frac{1}{2}\text{dist}(\partial\tilde{\Omega}, \Omega_1)$. Llavors, definim $\Omega_2 := \hat{\Omega}$ i $\varepsilon_2 := \varepsilon$, i obtenim $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ i $\text{dist}(\partial\Omega_2, \Omega_1) > \epsilon_2$.

Iterant el procés podem construir una successió $(\Omega_j)_j$ de dominis Lipschitz acotats, i si $x \in \Omega$, podem escollir un $j_0 \in \mathbb{N}$ i un subdomini $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tal que $x \in \Omega_0 \subseteq$

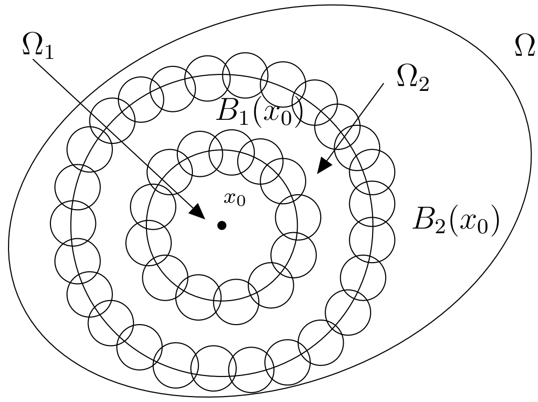

Figura 1: Esquema de la construcció dels dominis Ω_j.

$\Omega \cap B_{j_0}(x_0)$, $x_0 \in \Omega_0$. Aleshores, si $d := \text{dist}(\partial\Omega_0, x)$ i escollim $j_1 > j_0$ amb $\varepsilon_{j_1} < d$, tenim que $x \in \Omega_{j_1}$. Per tant, hem vist que Ω es pot expressar com a unió de dominis Lipschitz acotats (per definció, $\Omega_j \subseteq \Omega\ \forall j$).

Tornant a la demostració del Lema, fem servir la construcció anterior i prenem un altre domini Lipschitz acotat Ω_2 tal que $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_2$, $\overline{\Omega}_2 \subseteq \Omega$. De l'enunciat, tenim $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}_{loc}(\Omega)^n$. Per tant, $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega_2)^n$, i com que Ω_2 és acotat, pel Lema 4.6 podem trobar una representació d'aquesta funció de la forma

$$\boldsymbol{f} = \text{div}(F), \quad F \in L^2(\Omega_2)^{n^2}$$

Fent servir el mètode de regularització (4.7) que hem introduït més amunt, definim $F^\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon * F$ per a $0 < \varepsilon < \text{dist}(\partial\Omega_2, \Omega_1)$, amb el regulador definit a Ω_2. Aleshores, $F^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)^{n^2}$.

El que volem veure ara és que existeix una funció $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ tal que $\text{div}(F^\varepsilon) = \nabla U_\varepsilon$. Aquesta funció serà la que associarem a la pressió p a Ω_1.
Per provar això farem servir que si la integral d'un camp vectorial $\boldsymbol{v}$ sobre qualsevol corba tancada a $\overline{\Omega}_1$ és zero, aleshores $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$. És a dir, hem de veure que $\text{div}(F^\varepsilon)$ és un camp conservatiu. Això és equivalent a veure que

$$\int_0^1 (\text{div} F^\varepsilon)(\omega(\tau)) \cdot \omega'(\tau) d\tau = 0 \tag{4.18}$$

on $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_n(\tau))$, $0 \leq \tau \leq 1$, és una corba tancada ($\omega(0) = \omega(1)$) a $\overline{\Omega}_1$.

Per demostrar (4.18) definim

$$V_{\omega,\varepsilon}(x) := \int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x - \omega(\tau))\omega'(\tau) d\tau, \quad x \in \Omega_2,$$

que implica $V_{\omega,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_2)^n$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} V_{\omega,\varepsilon}(x) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n (\partial_j \mathcal{F}_\varepsilon)(x-\omega(\tau))\omega_j'(\tau)d\tau \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{d\tau}\mathcal{F}_\varepsilon(x-\omega(\tau))d\tau \\
&= \mathcal{F}_\varepsilon(x-\omega(0)) - \mathcal{F}_\varepsilon(x-\omega(1)) = 0
\end{aligned}$$

per a una corba tancada ω a $\overline{\Omega}_1$. Llavors, $V_{\omega,\varepsilon} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega_2)^n$, i fent servir que $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}] = 0$ per a tot $\boldsymbol{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ per hipòtesi, i el teorema de Fubini, obtenim

$$\begin{aligned}
0 &= [\boldsymbol{f}, V_{\boldsymbol{\omega},\varepsilon}] = [\mathrm{div} F, V_{\omega,\varepsilon}] \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_2} \partial_i F_{ij}(x) \left(\int_0^1 \mathcal{F}_\varepsilon(x-\omega(\tau))\omega_j'(\tau)d\tau \right) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_2} \mathcal{F}_\varepsilon(x-\omega(\tau))\partial_i F_{ij}(x)dx \right) \omega_j'(\tau)d\tau \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_2} \mathcal{F}_\varepsilon(\omega(\tau)-x)F_{ij}(x)dS_j \right) \omega_j'(\tau)d\tau \\
&+ \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_2} (\partial_i \mathcal{F}_\varepsilon)(\omega(\tau)-x)F_{ij}(x)dx \right) \omega_j'(\tau)d\tau \\
&= \int_0^1 \mathrm{div}(F^\varepsilon)(\omega(\tau)) \cdot \omega'(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

on el terme de la quarta línia és zero ja que $\omega \subset \overline{\Omega}_1$, $x \in \partial\Omega_2$ i $|x-\omega(\tau)| > \varepsilon$. Amb això hem provat (4.18). Llavors, existeix $U_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ determinada excepte per una constant. Escollint aquesta costant de manera apropiada podem aconseguir $\int_{\Omega_0} U_\varepsilon dx = 0$.

Ara estem en disposició d'utilitzar el següent lema:

Lema 4.10. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domini Lipschitz acotat. Sigui $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\Omega_0 \neq \emptyset$, un subdomini qualsevol, i $1 < q < \infty$. Aleshores*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{W^{-1,q}(\Omega)^n} \leq C_1 C_2 \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

per a tot $u \in L^q(\Omega)$ satisfent

$$\int_{\Omega_0} u\, dx = 0$$

on $C_1(q, \Omega, \Omega_0) > 0$ i $C_2(n) > 0$ són constants.

Demostració: [[7],Lema 1.5.4, II]

Llavors, fent servir el lema per a $q = 2$,

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\nabla U_\varepsilon\|_{W^{-1,2}(\Omega_1)^3} &= C \sup_{0 \neq \boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega_1)^3} |[\nabla U_\varepsilon, \boldsymbol{v}]| / \|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 \\
&= C \sup_{0 \neq \boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega_1)^3} | < F^\varepsilon, (D\boldsymbol{v})^T > | / \|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 \leq C \|F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

on $C(q, \Omega_0, \Omega_1) > 0$.
Amb aquesta cota podem veure que existeix $U \in L^2(\Omega_1)$ satisfent

$$\int_{\Omega_0} U\,dx = 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|U - U_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)} = 0, \quad \boldsymbol{f} = \mathrm{div} F = \nabla U$$

a Ω_1. Això ho podem provar fent servir el Lema 4.8 que implica que $\|F - F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1)} \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Llavors, si agafem $0 < \eta < \varepsilon$, i $U_\varepsilon - U_\eta$ i $F^\varepsilon - F^\eta$ en comptes de U_ε i F^ε a la desigualtat anterior, obtenim que U_ε convergeix cap a una funció U en la norma $L^2(\Omega_1)$ que satisfà el que hem enunciat més amunt.

Finalment, si considerem tots el dominis Lipschitz Ω_j construïts anteriorment amb $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega_j$ i que satisfan tot el que hem fet fins ara, donat un domini acotat $\Omega' \subseteq \Omega$ amb $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$, sempre existirà un domini Lipschitz Ω_j que contingui Ω'. Llavors, definint p com U a cada domini Lipschitz Ω_j, tenim que $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ i $\boldsymbol{f} = \nabla p$ sobre tot Ω. A més a més, $\int_{\Omega_0} p\,dx = 0$.

□

Demostració de la Proposició 4.2: Sigui $G : \boldsymbol{v} \mapsto [G, \boldsymbol{v}]$, $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega)^3$, el funcional definit per

$$\begin{aligned}[G, \boldsymbol{v}] &:= [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}] - [(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + [\nu \Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \\ &= < \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{v} > - < F, (D\boldsymbol{v})^T > + < \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T > - \nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >\end{aligned}$$

Sigui $\Omega' \subseteq \Omega$ un domini acotat amb $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$, i sigui $C_1(\Omega') > 0$ la constant de la desigualtat de Poincaré (4.5). Per (4.8), tenim

$$\|\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega')} \leq C_2 \|(D\boldsymbol{u})^T\|^2_{L^2(\Omega)}$$

on $C_2(\Omega') > 0$. Llavors,

$$|[G, \boldsymbol{v}]| \leq \left(C_1 \|\boldsymbol{f}_0\|_{2,\Omega'} + \|F\|_{2,\Omega} + C_2 \|(D\boldsymbol{u})^T\|_{2,\Omega} + \nu \|(D\boldsymbol{u})^T\|_{2,\Omega} \right) \|(D\boldsymbol{v})^T\|_{2,\Omega'}$$

per a $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega')^3$. Això ens dóna $G \in W^{-1,2}_{loc}(\Omega)^3$. A més a més, $[G, \boldsymbol{v}] = 0$ per a tota $\boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$, per la definició de funció feble. Aleshores, podem aplicar el Lema 4.9 per obtenir una única $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ amb $G = \nabla p$, que satisfà l'enunciat de la proposició. Per tant, $(\boldsymbol{u}, p)$ és un parell solució feble del sistema de Navier-Stokes estacionari.

□

4.5 L'operador de Stokes

L'operador de Stokes A serà la base per demostrar l'existència de solucions del sistema de Navier-Stokes (4.2).

Per definir aquest operador en un domini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ necessitarem els espais de Hilbert

$$L^2_\sigma(\Omega) := \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\cdot\|_2}$$

i

$$W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) := \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}} \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$$

amb els seus productes escalars corresponents que ja vam comentar al capítol 3.

Definim l'operador $A : D(A) \to L^2_\sigma(\Omega)$ amb domini $D(A) \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$ i imatge $R(A) = \{A\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u} \in D(A)\}$, com aquell tal que $D(A) \subseteq W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ és l'espai de tots els $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ pels quals existeix $\boldsymbol{f} \in L^2_\sigma(\Omega)$ satisfent

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >=< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >, \quad \boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$$

Definició 4.3. Definim l'operador de Stokes A mitjançant la relació

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >=< A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >, \quad \boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$$

per a tot $\boldsymbol{u} \in D(A)$. Aleshores, $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$.

Definició 4.4. Un altre operador que necessitarem serà la projecció de Helmholtz,

$$P : L^2(\Omega)^3 \to L^2_\sigma(\Omega)$$

definida com $P\boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}_0$, on $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \nabla p$. Aquesta definició està motivada per la descomposició de Helmholtz de manera única de $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$ com $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \nabla p$.

Aquesta descomposició ens dóna el Lema 2.5.1, II a [7], que no demostrarem:

Lema 4.11. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domini qualsevol. Llavors,*

$$G(\Omega) = \{\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^n \,|\, < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >= 0 \text{ per a to } \boldsymbol{v} \in L^2_\sigma(\Omega)\},$$

i cada $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^n$ té una única descomposició $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \nabla p$, amb $\boldsymbol{f}_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$, $\nabla p \in G(\Omega)$, $< \boldsymbol{f}_0, \nabla p >= 0$, $\|\boldsymbol{f}\|_2^2 = \|\boldsymbol{f}_0\|_2^2 + \|\nabla p\|_2^2$.

Abans d'avançar, hem de presentar algunes definicions per operadors:

Definició 4.5. Un operador $B : X \to Y$, on X, Y són espais de Banach, s'anomena tancat si la seva gràfica $G(B) = \{(v, Bv)\}$ és tancada sobre $X \times Y$ respecte a la norma $\|v\|_X + \|w\|_Y$, $(v, w) \in X \times Y$.

Definició 4.6. Si B és lineal i completament continu (Definició 4.2), es diu que és compacte.

Definició 4.7. Definim la completació $\widehat{D}(B)$ de $D(B)$ com el conjunt de les classes d'equivalència de successions de Cauchy $(v_j)_j$ a $D(B)$ respecte a la norma de Y.

Definició 4.8. Sigui $B : H \to H$ un operador tancat sobre un espai de Hilbert, H. Aleshores, el dual o adjunt de B, B', es defineix mitjançant l'expressió

$$< u, Bv >=< B'u, v >, \text{ per a tot } v \in D(B),\ u \in D(B')$$

Si $B = B'$, l'operador s'anomena autoadjunt. A més a més, es diu que un operador autoadjunt B és positiu si $< v, Bv > \geq 0$ per a tot $v \in D(B)$.

A continuació, definim els operadors arrel de l'operador de Stokes i el seu invers, $A^{\frac{1}{2}}$ i $A^{-\frac{1}{2}}$, respectivament (podem veure com es defineixen a [7], Secció 3.2, II, a partir del que s'anomena la representació espectral). El que sí veurem és que satisfan les següents propietats, per a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$:

a) Per a tot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, per la definició de A i d'operador autoadjunt,

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >=< A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >=< A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >=< A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} > \quad (4.19)$$

Per tant, $\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2$. Aquesta última igualtat i el fet que $A^{\frac{1}{2}}$ és autoadjunt ens dóna una equivalència entre la norma $\|\boldsymbol{u}\|_2 + \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2$ i la norma a $W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Llavors, $D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

b) $A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u} = 0$ si, i només si, $(D\boldsymbol{u})^T = 0$, per (4.19). Aleshores, com que $\boldsymbol{u}$ pertany a $L^2_\sigma(\Omega)$, el seu suport és compacte i, si és constant, ha de ser igual a zero. Per tant, el nucli de $A^{\frac{1}{2}}$, $N(A^{\frac{1}{2}}) = \{0\}$. Així doncs, l'operador invers $A^{-\frac{1}{2}}$ existeix i $D(A^{-\frac{1}{2}}) = R(A^{\frac{1}{2}})$.

c) Si Ω és acotat, podem utilitzar la desigualtat de Poincaré (4.5), amb constant C, i la igualtat de l'apartat a), obtenim

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 \leq C\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2 = C\nu^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2, \quad \boldsymbol{u} \in D(A^{\frac{1}{2}})$$

i posant $\boldsymbol{f} = A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}$, ens queda $\|A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{f}\|_2 \leq C\nu^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}\|_2$ per a tot $\boldsymbol{f} \in R(A^{\frac{1}{2}})$. Com que $D(A^{-\frac{1}{2}}) = R(A^{\frac{1}{2}}) \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$ és dens $(\overline{D(A^{-\frac{1}{2}})}^{\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2} = L^2_\sigma(\Omega))$ i l'operador $A^{-\frac{1}{2}}$ és tancat, podem concloure que

$$D(A^{-\frac{1}{2}}) = R(A^{\frac{1}{2}}) = L^2_\sigma(\Omega) \quad (4.20)$$

A continuació enunciarem un resultat per acotar la norma d'una funció $\boldsymbol{u} \in L^q(\Omega)^n$ per la norma a $R(A^{\frac{1}{2}})$:

Lema 4.12. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un domini qualsevol. Sigui $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $2 \leq q < \infty$ tal que*

$$2\alpha + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}$$

i sigui A l'operador de Stokes. Llavors, $\boldsymbol{u} \in D(A^\alpha)$ implica $\boldsymbol{u} \in L^q(\Omega)^n$ i

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega)^n} \leq C\nu^{-\alpha}\|A^\alpha \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^n}$$

on $C(\alpha, q) > 0$.

Demostració: [[7], Lemma 2.4.2, III]

Així mateix, necessitarem identificar els elements de la completació de $D(A^{\frac{1}{2}})$, $\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}})$. Comencem per definir la norma sobre aquests espais, recordant que $D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) = \overline{C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$,

$$\|\boldsymbol{u}\|_{D(A^{\frac{1}{2}})} := (\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} = (\|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \nu\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

per (4.19), i
$$\|\boldsymbol{u}\|_{\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}})} := \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2$$

Observem que, amb aquestes normes, $D(A^{\frac{1}{2}})$ està contingut en $\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}})$. Llavors, com que $D(A^{\frac{1}{2}})$ és complet i un espai de Hilbert, podem definir

$$\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}}) := \overline{D(A^{\frac{1}{2}})}^{\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2}$$

és a dir, $D(A^{\frac{1}{2}})$ és dens a $\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}})$. Aleshores, podem estendre l'operador $A^{\frac{1}{2}}$: $D(A^{\frac{1}{2}}) \to L^2_\sigma(\Omega)$ a $\widehat{D}(A^{\frac{1}{2}})$, agafant $A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u} = \lim_{j\to\infty} A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j \in L^2_\sigma(\Omega)$, on $(\boldsymbol{u}_j)_j$ és una successió de Cauchy en la norma $\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2$ amb límit $\boldsymbol{u} \in \widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$.

Anàlogament, per a l'operador invers $A^{-\frac{1}{2}}$ podem definir

$$\widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}}) := \overline{D(A^{-\frac{1}{2}})}^{\|A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2}, \quad \|\boldsymbol{u}\|_{\widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})} := \|A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2, \quad A^{-\frac{1}{2}} : \widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}}) \to L^2_\sigma(\Omega)$$

Llavors, l'espai $\widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$ es pot identificar amb l'espai dels funcionals $[\boldsymbol{u},\cdot] : \boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$, $\boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$, continus respecte a la norma $\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$. En efecte, per a cada $\boldsymbol{u} \in \widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$ considerem $\boldsymbol{u} = \lim_{j\to\infty}\boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{u}_j \in D(A^{-\frac{1}{2}})$, tal que $(A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j)_j$ és una successió de Cauchy a $L^2_\sigma(\Omega)$, i obtenim

$$|[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]| = |\lim_{j\to\infty}[\boldsymbol{u}_j,\boldsymbol{v}]| = |\lim_{j\to\infty} < A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} > |$$

$$\le \|\lim_{j\to\infty} A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j\|_2\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|\lim_{j\to\infty} A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j\|_2\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$$

per a $\boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$. És a dir, el funcional $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ és continu en la norma $\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$. Llavors, si denotem $A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u} = \lim_{j\to\infty} A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j$, el funcional anterior es pot identificar amb

$$\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = \lim_{j\to\infty} < A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} > = < A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} > \tag{4.21}$$

Recíprocament, per cada $\boldsymbol{u} \in \widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$, la imatge $A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u} \in L^2_\sigma(\Omega)$ ve determinada de manera única pel teorema de respresentació de Riesz (Teorema 3.2), que ens dóna una única $\widehat{\boldsymbol{u}} \in L^2_\sigma(\Omega)$ tal que

$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = < \widehat{\boldsymbol{u}}, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} >, \quad \boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$$

Aleshores, com que $R(A^{-\frac{1}{2}}) = D(A^{\frac{1}{2}}) \subseteq L^2_\sigma(\Omega)$ és dens, podem trobar una successió $(\boldsymbol{u}_j)_j$ a $D(A^{-\frac{1}{2}})$ tal que
$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \lim_{j\to\infty} A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}_j$$

És a dir, al passar a la completació respecte a la norma $\|A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2$, podem identificar $\boldsymbol{u}$ amb la successió de Cauchy $(\boldsymbol{u}_j)_j$, i obtenir $\widehat{\boldsymbol{u}} = A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}$. Per tant, es compleix que
$$[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = < A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} >, \quad \boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega) \tag{4.22}$$

Amb els operadors que hem definit fins ara podem construir $A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}$, que ens apareixerà quan demostrem l'existència de solucions febles. On $A^{-\frac{1}{2}}$ és l'operador estés sobre la completació $\widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$, i P és l'extensió del projector de Helmholtz de $C_0^\infty(\Omega)'$ en $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)'$: $P\boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}|_{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)'}$, $\boldsymbol{f} \in C_0^\infty(\Omega)'$. Observem que si $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$, recuperem el projector de Helmholtz original (4.4).

El següent lema ens caracteritzarà aquest operador de $L^2(\Omega)^9$ a $L^2_\sigma(\Omega)$, i veurem que està ben definit en sentit distribucional:

Lema 4.13. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domini qualsevol, i sigui $F \in L^2(\Omega)^9$. Aleshores, el funcional*

$$P\,\mathrm{div}F : \boldsymbol{v} \mapsto [P\,\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}] = [\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}] = -<F, (D\boldsymbol{v})^T>, \quad \boldsymbol{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$$

pertany a $\widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$, i

$$A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F \in L^2_\sigma(\Omega)$$

en el sentit estés està determinat de manera única per

$$[\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}] = -<F, (D\boldsymbol{v})^T> = <A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}>, \quad \boldsymbol{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$$

Demostració: Per a $F \in L^2(\Omega)^9$, $\boldsymbol{v} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, fent servir la desigualtat de Hölder (Proposició 3.1) i (4.19),

$$|[\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}]| = |[P\,\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}]| = |<F, (D\boldsymbol{v})^T>| \leq \|F\|_2\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 = \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}\|_2$$

Aleshores, el funcional $\boldsymbol{v} \mapsto [\mathrm{div}F, \boldsymbol{v}]$ és continu en $\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$, i per (4.21), $P\,\mathrm{div}F \in \widehat{D}(A^{-\frac{1}{2}})$. A més a més, $A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F \in L^2_\sigma(\Omega)$ ve determinat unívocament per (4.22). □

Observació: De l'última equació, prenent $\boldsymbol{v} = A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}$, podem obtenir

$$|<P\,\mathrm{div}F, A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}>| = |<F, (D\boldsymbol{v})^T>| \leq \|F\|_2\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 \leq \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2\|\boldsymbol{w}\|_2$$

fent servir que $\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2$. És a dir,

$$\|A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F\|_2 \leq \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2 \tag{4.23}$$

4.6 Existència de solucions febles en dominis acotats

A continuació demostrarem l'existència de solucions febles en dominis acotats del sistema de Navier-Stokes estacionari (4.2) considerant només forces de la forma $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$, per a $F \in L^2(\Omega)^9$. Recordem que el Lema 4.6 ens donava la condició suficient $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)^3$ per que fos possible obtenir aquesta representació.

Per fer això, necessitarem dos resultats extra:

Lema 4.14. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un domini acotat, i sigui $1 < q < \infty$. Aleshores, l'operador d'embedding $u \mapsto u$ de $W_0^{1,q}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ és compacte. És a dir, que per cada successió $(u_j)_j$ a $W_0^{1,q}(\Omega)$ conté una successió parcial que convergeix en la norma de $L^q(\Omega)$ a un element $u \in L^q(\Omega)$.*

Lema 4.15. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un domini Lipschitz acotat, i sigui $1 < q < \infty$. Aleshores, l'embedding $W^{1,q}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ és compacte.*

Demostració dels Lemes 4.14 i 4.15: (Veure [1] Teorema de Rellich-Kondrachov i [6] Cap. 2, Teorema 6.3)

Lema 4.16. *Sigui $B : D(B) \to H$, $D(B) \subseteq H$, un operador autoadjunt positiu a l'espai de Hilbert H. Sigui $0 \leq \alpha \leq 1$. Llavors,*

$$\|B^\alpha v\| \leq \|Bv\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha} \leq \alpha\|Bv\| + (1-\alpha)\|v\|$$

per a tot $v \in D(B)$.

Demostració: És fa servir la representació espectral que hem comentat abans (veure [7], Lema 3.2.2, II)

Teorema 4.2. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domini acotat i $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$, amb $F \in L^2(\Omega)^9$. Aleshores, existeix al menys un parell solució*

$$(\boldsymbol{u}, p) \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega)$$

que satisfà

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

en sentit distribucional.

A més a més,

$$\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2 \leq \nu^{-1}\|F\|_2$$

Demostració: Considerem $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Veurem primer que la condició de solució feble (4.4) és equivalent a demanar que $\boldsymbol{u}$ satisfaci

$$A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u} + A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) = A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F \tag{4.24}$$

en sentit distribucional, on A és l'operador de Stokes definit a (4.3) i $A^{-\frac{1}{2}}$ i P són els operadors utilitzats al Lema 4.13.

Per una banda, la condició de solució feble és

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T > - < \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T >= - < F, (D\boldsymbol{v})^T > \tag{4.25}$$

$\boldsymbol{v} \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, i, per altra banda, per (4.19),

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega), \quad \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$$

$$\nu < (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >=< A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} >$$

i, pel Lema 4.13,

$$- < \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T >=< A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}), A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} >$$

$$- < F, (D\boldsymbol{v})^T >=< A^{-\frac{1}{2}}P\,\mathrm{div}F, A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} >$$

per a $\boldsymbol{v} \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, on $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \in L^3(\Omega)^9$ pel Lema 4.1. Llavors, com que Ω és acotat, podem fer servir la desigualtat de Hölder per veure que $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^9$.

Com hem vist abans, $R(A^{\frac{1}{2}}) = L^2_\sigma(\Omega)$ i $A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F \in L^2_\sigma(\Omega)$, per a $F \in L^2(\Omega)^9$. Per tant, tots els funcionals estan definits sobre $L^2_\sigma(\Omega)$, i (4.25) és equivalent a (4.24).

Una vegada tenim l'equació a resoldre amb els operadors de Stokes i Helmholtz, busquem l'operador al qual aplicarem el Principi de Leray-Schauder (Teorema 4.1). Escollim $\boldsymbol{w} = A^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}$, amb $\boldsymbol{w} \in D(A^{-\frac{1}{2}}) = L^2_\sigma(\Omega)$. Llavors, (4.24) es pot escriure com

$$\boldsymbol{w} + A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w})) = A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F$$

i podem definir l'operador $B : L^2_\sigma(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$ com

$$B\boldsymbol{w} := A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F - A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}))$$

Aleshores, la nostra equació pren la forma $B\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$.

El següent pas serà provar que el Principi de Leray-Schauder és aplicable en aquest cas. Per fer això, el primer que hem de veure és que B és completament continu.

Com que Ω és acotat, podem aplicar el Lema 4.14, per obtenir l'embedding compacte de $W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ en $L^2_\sigma(\Omega)$. A més a més, per qualsevol successió acotada $(A^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{v}_j)_j = (\boldsymbol{u}_j)_j$ a $L^2_\sigma(\Omega)$, $(A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_j)_j = (\boldsymbol{v}_j)_j$ també és acotada a $W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, ja que $\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2 = \nu^{-\frac{1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{v}\|_2 < \infty$, $\boldsymbol{v} \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Per tant, per la compacitat de l'embedding, $(\boldsymbol{v}_j)_j = (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_j)_j$ té una successió parcial convergent a $L^2_\sigma(\Omega)$. Per tant, l'operador $A^{-\frac{1}{2}} : L^2_\sigma(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$ és compacte.

El mateix passa per a $A^{-\frac{\alpha}{2}} : L^2_\sigma(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$, amb $1 < \alpha \leq 1$. En efecte, pel Lema 4.16

$$\|A^{-\frac{\alpha}{2}}(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w})\|_2 \leq \|\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_l\|_2^{1-\alpha} \|A^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_l)\|_2^\alpha, \quad j, l \in \mathbb{N}$$

És a dir, $(A^{-\frac{\alpha}{2}} \boldsymbol{w}_j)_j$ té una successió parcial convergent si $(\boldsymbol{w}_j)_j$ és acotada a $L^2_\sigma(\Omega)$. Per tant, $A^{-\frac{\alpha}{2}}$ és un operador compacte.

Per altra banda, podem aplicar la desigualtat de Hölder i el Lema 4.12, amb $n = 3$, $\alpha = \frac{3}{8}$, $q = 4$, per obtenir

$$\begin{aligned} \|(A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w})\|_2 &\leq C_1 \|A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}\|_4 \|A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}\|_4 \\ &\leq C_2 \nu^{-2\alpha} \|A^{\alpha - \frac{1}{2}} \boldsymbol{w}\|_2 \|A^{\alpha - \frac{1}{2}} \boldsymbol{w}\|_2 \end{aligned} \tag{4.26}$$

on $C_1, C_2 > 0$.

Considerem ara una successió $(\boldsymbol{w}_j)_j$ de $L^2_\sigma(\Omega)$ que convergeixi cap a $\boldsymbol{w} \in L^2_\sigma(\Omega)$. Llavors, per (4.23) i (4.26),

$$\begin{aligned} \|B\boldsymbol{w}_j - B\boldsymbol{w}\|_2 = \; & \|A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}_j) \otimes (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w} - A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}_j)) \\ & - A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}_j - A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{w}))\|_2 \\ & \leq C \nu^{-\frac{1}{2} - 2\alpha} \|A^{\alpha - \frac{1}{2}}(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w})\|_2 (\|A^{\alpha - \frac{1}{2}} \boldsymbol{w}\|_2 + \|A^{\alpha - \frac{1}{2}} \boldsymbol{w}_j\|_2) \end{aligned} \tag{4.27}$$

on $C > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Com que $\alpha - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} < 0$, $A^{\alpha-\frac{1}{2}}$ és un operador acotat i si $\lim_{j\to\infty} \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_j\|_2 = 0$, aleshores $\lim_{j\to\infty} \|B\boldsymbol{w} - B\boldsymbol{w}_j\|_2 = 0$.

Per tant, B és continu. Falta veure que és completament continu. Per provar-ho, escollim una successió acotada $(\boldsymbol{w}_j)_j$ a $L^2_\sigma(\Omega)$ i, com que $A^{\alpha-\frac{1}{2}}$ és compacte, $(A^{\alpha-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}_j)_j$ té una successió parcial convergent. Llavors, posant $\boldsymbol{w}_k$, $k \in \mathbb{N}$, en comptes de $\boldsymbol{w}$ a (4.27), obtenim que $(B\boldsymbol{w}_j)_j$ té una successió parcial convergent. En conseqüència, B és completament continu (veure Definició 4.2).

A continuació, hem de veure que se satisfà la propietat del Principi de Leray-Schauder. Per fer-ho, considerem $\boldsymbol{v} = A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}$ i la igualtat (4.11) per obtenir

$$< A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w})), \boldsymbol{w} >=< \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}), A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w} >$$

$$= - < \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{u})^T >= 0$$

Llavors, l'equació $\boldsymbol{w} = \lambda B\boldsymbol{w}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $\boldsymbol{w} \in L^2_\sigma(\Omega)$, ens porta a

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{w}\|_2^2 &= \lambda < B\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} > \\
&= \lambda < A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F, \boldsymbol{w} > -\lambda < A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div}((A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}) \otimes (A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w})), \boldsymbol{w} > \\
&= \lambda < A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F, \boldsymbol{w} > \leq \lambda \|A^{-\frac{1}{2}} P \operatorname{div} F\|_2 \|\boldsymbol{w}\|_2 \\
&\leq \lambda \nu^{-\frac{1}{2}} \|F\|_2 \|\boldsymbol{w}\|_2
\end{aligned}$$

on a la segona línia, el segon terme s'anul·la, com hem vist just abans. Escollint $r := \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2$, tenim la condició que buscàvem:

$$\boldsymbol{w} \in L^2_\sigma(\Omega),\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ \boldsymbol{w} = \lambda B\boldsymbol{w}, \quad \text{implica } \|\boldsymbol{w}\|_2 \leq r$$

Suposant $F \neq 0$, tenim que $r > 0$. Aleshores, el Principi de Leray-Schauder (Teorema 4.1) ens assegura al menys una $\boldsymbol{w} \in L^2_\sigma(\Omega)$ tal que $B\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ i $\|\boldsymbol{w}\|_2 \leq \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2$. Considerant $\boldsymbol{u} := A^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}$, obtenim una solució de (4.24), i, per tant, una solució feble del sistema de Navier-Stokes (4.2). A més a més,

$$\|\boldsymbol{w}\|_2 = \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}\|_2 = \nu^{\frac{1}{2}}\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2 \leq \nu^{-\frac{1}{2}}\|F\|_2$$

Per últim, la pressió associada a $\boldsymbol{u}$, $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ es construeix com al Lema 4.2.

□

4.7 Existència de solucions febles en dominis no acotats

Per veure l'existència de solucions febles en dominis no acotats farem servir una aproximació que ens redueixi el problema a un domini acotat, on puguem aplicar el Principi de Leray-Schauder.

El primer problema que ens trobem en aquest cas és que no tota funció $\boldsymbol{f} \in W^{-1,2}(\Omega)^3$ es pot escriure com la divergència d'una certa $F \in L^2(\Omega)^9$. Si recordem, el Lema 4.6 ens assegurava l'existència per dominis acotats, però ara necessitem un altre resultat sobre dominis generals.

Lema 4.17. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un domini qualsevol no acotat, i sigui $\boldsymbol{f} \in L^p(\Omega)^n$ amb $p = \frac{2n}{n+2}$. Aleshores, existeix una matriu $F \in L^2(\Omega)^9$ tal que $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$ en sentit distribucional, i*

$$\|\boldsymbol{f}\|_{-1,2} \leq \|F\|_2 \leq C\|\boldsymbol{f}\|_p$$

on $C(n) > 0$.

Demostració: Fem servir la desigualtat de Sobolev (4.12):

$$\|\boldsymbol{v}\|_r \leq C\|(D\boldsymbol{v})^T\|_q, \quad r = nq/(n-q), \quad 1 \leq q < n$$

per a $p' = \frac{p}{p-1} = r = \frac{2n}{n-2}$. Llavors, $\|\boldsymbol{v}\|_{p'} \leq C\|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$, $\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega)^n$, $C(p,n) > 0$. I com que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, obtenim

$$| < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} > | \leq \|\boldsymbol{f}\|_p \|\boldsymbol{v}\|_{p'} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_p \|(D\boldsymbol{v})^T\|_2$$

Així doncs, el funcional definit per $(D\boldsymbol{v})^T \mapsto < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >$ és continu al subespai $D = \{(D\boldsymbol{v})^T \in L^2(\Omega)^{n^2} \,|\, \boldsymbol{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^n\} \subseteq L^2(\Omega)^{n^2}$. Aleshores, pel mateix raonament que vam fer al Lema 4.6, obtenim $F \in L^2(\Omega)^{n^2}$ satisfent l'enunciat del Lema.

$\square$

Teorema 4.3. *Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domini qualsevol no acotat, i sigui $\boldsymbol{f} = \mathrm{div}F$ per a $F \in L^2(\Omega)^9$. Aleshores, existeix al menys un parell solució feble*

$$(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) \times L_{loc}^2(\Omega)$$

que satisfà

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

en sentit distribucional.

A més a més,

$$\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2 \leq \nu^{-1}\|F\|_2$$

Demostració: Fem com a la demostració del Lema 4.9 i construïm una successió $(\Omega_j)_j$ de dominis Lipschitz acotats tals que

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \overline{\Omega}_j \subseteq \Omega_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}$$

Aleshores, per cada subdomini acotat $\Omega' \subseteq \Omega$ amb $\overline{\Omega}' \subseteq \Omega$, existeix algun $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\Omega}' \subseteq \Omega_{j_0}$.

Per cada $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$, obtenim per la Proposició 4.1, (4.10)

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega_k)} \leq C_k\|(D\boldsymbol{u})^T\|_{L^2(\Omega)}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.28}$$

on $C(k) > 0$.

Aleshores, aplicant el Teorema 4.2, per a cada $j \in \mathbb{N}$ obtenim un parell

$$(\boldsymbol{u}_j, p_j) \in W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega_j) \times L^2(\Omega_j)$$

que satisfà

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}_j + (\boldsymbol{u}_j \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_j + \nabla p_j = \mathrm{div}F$$

en sentit distribucioncal a Ω_j. A més a més, de la segona part del Teorema

$$\|(D\boldsymbol{u}_j)^T\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \nu^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega_j)} \leq \nu^{-1}\|F\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.29}$$

amb una cota independent de $j \in \mathbb{N}$. Estenent cada element amb el valor zero obtenim els embedding

$$W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega_j) \subseteq W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega_{j+1}) \subseteq \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}$$

Llavors, podem considerar $(\boldsymbol{u}_j)_j$ com una successió sobre $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

Fent servir (4.28), fixat un $k \in \mathbb{N}$, per a tot $j \geq k$

$$\|\boldsymbol{u}_j\|_{L^2(\Omega_k)} \leq C(k)\|(D\boldsymbol{u}_j)^T\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.30}$$

A més a més, per la reflexivitat de $L^q(\Omega)$ (Teorema 2.46, [1]), i donat que $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)^3$, com vam veure a (4.13), $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ és reflexiu (veure Definició 3.19). Es pot veure que això és equivalent a que tota successió acotada $(\boldsymbol{u}_j)_j$ de $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, té una parcial que convergeix distribucionalment[8] a $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$ (veure [8] Teorema de Eberlein-Shmulyan). Aleshores, fent servir la cota uniforme (4.29), podem trobar una successió $(\boldsymbol{u}_j)_j$, que conté una successió parcial que convergeix distribucionalment a $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Usant (4.28), $(\boldsymbol{u}_j)_j$ convergeix distribucionalment a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_k)^3$, $k \in \mathbb{N}$. Per tant, donat $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega_k)^3$, el funcional $< \cdot, \boldsymbol{v} >$ és continu a $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$. Així mateix, per la definició de norma de $\widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, $((D\boldsymbol{u}_j)^T)_j$ convergeix distribucionalment a $(D\boldsymbol{u})^T \in L^2(\Omega)^9$.

Suposem que $(\boldsymbol{u}_j)_j$ és la successió parcial convergent. Aleshores, fent servir (4.30) per a cada $k \in \mathbb{N}$ fix, obtenim que la successió $(\boldsymbol{u}_j)_j$, per a $j \geq k$, és acotada a $L^2(\Omega_k)^3$. A més a més, per (4.29), $(\boldsymbol{u}_j)_j$ també està acotada a $W^{1,2}(\Omega_k)^3$.

Com que Ω_k és un domini Lipschitz, podem fer servir el Lema 4.15, que ens assegura la compacitat de l'embeddding $W^{1,2}(\Omega_k)^3 \subseteq L^2(\Omega_k)^3$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Per tant, obtenim que una successió parcial $(\boldsymbol{u}_{j'})_{j'}$ de $(\boldsymbol{u}_j)_j$, $j \geq 1$, que convergeix a $L^2(\Omega_1)^3$. Com que $(\boldsymbol{u}_j)_j$ convergeix distribucionalment a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_1)^3$, $(\boldsymbol{u}_{j'})_{j'}$ convergeix també a $\boldsymbol{u}$, però en la norma d'aquest espai. Anàlogament, per a $k = 2$, obtenim una successió parcial $(\boldsymbol{u}_{j''})_{j''}$, $j'' \geq 2$, de l'anterior que convergeix a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_2)^3$. Iterant el procés, tenim una successió de successions parcials que convergeixen a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_k)^3$, per a cada $k \in \mathbb{N}$.

Si construïm ara una matriu amb les successions anteriors on cada fila és una successió parcial de l'anterior i la fila k convergeix a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_k)^3$, per a cada $k \in \mathbb{N}$, i agafem els elements de la diagonal, obtenim una successió parcial de $(\boldsymbol{u}_j)_j$ que

[8]És a dir, $\lim_{j' \to \infty}[\cdot, \boldsymbol{u}_{j'}] = [\cdot, \boldsymbol{u}]$, $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$.

convergeix a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_k)^3$, per a tot $k \in \mathbb{N}$. Suposem que aquesta successió és $(\boldsymbol{u}_j)_j$, per facilitar la notació.

A continuació, veurem que $\boldsymbol{u}$ és una solució feble del sistema de Navier-Stokes (4.2). Considerem $\boldsymbol{v} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$, i fixem $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup(v) \subseteq \Omega_k$. Aleshores, com que $\boldsymbol{u}_j$ és una solució feble a Ω_j

$$\nu < (D\boldsymbol{u}_j)^T, (D\boldsymbol{v})^T > - < \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{u}_j, (D\boldsymbol{v})^T >= [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}] = - < F, (D\boldsymbol{v})^T >,$$

per a tot $j \geq k$. Vegem ara la convergència quan fem $j \to \infty$. Per una banda, $((D\boldsymbol{u}_j)^T)_j$ convergeix distribucionalment a $(D\boldsymbol{u})^T \in L^2(\Omega)^9$, i

$$< (D\boldsymbol{u})^T, (D\boldsymbol{v})^T >= \lim_{j\to\infty} < (D\boldsymbol{u}_j)^T, (D\boldsymbol{v})^T >$$

Per altra banda, $(\boldsymbol{u}_j)_j$, per a $j \geq k$, convergeix a $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega_k)^3$, i

$$< \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{u}_j, (D\boldsymbol{v})^T > - < \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T >$$

$$=< (\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{u}_j, (D\boldsymbol{v})^T > + < \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}), (D\boldsymbol{v})^T > \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Per tant,

$$< \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}, (D\boldsymbol{v})^T >= \lim_{j\to\infty} < \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{u}_j, (D\boldsymbol{v})^T >$$

És a dir, $\boldsymbol{u}$ és una solució feble del sistema de Navier-Stokes i $\boldsymbol{u} \in \widehat{W}^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)$, donat que (4.29) és una cota uniforme. Aleshores, $\|(D\boldsymbol{u})^T\|_2 \leq \nu^{-1}\|F\|_2$.

Per últim, utilitzant el Lema 4.2, obtenim la pressió $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ associada a aquesta solució feble.

$\square$

5 Conclusions

L'estudi de les equacions diferencials en derivades parcials requereix una teoria més elaborada i amb més dificultat, que aquella necessària per a les equacions diferencials ordinàries, com podem comprovar en aquesta memòria. Per començar, les equacions de Navier-Stokes contenen un terme no linial en la velocitat, la qual cosa dificulta una mica més l'estudi, motivant la búsqueda d'expressions equivalents en forma distribucional com fem a la Proposició 4.1.

Per trobar l'existència de solucions febles, la forma de procedir és similar a la de les equacions diferencials ordinàries, en el sentit que busquem un operador diferencial i demostrem resultats que ens donin condicions suficients per a que tingui un o més punts fixos. En el nostre cas, apliquem el Teorema de Leray-Schauder, que ens dóna l'existència d'un punt fix mitjançant una cota *a priori*.

Una vegada hem arribat a aquest punt, no es necessiten molts més resultats per poder demostrar la regularitat de les solucions i la seva unicitat. No obstant, el volum de feina i l'extensió del treball ens han limitat l'estudi.

Referències

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F.: Sobolev spaces. 2nd edition, Elsevier Science, 2003.

[2] Boyer, F.; Fabrie, P.: Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Springer, 2013.

[3] Chorin, A. J.; Marsden, J. E.: A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. 3rd Edition, Springer-Verlag New York, 1993.

[4] Galdi, G. P.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems. 2nd edition, Springer-Verlag New York, 2011.

[5] Hörmander, L.: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. 2nd edition Berlin; New York: Springer-Verlag, 2003.

[6] Nečas, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Édtitions de l'Acad, Tchécoslovaque des Sciences, Prague, 1967.

[7] Sohr, H.: The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach. Birkhäuser, 2001.

[8] Yosida, K: Functional analysis. Springer-Verlag, 1965.

[9] Zeidler, E.: Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics. Springer-Verlag, 1995.

Annex

Demostració Lema 2.1: Observem que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x},t),t))$$

i el mateix s'obté al canviar x per y i z. Aleshores, considerant $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\mathbf{x},t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

I fent servir ara que $\mathbf{u}$ depèn de $\mathbf{x}$ a través de $\varphi(\mathbf{x},t)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}u_x(\varphi(\mathbf{x},t),t) = \frac{\partial u_x}{\partial \varphi_x}\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \varphi_y}\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \varphi_z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial x},$$

on podem substituir u_x per u_y i u_z per obtenir la mateixa identitat. Substituint obtenim una suma de 9 determinants. Treient com factor repetit a una mateixa columna $\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_j}$ ens adonem que 6 d'aquests 9 determinants tenen dos columnes repetides i, per tant, seran zero. Aleshores, només ens queda

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\mathbf{x},t) = \frac{\partial u_x}{\partial \varphi_x}J + \frac{\partial u_y}{\partial \varphi_y}J + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi_z}J = \mathrm{div}(\mathbf{u})J.$$

□

Demostració Teorema 2.1: Per demostrar el Teorema, veurem que:

(i) $\tau(\mathbf{x},t,\lambda\mathbf{n}) = \lambda\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2) = \tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n}_1) + \tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n}_2)$.

Per veure (i) hem de comprovar primer que $\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n}) = -\tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$, per a tot $(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$.

En efecte, si definim h mitjançant el balanç de moment (2.3) per un fluid ideal com

$$h = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - \rho\mathbf{b},$$

aleshores la conservació del moment en aquest cas vindrà donada per

$$\int_W h\, dV = \int_{\partial W} \tau(\mathbf{x},t,\mathbf{n})\, dA.$$

Llavors, considerem un punt $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{n}_0$ un vector unitari. Considerem una esfera S centrada en $\mathbf{x}_0$ i dividida en dos hemisferis S_1 i S_2 pel pla Σ que passa pel centre i és ortogonal a $\mathbf{n}_0$. Suposem $\mathbf{n}_0$ orientat des de S_1 cap a S_2. Aleshores, podem aplicar la conservació del moment sobre els dos hemisferis

$$\int_{S_1} h\, dV = \int_{\partial S_1} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_0)\, dA = \int_{\partial S_1 \cap \Sigma} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_0)\, dA + \int_{\partial S_1 \cap \partial S} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, dA,$$

i, anàlogament

$$\int_{S_2} h\, dV = \int_{\partial S_2 \cap \Sigma} \tau(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}_0)\, dA + \int_{\partial S_2 \cap \partial S} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, dA.$$

Per tant, sumant una expresió a l'altra i tenint en compte que el moment també es conservarà a l'esfera S i que $S = S_1 \cup S_2$, $\partial S = (\partial S \cap \partial S_1) \cup (\partial S \cap \partial S_2)$

$$\int_{\partial S_1 \cap \Sigma} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_0)\, dA + \int_{\partial S_2 \cap \Sigma} \tau(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}_0)\, dA = 0.$$

I com que $\partial S_1 \cap \Sigma = \partial S_2 \cap \Sigma$, el càlcul és vàlid per qualsevol esfera centrada a $\mathbf{x}_0$ i τ és contínua per hipòtesi,

$$\tau(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n}_0) = -\tau(\mathbf{x}_0, t, -\mathbf{n}_0).$$

Estenem ara la funció τ per a vectors no només unitaris $\xi \in \mathbb{R}^3$ com

$$\tau(\mathbf{x}, t, \xi) = |\xi| \tau\left(\mathbf{x}, t, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

i

$$\tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{0}) = 0.$$

D'aquesta definició segueix directament l'homogeneïtat respecte ξ. En efecte, per a $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\tau(\mathbf{x}, t, \lambda\xi) = |\lambda||\xi| \tau\left(\mathbf{x}, t, \frac{\lambda\xi}{|\lambda||\xi|}\right) = |\lambda||\xi| \tau\left(\mathbf{x}, t, \mathrm{signe}(\lambda)\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

$$= \mathrm{signe}(\lambda)|\lambda||\xi| \tau\left(\mathbf{x}, t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = \lambda \tau(\mathbf{x}, t, \xi).$$

Volem provar ara (ii). Considerem ξ_1 i ξ_2 vectors de $\mathbb{R}^3$, no proporcionals (si fossin proporcionals podem aplicar la igualtat anterior). Sigui $\mathbf{x}_0$ un punt fix. Considerem el pla Π generat pels vectors ξ_1, ξ_2 i que conté $\mathbf{x}_0$, amb un vector normal unitari $\mathbf{n}_0$ que dóna l'orientació. Anomenem $\xi_i^\perp$ al vector que s'obté al rotar ξ_i $\pi/2$ sobre el pla Π en sentit positiu (que és el que ve donat per $\mathbf{n}_0$).
Escollim ara els punts

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \xi_1^\perp, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_0 - \varepsilon \xi_2^\perp,$$

i

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_0, \quad \tilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{y}_1 + \varepsilon \mathbf{n}_0, \quad \tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2 + \varepsilon \mathbf{n}_0,$$

de tal manera que $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\tilde{\mathbf{x}}_0\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{y}}_2$ és un prisma triangular (P_ε) d'alçada ε i amb base $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ (vegeu Figura 1). Si ara apliquem la conservació del moment al prisma, i dividim per ε^2, tenim

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{P_\varepsilon} h\,dV = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial P_\varepsilon} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\,dA.$$

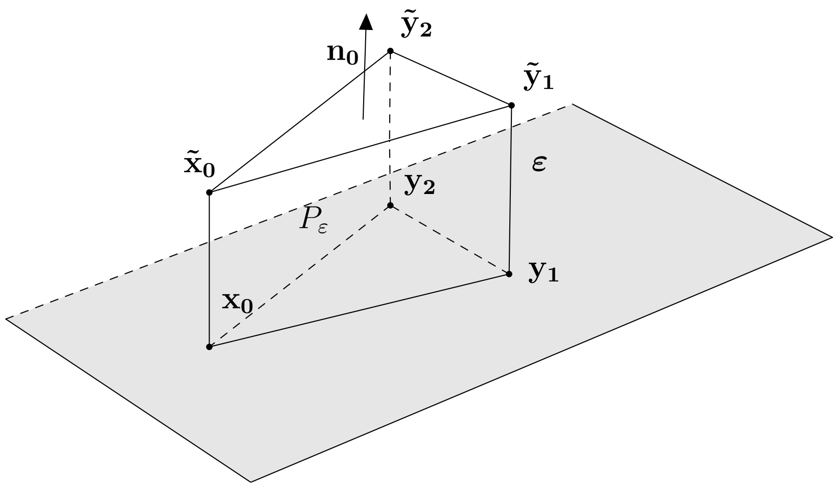

Figura 2: Prisma triangular P_ε.

Com que el prisma té 5 cares, el terme de superfície es divideix en 5 termes. Dos per les bases, on el vector normal és $\mathbf{n}_0$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} \tau(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}_0)\,dA + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tilde{\mathbf{x}}_0\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{y}}_2} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_0)\,dA$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} (\tau(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}_0) + \tau(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{n}_0, t, \mathbf{n}_0))\,dA$$

$$= \frac{C}{\text{àrea}(\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2)}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2} (\tau(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}_0) + \tau(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{n}_0, t, \mathbf{n}_0))\,dA \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On hem fet servir que $\text{àrea}(\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2) = \varepsilon^2|\xi_1\times\xi_2|/2 = C\varepsilon^2$, per una certa constant C.

Els altres tres termes corresponen als laterals del prisma amb vectors directors $\varepsilon\xi_1^\perp$, $-\varepsilon\xi_2^\perp$ i $-\varepsilon(\xi_1^\perp + \xi_2^\perp)$. Aleshores, cada lateral tindrà respectivament els següents vector normals: $\varepsilon\xi_1$, $\varepsilon\xi_2$ i $-\varepsilon(\xi_1+\xi_2)$. Considerem un d'aquest termes (els altres són anàlges) i calculem la seva contribució. Per exemple, la cara $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{x}}_0$, amb el vector unitari $\mathbf{n} = \dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{x}}_0} \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\,dA = \frac{1}{\varepsilon^2|\xi_1|}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{x}}_0} \tau(\mathbf{x}, t, \xi_1)\,dA,$$

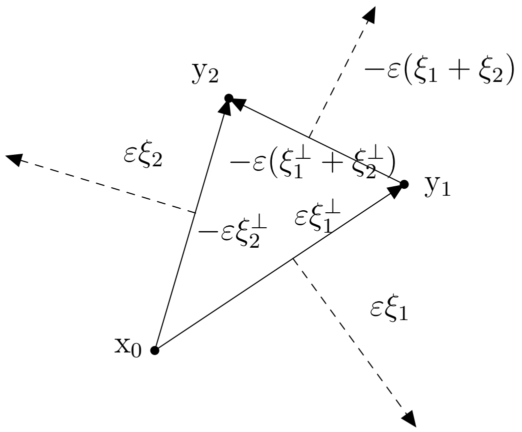

Figura 3: Base $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$ del prisma triangular P_ε.

per l'extensió de τ, que és igual a

$$\frac{1}{\text{àrea}(\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{x}}_0)}\int_{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_1\tilde{\mathbf{y}}_1\tilde{\mathbf{x}}_0}\tau(\mathbf{x},t,\xi_1)\,dA \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \tau(\mathbf{x},t,\mathbf{a}).$$

En aquest últim pas utilitzem la continuïtat (uniforme en un entorn de $\mathbf{x}_0$) de τ. Ens queda per estudiar el terme sobre el volum del prisma. Però, com que hem suposat ρ i $\mathbf{u}$ regulars, h està localment acotada. Fent servir que el volum de P_ε és proporcional a ε^3 obtenim

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{P_\varepsilon} h\,dV\right| \le C\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Per tant, passant al límit en ε, obtenim que

$$0 = \tau(\mathbf{x},t,\xi_1)+\tau(\mathbf{x},t,\xi_2)-\tau(\mathbf{x},t,\xi_1+\xi_2).$$

En particular, es satisfà per a vector unitaris. Així doncs, hem provat l'existència d'una matriu σ tal que $\tau = \sigma\cdot\mathbf{n}$.

$\square$