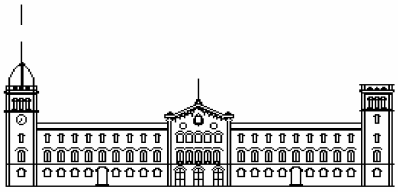


Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

ANNEX 2: FITXES DE PRESENTACIÓ I GUIES DIDÀCTIQUES DELS MÒDULS

Marina Agudelo Riba

Títol del treball: Anàlisi didàctica d'alguns dels mòduls del museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

Director: Sergi Muria Maldonado

Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 30 de juny de 2015

ÍNDEX

	Pàg.
Fitxes de presentació dels mòduls	2
Arc catenari o catenària	3
Arc de mig punt	4
Còniques	5
De l'octàedre al cub	6
Pantògraf	7
Suma de nombres quadrats	8
Tres triangles equilàters	9
Vestir políedres	10
Taules de multiplicar 3D	11
Torres de Hanoi	12
Guies didàctiques dels mòduls	13
Arc catenari o catenària	14
Arc de mig punt	28
Còniques	35
De l'octàedre al cub	51
Pantògraf	72
Suma de nombres quadrats	83
Tres triangles equilàters	96
Vestir políedres	106
Taules de multiplicar 3D	135
Torres de Hanoi	145

FITXES DE PRESENTACIÓ DELS MÒDULS

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Arc Catenari o Catenària

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Superior d'Educació Primària

Descripció del material:

Esta format per 11 peces de espuma folrades amb tela dels següents colors: 2 de negres, 2 de blaus, 2 de verds, 2 de vermells, 2 de taronges i 1 de groc; i un cindri o motlle de fusta per formar la catenària o arc catenari.

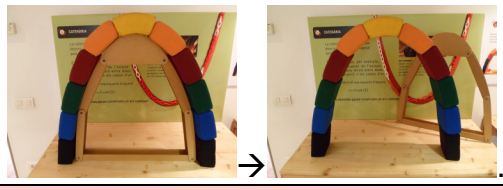
Descripció de l'activitat que es planteja:

Es tracta d'elaborar una catenària o un arc catenari a partir de les peces descrites anteriorment amb l'ajuda del cindri, seguint l'ordre de les peces que apareixen al plafó. Es pot realitzar de manera individual, però el millor seria en grup.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Col·locar el mig de la taula el cindri de fusta. I anar posant les peces amb l'ordre i col·locació que diu el plafó, seguint els següents passos:

Un cop, col·locades totes les peces, caldrà retirar, amb molt de compte, el motlle de fusta cap endarrera i aleshores les peces s'aguantaran formant una catenària o un arc catenari.



Continguts que s'hi treballen:

- Geometria
- Tipus d'arcs
- Estructures dels arcs
- Corbes
- Forces (de l'assignatura de física).

Mòduls relacionats:

- Arc de mig punt
- Cicloide

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Arc de mig punt

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Superior d'Educació Primària

Descripció del material:

Esta format per 9 peces de espuma folrades amb tela de color marró, totes elles iguals i dues peces de fusta clavades amb velcro sobre la taula del mòdul, que permetran formar un arc de mig punt.

Descripció de l'activitat que es planteja:

Es tracta de construir un arc de mig punt a partir de les peces d'espuma amb l'ajuda de les dues peces de fusta clavades a la taula. Es pot realitzar de manera individual, però el millor seria en grup.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Es tracta d'anar col·locant, entre els dos suports de fusta enganxades a la taula amb velcro, cadascuna de les peces, una al costat de l'altre, fins a obtenir l'arc de mig punt que apareix en el plafó. No fa falta seguir un ordre, ja que totes les peces són iguals. Cal realitzar-ho amb molt de compte. El procediment seria el següent:

Continguts que s'hi treballen:

- Geometria
- Tipus d'arcs
- Estructures dels arcs
- Corbes
- Forces (de l'assignatura de física).

Mòduls relacionats:

- Arc catenari
- Cicloide

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Còniques

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del primer curs de l'ESO

Descripció del material:

Està compost per tres submòduls:

- El con d'Apol·loni: un con de fusta on s'aprecien les seves seccions amb un altre color. No es pot manipular, només observar.
- Doble mirall parabòlic: caixa de fusta tancada hermèticament, on en la part superior hi ha un forat rodó central tapat amb un vidre, que permet veure en el seu interior. Dins la caixa hi ha un dau de color blau, envoltat per un mirall parabòlic. No es pot manipular, només observar la imatge virtual que fa.
- El cor d'Arquimedes: aparell de fusta, compost per un cercle i un cor (que està format per dos trossos de l'espiral d'Arquimedes), que estan continguts en una barra vertical cadascun. I mitjançant aquestes barres, podem fer girar els elements a diferents velocitats.

Descripció de l'activitat que es planteja:

- El con d'Apol·loni: observar les diferents seccions (el·lipse, paràbola i hipèrbola).
- Doble mirall parabòlic: Si es fa girar una paràbola en torn del seu eix, s'aconsegueix un paraboloide de revolució. La principal propietat que té, és que els raigs de llum que surten del seu focus es reflecteixen de manera paral·lela al seu eix i a la inversa, els raigs que arriben paral·leles al seu eix, es concentren cap al focus.
- El cor d'Arquimedes: Serveix per transformar un moviment circular uniforme en un moviment lineal uniforme.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Dels tres submòduls l'únic que permet fer una manipulació és el cor d'Arquimedes. Només s'ha de fer girar a poc a poc el cercle o el cor d'Arquimedes i comparar les velocitats de les dues boles.

Continguts que s'hi treballen:

- Propietats focals de les còniques
- Seccions de les còniques
- Moviments i velocitats

Mòduls relacionats:

- Les dues el·lipses unides per eixos

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

De l'octàedre al cub

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Superior d'Educació Primària

Descripció del material:

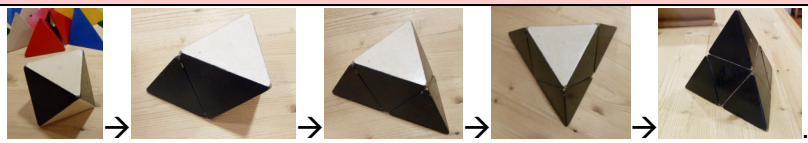
Esta format per 21 peces de fusta amb punts imantats al baricentre de certes cares, són les següents:

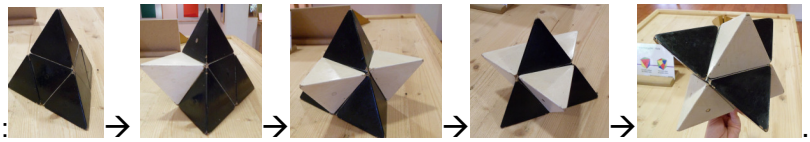
- 1 octàedre regular bicolor (blanc i negre),
- 4 tetràedres regulars negres,
- 4 tetràedres regulars blancs,
- 3 tetràedres irregulars vermells,
- 3 tetràedres irregulars grocs,
- 3 tetràedres irregulars blaus, i
- 3 tetràedres irregulars verds.

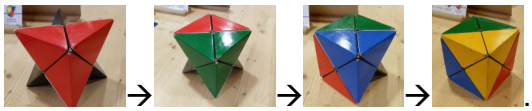
Descripció de l'activitat que es planteja:

Es tracta d'elaborar un cub a partir d'un octàedre regular, seguint la seqüència de figures que apareix en el plafó. Es pot realitzar de manera individual o en grup.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

De l'octàedre regular al tetràedre regular:  .

Del tetràedre regular a l'Stella octangula:  .

De l'Stella octangula al cub (vèrtexs mateix color):  .

De l'Stella octangula al cub (de manera que les arestes separin figures del mateix color): .

Continguts que s'hi treballen:

- Percepció espacial
- Políedres
- Regularitats
- Volums
- Simetries
- Aspectes combinatoris

Mòduls relacionats:

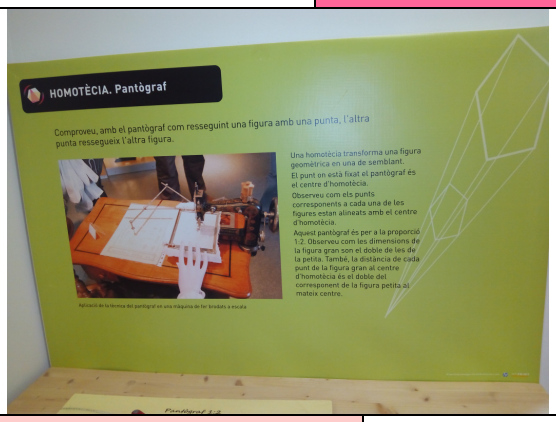
- Tot pintant la pilota
- Tres triangles equilàters
- Puzles pitagòrics
- Puzles de polígons

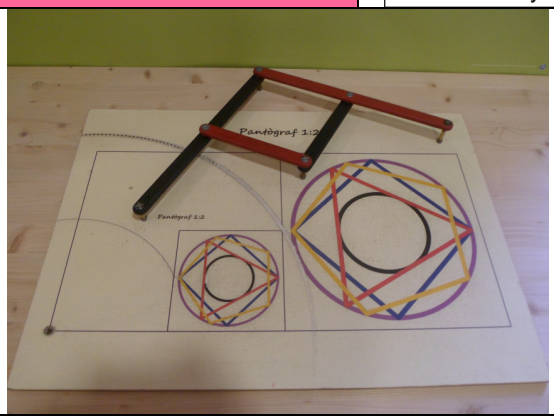
Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Pantògraf

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya





Edat mínima recomanada:	A partir del primer curs de l'ESO

Descripció del material:

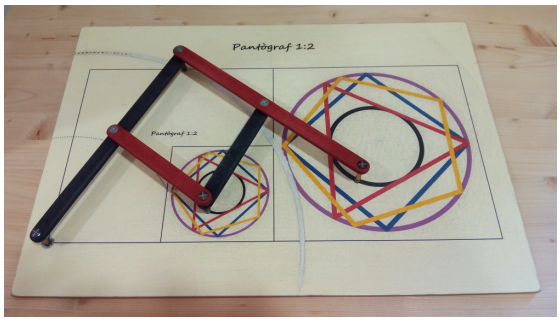
Està format per un pantògraf i un tauler que permet fer la proporció 1:2.

Descripció de l'activitat que es planteja:

El pantògraf ens permet resseguir la figura i obtenir-ne una de semblant a ella. I com que la proporció és de 1:2, significa que la imatge gran del tauler és el doble de la petita. Es pot realitzar de manera individual o en parelles.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

El pantògraf conté tres punts o extrems als quals haurem de col·locar de la següent manera:



L'extrem més a l'esquerra de la fotografia ha de quedar fixa, l'extrem del mig ens permetrà resseguir la figura i el de la dreta serà el que ens faci la figura semblant; o bé a l'inrevés, és a dir, l'extrem de la dreta resseguirà la figura i el del mig dibuixarà la figura semblant. Aleshores el que farem serà **ampliar** o **reduir**, respectivament, la figura.

Continguts que s'hi treballen:

- Homotècies
- Escales
- Equivalències
- Distàncies

Mòduls relacionats:

- Inversor
- Engranatges

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Suma de nombres quadrats

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del primer curs de l'ESO

Descripció del material:

Està format per 6 peces de fusta iguals de colors diferents: groc, vermell, negre, verd, turquesa i color fusta. Cada una de les peces és una piràmide graonada formada pels cinc primers nombres quadrats consecutius.

Descripció de l'activitat que es planteja:

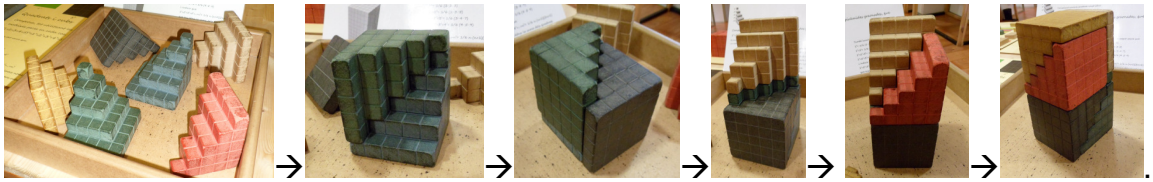
Consisteix a construir un ortòedre de dimensions, 5, 6 i 11 mitjançant les sis piràmides graonades descrites anteriorment.

D'aquesta manera, comprovem que: $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{1}{6}(5\cdot 6\cdot 11)$.

També es pot veure que, $1^2=\frac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 3)$, $1^2+2^2=\frac{1}{6}(2\cdot 3\cdot 5)$, $1^2+2^2+3^2=\frac{1}{6}(3\cdot 4\cdot 7)$, i així deduïm la forma general: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}(n\cdot(n+1)\cdot(2n+1))$, que ens dóna la suma dels quadrats consecutius. És molt aconsellable fer-ho de manera individual o en parelles.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Es tracta d'anar col·locant peça per peça, de manera que formem l'ortòedre de dimensions 5, 6 i 11. Per tant caldrà ajustant-se molt bé a les dimensions. El procediment seria el següent:



Continguts que s'hi treballen:

- Nombres figurats
- Les potències quadrades
- Àrees i volums

Mòduls relacionats:

- Suma de nombres triangulars
- Suma de cubs
- Quadrats i cubs
- Imparells i cubs
- Imparells i quadrats

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Tres triangles equilàters

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Superior d'Educació Primària

Descripció del material:

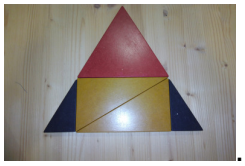
Està format per 5 peces de fusta, són les següents:

- 1 triangles equilàter de color vermell,
- 2 triangles escalens de color groc, i
- 2 triangles escalens de color negre.

Descripció de l'activitat que es planteja:

Es tracta de construir un, dos i fins a tres triangles equilàters amb totes les peces del mòdul. Es pot realitzar de manera individual o en grup.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Un triangle equilàter: →  .

Dos triangles equilàters: → .

Tres triangles equilàters: → .

Continguts que s'hi treballen:

- Tipus de triangles
- Semblances
- Equivalències

Mòduls relacionats:

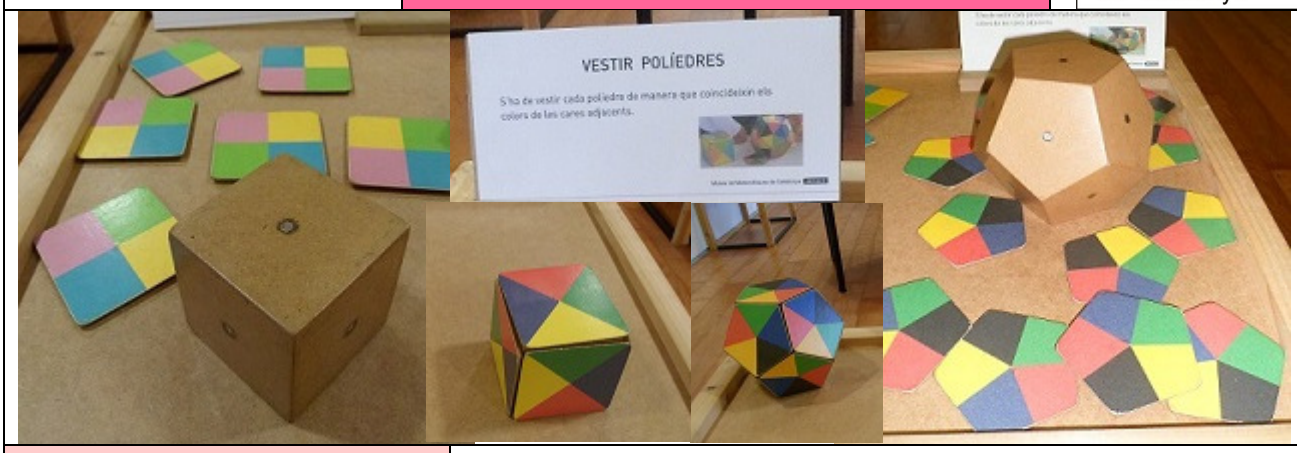
- Puzles pitagòrics
- Puzles de polígons

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Vestir políedres

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya



Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Superior d'Educació Primària

Descripció del material:

Està format per dos políedres, un cub i un dodecàedre de fusta i amb cadascuna de les seves cares amb un imant al baricentre d'aquestes. En el cas del cub, es complementa amb 6 peces planes de fusta que cadascuna forma les sis permutacions circulars dels quatre colors (groc, rosa, verd i blau) i corresponen a les cares del cub. Anàlogament, el dodecàedre, es complementa amb 12 peces planes de fusta que cadascuna combina cinc colors (groc, vermell, verd, blau i negre) i corresponen a les cares del dodecàedre.

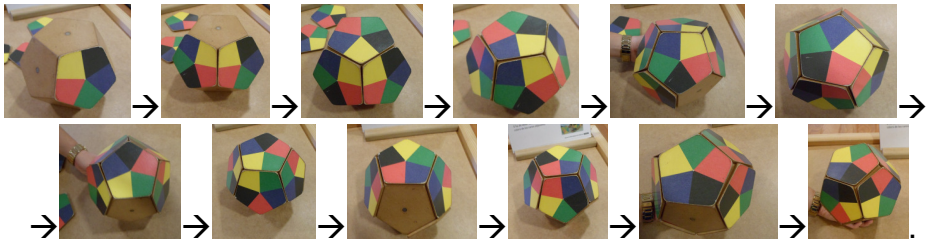
Descripció de l'activitat que es planteja:

Consisteix a vestir cada políedre de manera que coincideixin els colors de les cares adjacents. Es pot realitzar de manera individual o en grup.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Es tracta d'anar col·locant peça per peça, de manera que coincideixin els colors de les cares adjacents. El procediment seria el següent:

CUB: .

DODECÀEDRE:  .

Continguts que s'hi treballen:

- Geometria espacial
- Políedres
- Iteració
- Combinatòria
- Simetries

Mòduls relacionats:

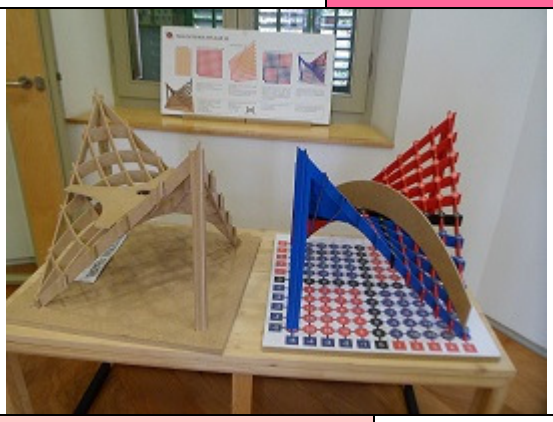
- 7 hexàgons
- 9 quadrats
- Tot pintant una pilota
- Puzles amb història

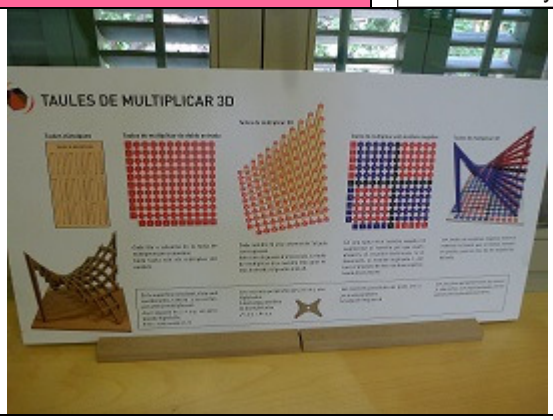
Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Taules de multiplicar 3D

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya





Edat mínima recomanada:	A partir del Cicle Mitjà d'Educació Primària

Descripció del material:

Format per dos taulers de fusta que representen les taules de multiplicar amb format 3D(paraboloide hiperbòlic). Un dels taulers és de color fusta, on només es representa les alçades que corresponen als resultats de les multiplicacions. I a més a més, té la virtut de presentar les seccions del paraboloide hiperbòlic en dues direccions. I l'altre representa el mateix que l'anterior, però a més a més, té els colors blau, negre i vermell, on cadascun d'ells corresponen als resultats negatius, zeros i positius, respectivament.
A més a més, hi ha dues peces de fusta que representen les paràboles i les hipèrboles que formen les taules de multiplicar amb aquestes representacions.

Descripció de l'activitat que es planteja:

És una activitat poc manipulativa. El que pretén és observar les multiplicacions i la seva relació d'alçada amb els corresponents resultats. És a dir, demostrar la regla dels signes en la multiplicació.
A més, gràcies a les dues peces de fusta, es pot observar les hipèrboles i les paràboles que es formen. També cal observar que cada cop que es multiplica un nombre per tots els altres, es forma una recta. A més a més, si prolonguem aquestes rectes, observem precisament això.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Permet justificar la regla dels signes de les multiplicacions.
També col·locant les dues peces de fusta sobre els taulers i observar com coincideix, formant una paràbola o les hipèrboles.

Continguts que s'hi treballen:

- Taules de multiplicar
- Nombres enters
- Regla dels signes en la multiplicació
- Rectes, paràboles i hipèrboles
- Paraboloide hiperbòlic

Mòduls relacionats:

- Parells i senars, cercles i quadrats, files i columnes.
- Sumes
- Triangle màgic (dos models)
- Set (i partit)
- Sectors
- Divisions màgiques
- Restes

Experiències: matemàtiques

Fitxa de presentació:

Torres de Hanoi

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

Edat mínima recomanada:	A partir del primer curs de l'ESO

Descripció del material:

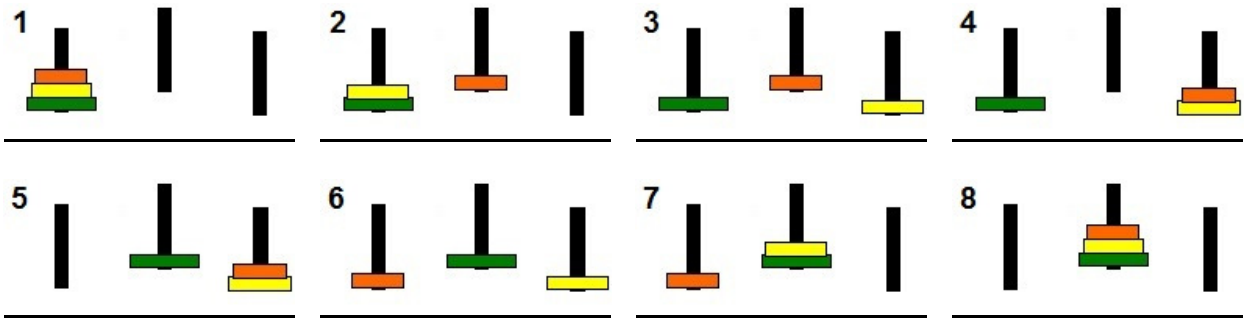
Està format per 6 peces circulars de fusta de diferents colors i diferents mides (proporcionals), a més a més d'un tauler amb tres pals de fusta amb les mateixes dimensions.

Descripció de l'activitat que es planteja:

El joc consisteix a passar totes les peces (de més gran a més petit) des d'un pal a un altre pal, amb el mateix ordre. Amb l'única condició que només es pot canviar de pal una peça cada vegada i que mai s'ha de tenir una peça col·locada sobre d'una de més petita.

Indicacions per assolir el repte que planteja el mòdul:

Primer cal tenir col·locades totes les peces a un pal, de més gran en més petita. Llavors cal moure les peces amb la condició que només es pot canviar de pal una peça cada vegada i que mai s'ha de tenir una peça col·locada sobre d'una de més petita. A continuació es mostra el procediment que s'ha de seguir amb 3 peces, fent un total de 8 passos:



Continguts que s'hi treballen:

- Lògica
- Recursivitat
- Recompte del nombre de passos en funció del nombre de peces

Mòduls relacionats:

- Gratacels

GUIES DIDÀCTIQUES DELS MÒDULS

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Arc Catenari o Catenària

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

Definirem el següent vocabulari utilitzat en aquest mòdul:

- Arc catenari: aquest arc pren el seu nom de la catenària o corba que descriu una cadena suspesa entre dos punts situats a idèntica altura i que no aguanta altre pes que el seu propi. No requereix de reforços als costats de l'arc per a sustentar-se i no tendeix a obrir-se; l'arc catenari esdevé la forma òptima de construir arcs que se sustenta per si mateix i els dos costats de l'arc tendeixen a ser paral·lels.

- Catenària: és la corba que descriu una cadena suspesa pels seus extrems i que es troba sotmesa a un camp gravitatori uniforme. L'equació de la catenària, prenent el seu mínim en el punt $(0,a)$ és

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

En la qual, $a = \frac{T_0}{P}$. On T_0 és la component horitzontal de la tensió, que és constant perquè és equivalent a la força de gravetat, i P és el pes per unitat de longitud del fil.

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços d'expressar tant en oral com en escrit tot els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència artística i cultural.
  L'apreciació de les matemàtiques tenen a veure amb l'art i l'actitud davant el fet cultural i, en particular, de l'artístic.

- Competència matemàtica.
  Pels conceptes i metodologies matemàtiques que es treballen.

- Competència d'autonomia i iniciativa personal.

Saber treballar amb la resta de companys.

- Competència social i ciutadana.
  És una activitat per més d'una persona, és a dir, per fer-se en grup.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Catenària: els primers matemàtics que van abordar el problema com Galileu, suposaren que la corba era una paràbola. Joachim Jungius, el 1669, demostrà que no ho era, però no trobà l'equació de la catenària. L'equació fou obtinguda per Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens i Johann Bernoulli el 1691, en resposta al desafiament plantejat per Jakob Bernoulli. Huygens fou el primer a utilitzar el terme catenària en una carta a Leibniz el 1690, i David Gregory escrigué, aquell mateix any, un tractat sobre la corba.
Antoni Gaudí, va dissenyar les estructures de l'església de la Colònia Güell a partir de cordills suspesos i petits sacs de perdigons i va obtenir la correcta forma de l'arc sense cap càlcul.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunten dues plantilles de l'arc catenari formades per 11 peces, que únicament caldrà imprimir-les a mida DIN A3, per tal que l'arc sigui més gran. La diferència de les dues versions, és que la primera és la idèntica a la del museu, però la segona és una catenària formada per les mateixes peces que l'original, però amb la única diferència que la peces no són tan proporcionades com l'altre.

Per a la construcció del mòdul original necessitarem el següent material:

- una placa de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN" amb un gruix d'uns 4 centímetres, perquè pugui anar bé per a la construcció;
- agulles de cap de cosir, per subjectar la plantilla de paper;
- un cúter, per tallar la placa; i
- unes pintures acríliques, per pintar les peces.

Passos que s'han de seguir:

- Donar a cada alumne una plantilla de l'arc catenari, i retallar-lo per l'interior i l'exterior de l'arc.
- Clavar amb les agulles de cap la plantilla a la placa de porexpan.
- Amb l'ajuda del cúter tallem el contorn de l'arc, vigilant que la part interior de l'arc no es faci malbé, ja que es necessitarà per la construcció de la catenària.
- Seguidament, tallar cada una de les parts de la catenària.
- Finalment, vigilant de no barrejar les peces, les pintem com el mòdul original.

Aquesta construcció és una mica complexa, ja que es necessiten una sèrie de materials i eines, que potser a l'aula no tinguin. Es podria fer la construcció com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia.

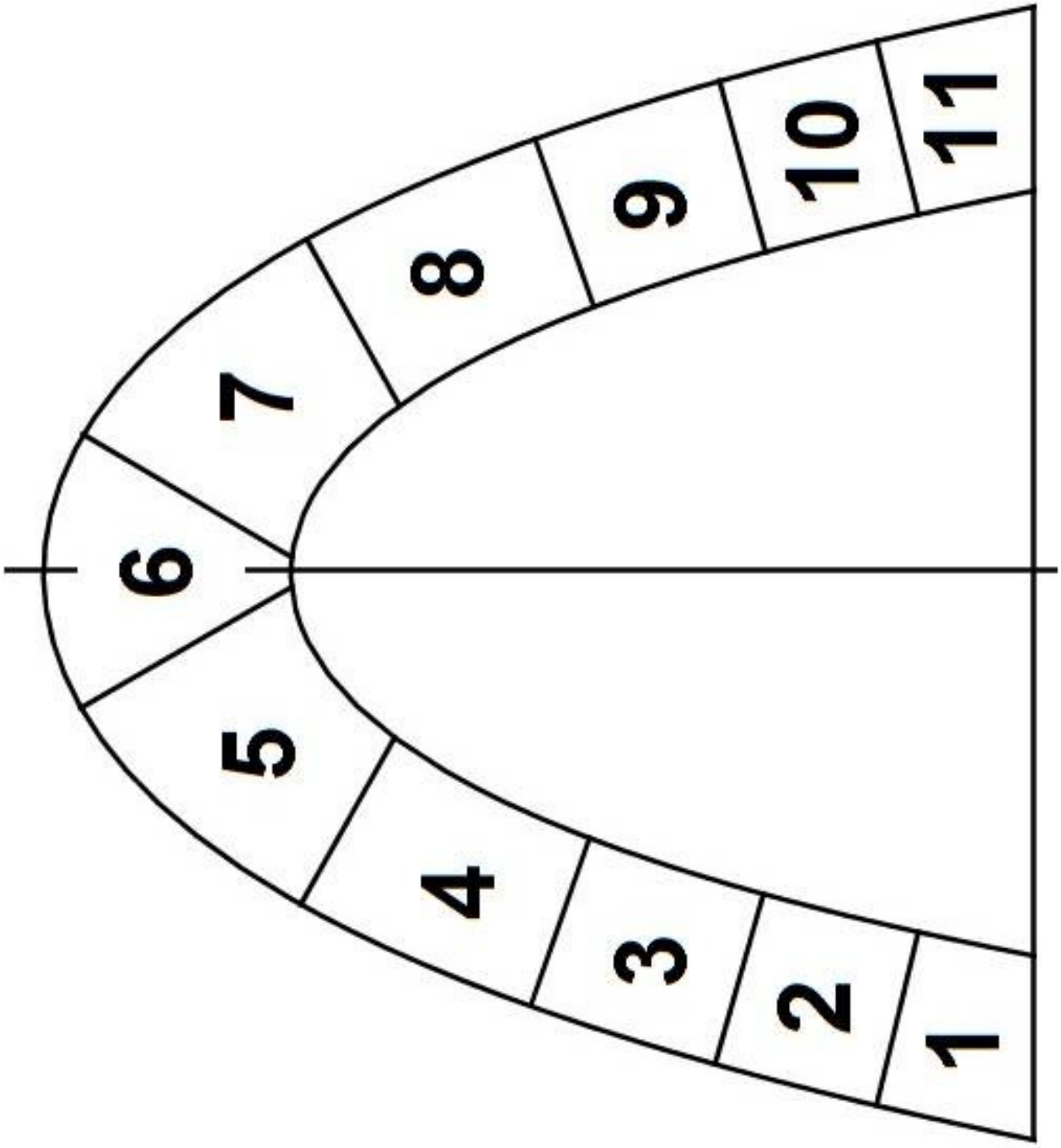
Indicació → *estaria bé, fer també el mòdul de l'arc de mig punt ja que tots dos estan molt relacionats. Veieu la guia didàctica corresponent a aquest mòdul.*

Imatge 1. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

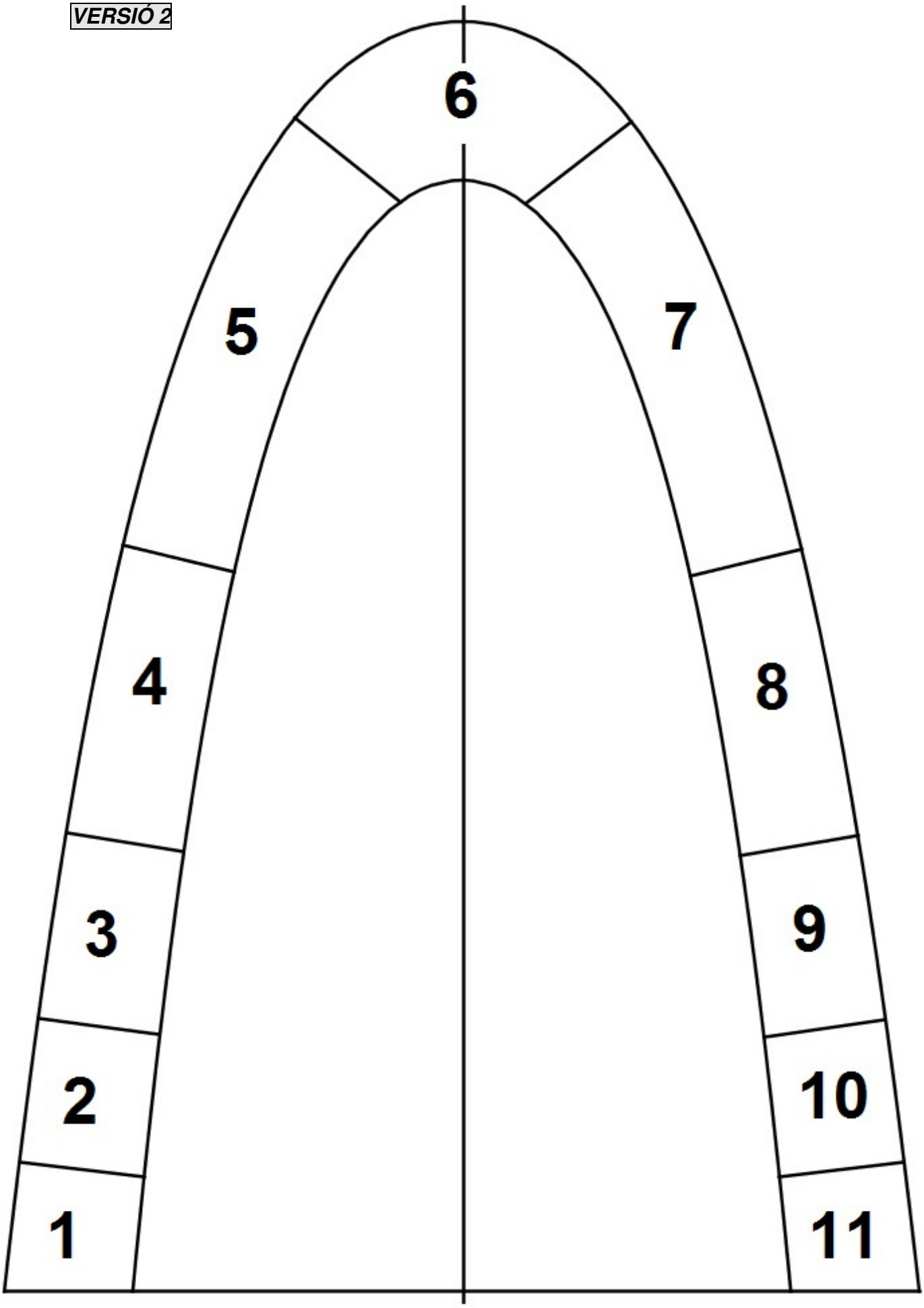
Imatge 2. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 3. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

VERSIÓ 1



VERSIÓ 2



ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

Primera proposta d'activitat:

- Utilitza la part sobrant de la placa, o algun altre retall que tinguis per casa (ha de ser una superfície plana), i prova que, col·locant aquesta nova peça sobre de l'arc, aquest es manté intacte i aguanta el pes.

Imatge 4. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Segona proposta d'activitat:

- A continuació, s'adjunten algunes plantilles més d'arcs catenaris formades per 9 i 15 peces, amb les dues versions anteriors. Els alumnes també poden intentar crear amb l'ajuda del GeoGebra diversos arcs catenaris amb diferents nombres de peces.

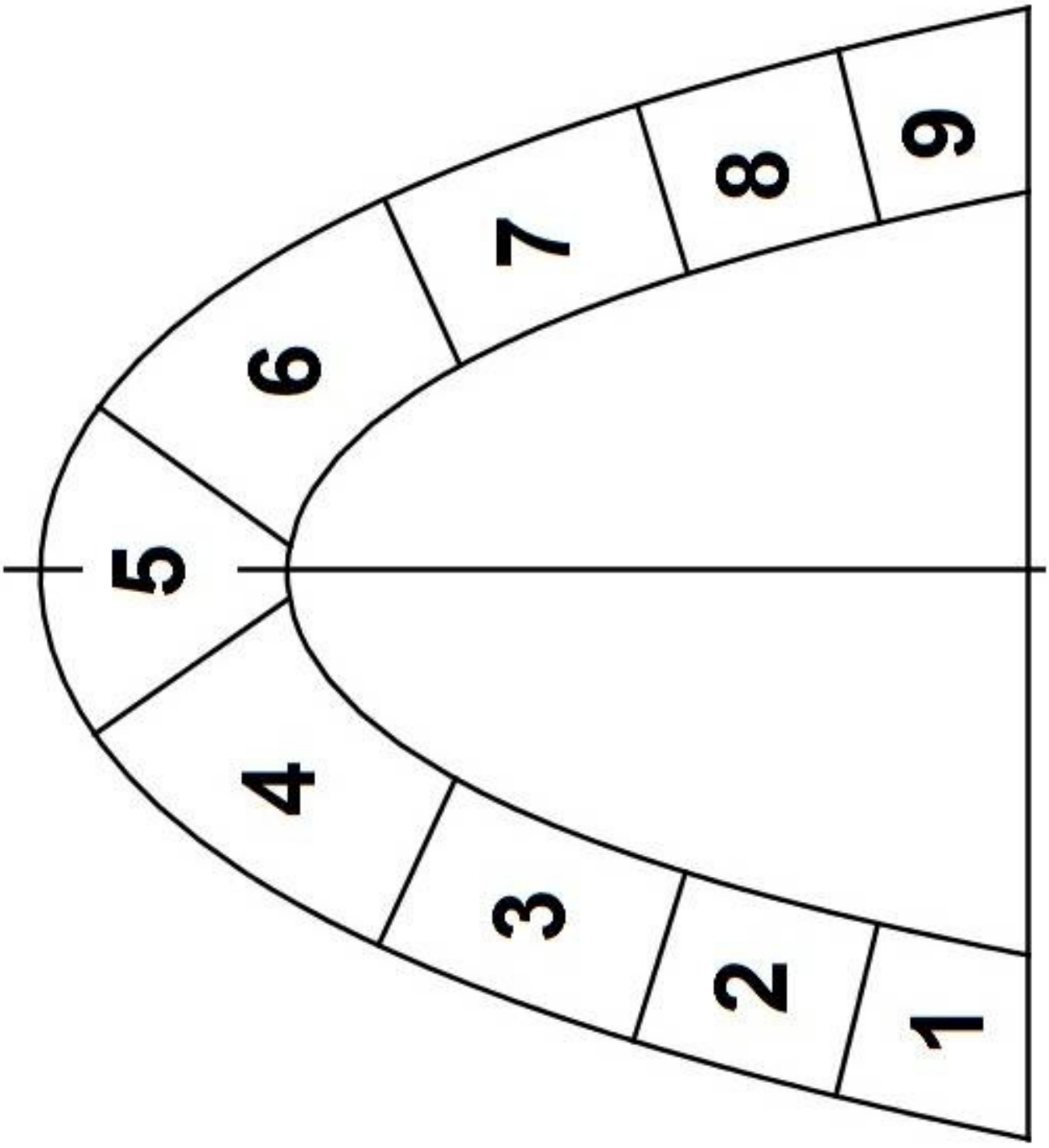
ARC CATENARI O CATENÀRIA FORMADA PER 9 PECES

Imatge 5. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

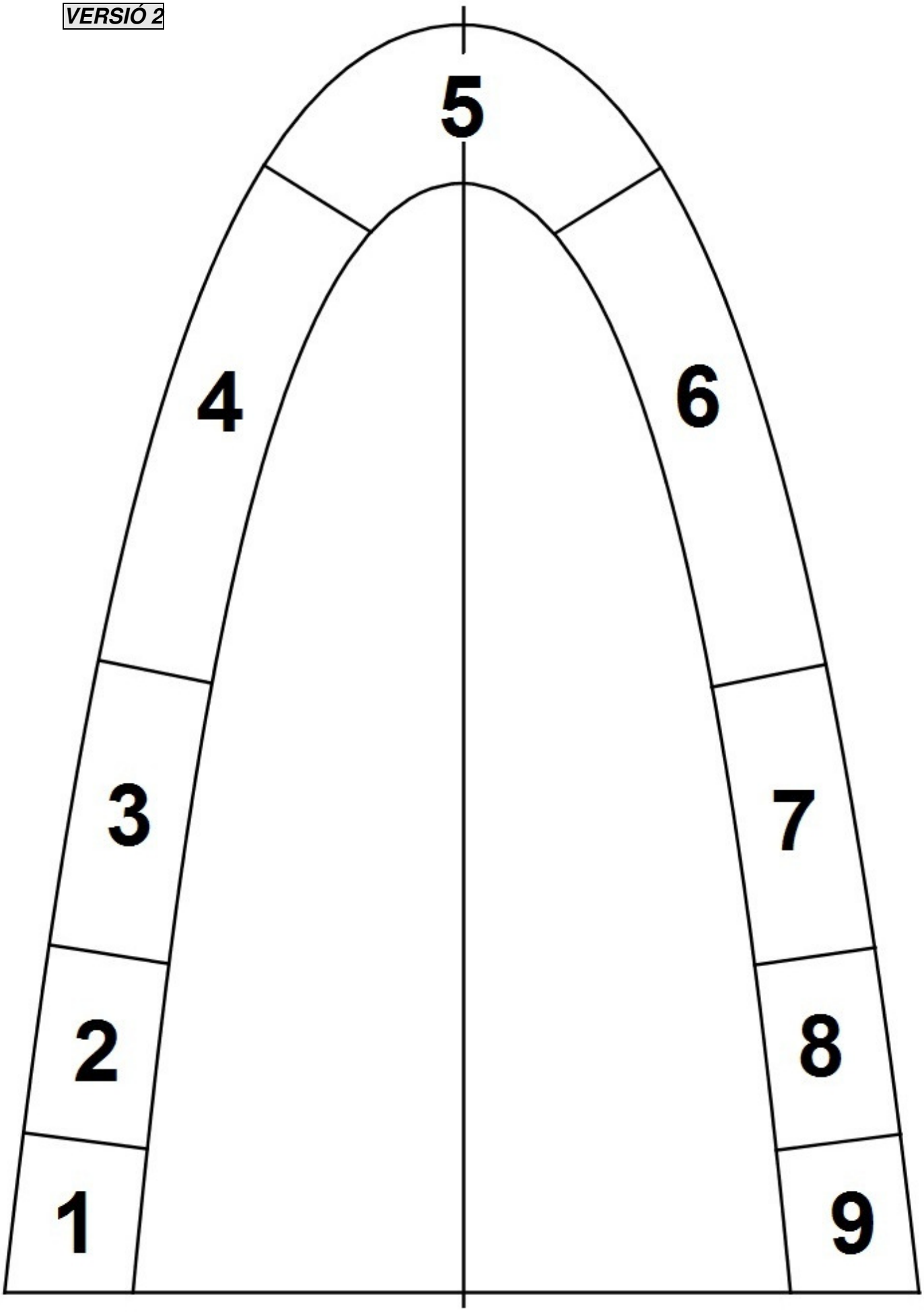
Imatge 6. Construcció real. Marina Agudelo (2015)

Imatge 7. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

VERSIÓ 1



VERSIÓ 2



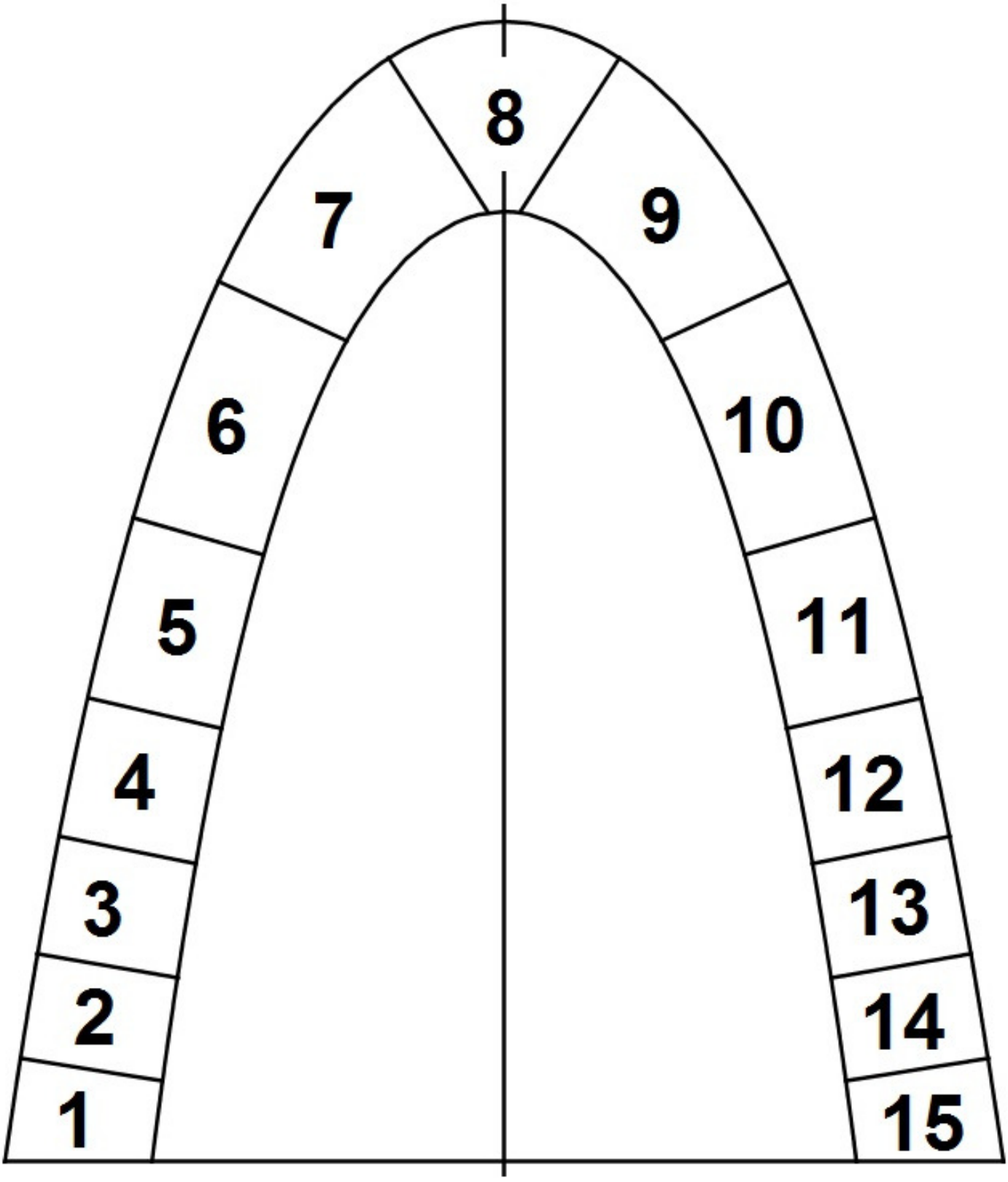
ARC CATENARI O CATENÀRIA FORMADA PER 15 PECES

Imatge 8. Construcció real. Marina Agudelo (2015)

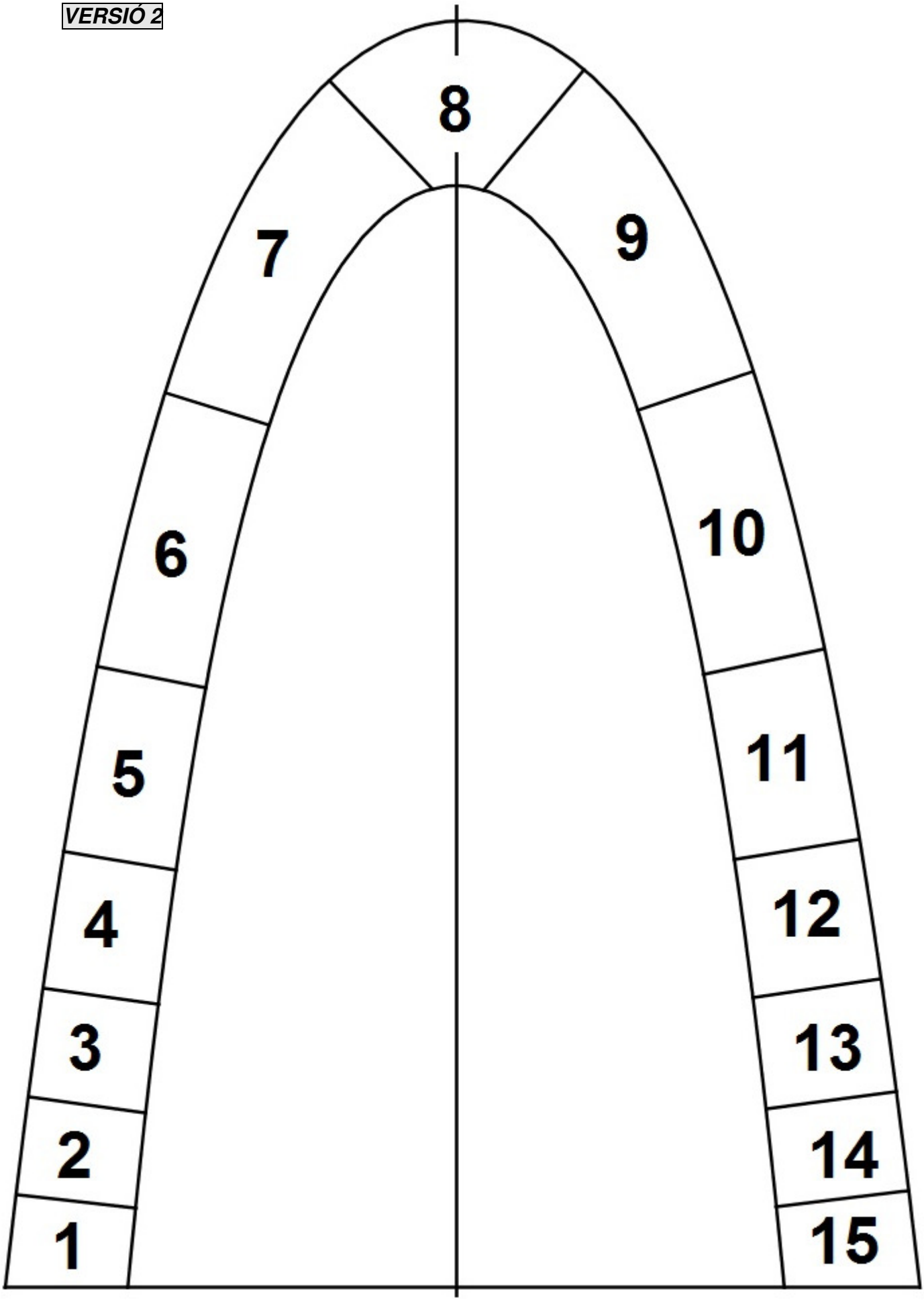
Imatge 9. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 10. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

VERSIÓ 1

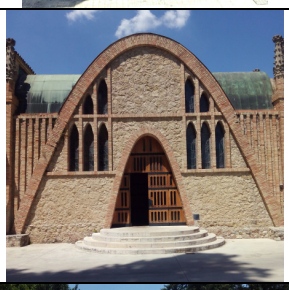


VERSIÓ 2



Tercera proposta d'activitat:

- A continuació us proposem una sèrie de fotografies de diferents arcs. Marca quins d'aquests es tracten d'arcs catenaris o parabòlics i quins de mig punt:

	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**
	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**
	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**
	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**
	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**
	☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**		☐ **Arc Catenari / Parabòlic** ☐ **Arc de mig punt**

Quarta proposta d'activitat:

Fes les següents activitats proposades:

a) Digues alguns exemples on poder trobar arcs d'aquest tipus.

b) Busca arcs catenaris o parabòlics i de mig punt en la teva localitat on vius, serà una manera divertida de fixar-te amb aquests arcs.

Cinquena proposta d'activitat:

- Una catenària s'assembla molt a una paràbola. Dibuixa una catenària i una paràbola amb el programa GeoGebra. Podries explicar quina diferència hi trobes?

PER SABER-NE MÉS:

- Tipus d'arcs → http://ca.wikipedia.org/wiki/Arc_(arquitectura)

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Arc de mig punt

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

Definirem el següent vocabulari utilitzat en aquest mòdul:

- Arc de mig punt: també anomenat **arc rodó** és un arc que dibuixa mitja circumferència amb un únic centre, per la qual cosa l'alçada és la meitat exacta de l'amplada. **L'equació d'una circumferència** de centre (a,b) i radi R és la següent:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços d'expressar tant en oral com en escrit tot els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència artística i cultural.
  L'apreciació de les matemàtiques tenen a veure amb l'art i l'actitud davant el fet cultural i, en particular, de l'artístic.

- Competència matemàtica.
  Pels conceptes i metodologies matemàtiques que es treballen.

- Competència d'autonomia i iniciativa personal.
  Saber treballar amb la resta de companys.

- Competència social i ciutadana.
  És una activitat per més d'una persona, és a dir, per fer-se en grup.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Arc de mig punt: aquest tipus d'arc va començar a usar-se a Mesopotàmia (arquitectura neobabilònica) durant el tercer mil·leni aC. Pel que sembla, de l'arquitectura etrusca va

passar a l'arquitectura romana, que el va difondre per Europa i el Mediterrani. És característic de l'arquitectura romana i de tots els seus germans, entre ells el romànic. Antigament solia estar format per dovelles d'adob, maons o pedra.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunten unes plantilles de l'arc de mig punt format per 9 peces, que únicament caldrà imprimir a mida DIN A3, per tal que l'arc sigui més gran.

Per a la construcció del mòdul original necessitarem el següent material:

- una placa de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN" amb un gruix d'uns 4 centímetres, perquè pugui anar bé per a la construcció;
- agulles de cap de cosir, per subjectar la plantilla de paper;
- un cúter, per tallar la placa; i
- una pintura acrílica, per pintar les peces.

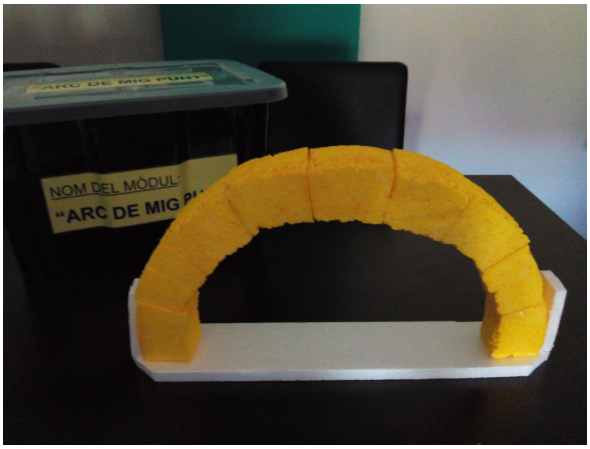
Passos que s'han de seguir:

- Donar a cada alumne una plantilla de l'arc de mig punt, i retallar-lo per l'interior i l'exterior de l'arc.
- Clavar amb les agulles de cap la plantilla a la placa de porexpan.
- Amb l'ajuda del cúter tallar el contorn de l'arc amb molta cura.
- Seguidament, tallar cada una de les parts de l'arc de mig punt.
- Finalment, pintar les peces.
- Amb la part sobrant de porexpan, tallar dues peces rectangulars perquè serveixin de suport per a l'arc de mig punt, com el del museu. Aquestes dues peces les podem enganxar a una tira de cartró plana o bé directament a la taula, amb l'ajuda de la cinta adhesiva de velcro. Aquestes peces són molt importants i necessàries, ja que són les que serveixen de conforts en l'arquitectura romànica.

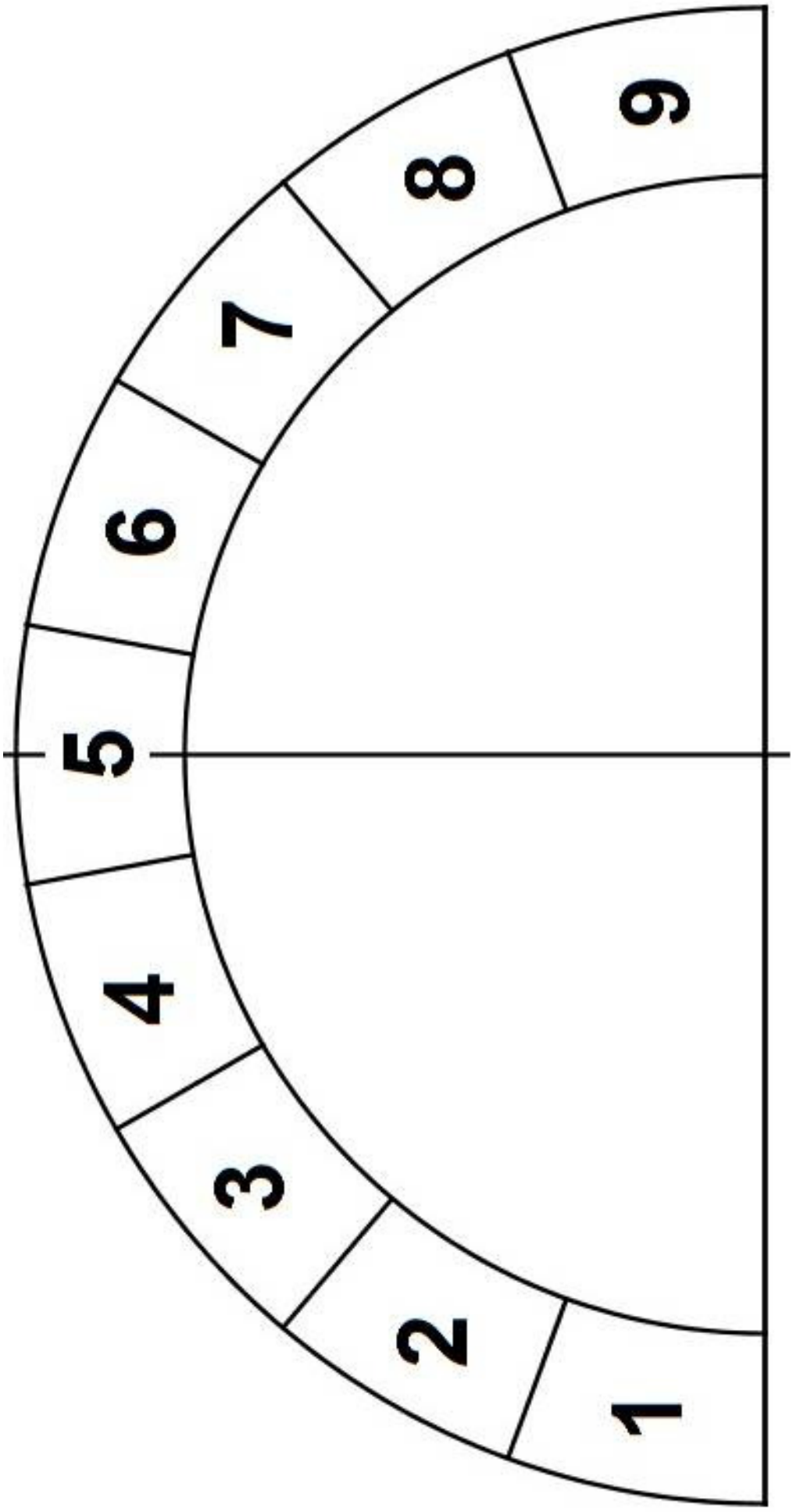
Aquesta construcció és una mica complexa, ja que es necessiten una sèrie de materials i eines, que potser a l'aula no tinguin. Es podria fer la construcció com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia.

Indicació → *estaria bé, fer també el mòdul de l'arc catenari o catenària ja que tots dos estan molt relacionats. Veieu la guia didàctica corresponent a aquest mòdul.*

Imatge 11. Construcció real. Marina Agudelo (2015).



Imatge 12. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

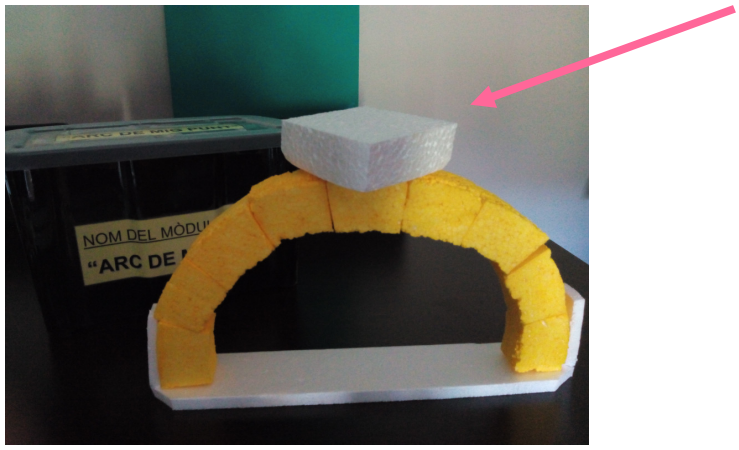

9
8
7
6
5
4
3
2
1

ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

Primera proposta d'activitat:

- Utilitza la part sobrant de la placa, o algun altre retall que tinguis per casa (ha de ser una superfície plana), i prova que col·locant aquesta nova peça sobre de l'arc, aquest es manté intacte i aguanta el pes.



Imatge 13. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

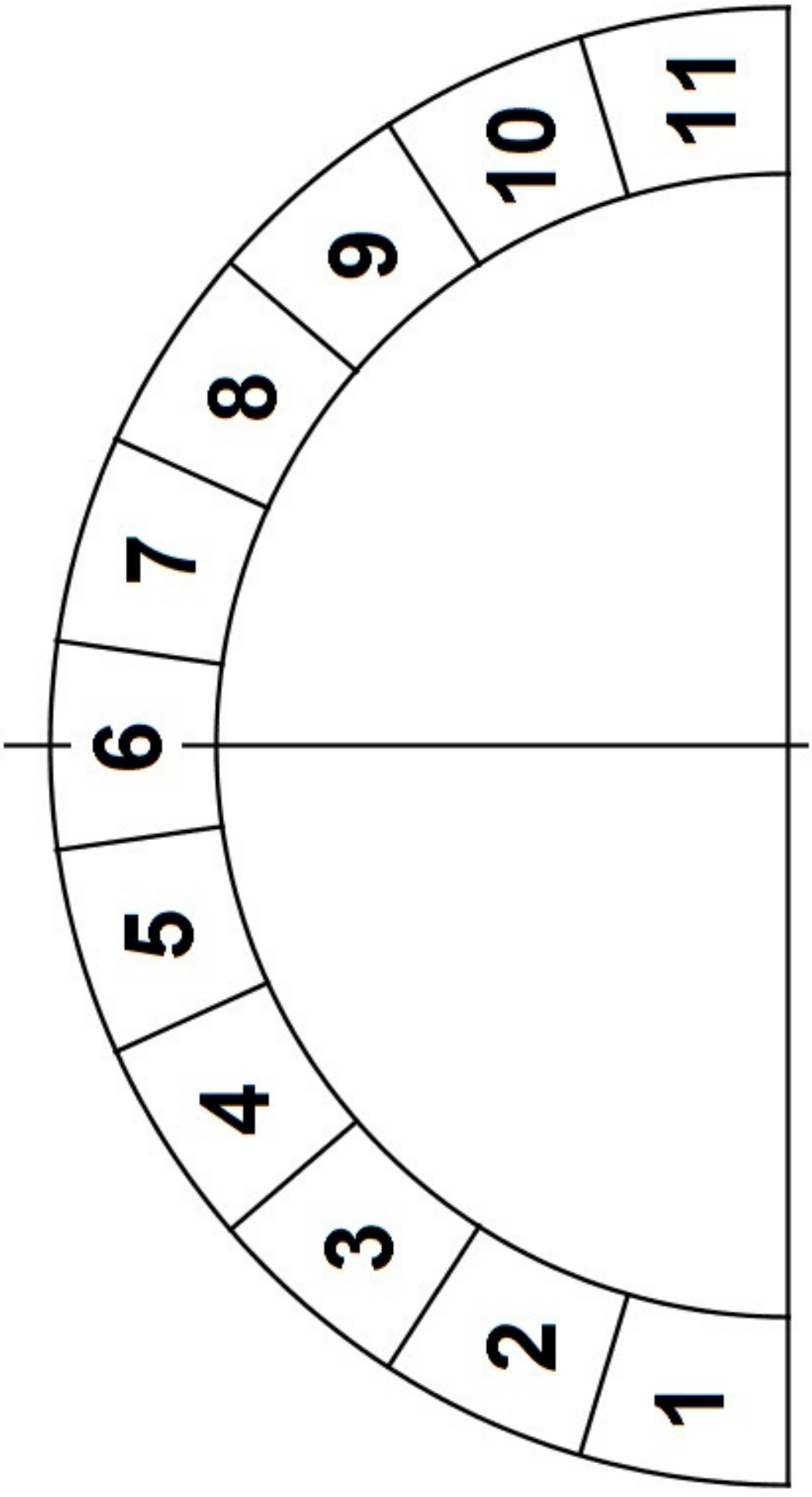
Segona proposta d'activitat:

- A continuació, s'adjunten una plantilla d'un arc de mig punt format per 11 peces. Els alumnes també poden intentar crear amb l'ajuda del GeoGebra diversos arcs de mig punt amb diferents nombres de peces.

ARC DE MIG PUNT FORMAT PER 11 PECES

Imatge 14. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 15. Construcció real. Marina Agudelo (2015).


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Indicació → *es pot utilitzar la tercera i quarta proposta d'activitats de la guia didàctica de l'arc catenari o catenària, ja que també fa referència a aquests arcs.*

Cinquena proposta d'activitat:

- L'arc de mig punt és un exemple d'arc que té un sol centre. Busca informació sobre altres arcs que tinguin dos i tres centres, com per exemple l'arc apuntat o ogival i l'arc carpanell. Construeix amb cartolina un arc de cada tipus per a la part superior de la porta de l'aula.

PER SABER-NE MÉS:

- Tipus d'arcs → http://ca.wikipedia.org/wiki/Arc_(arquitectura)

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Còniques

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

- Cercle: és el lloc geomètric del pla que inclou els punts que estan a una distància inferior o igual de la llargada d'un segment determinat anomenat **radi** respecte a un punt fix determinat anomenat **centre**. L'equació corresponent del cercle de centre (a,b) i radi R és:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

- El·lipse: és el lloc geomètric dels punts del pla per als quals és constant la suma de les distàncies a dos punts interiors fixos anomenats **focus**, dels quals depèn l'excentricitat de l'el·lipse. L'equació canònica de l'el·lipse és:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Paràbola: és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten alhora d'un determinat punt fix anomenat focus i d'una determinada recta anomenada directriu. La recta perpendicular a la directriu que passa pel focus de la paràbola s'anomena **eix** de la paràbola. El punt de la paràbola que talla l'eix s'anomena **vèrtex** de la paràbola. La seva equació és la següent:

$$y=ax^2+bx+c$$

- Hipèrbola: es defineix com el lloc geomètric dels punts del pla per als quals és constant la diferència de les distàncies a dos punt fixos denominats focus. La seva equació és:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

- Con d'Apol·loni: és un con on apareixen cada una de les seccions d'aquest: cercle, el·lipse, paràbola i hipèrbola.

- Propietats focals de les còniques:
  - De la **paràbola**: en cada punt de la paràbola, l'angle que forma la recta tangent amb el segment que uneix el punt amb el focus, coincideix amb

l'angle que forma amb la recta paral·lela a l'eix de la paràbola que passar pel punt considerat.

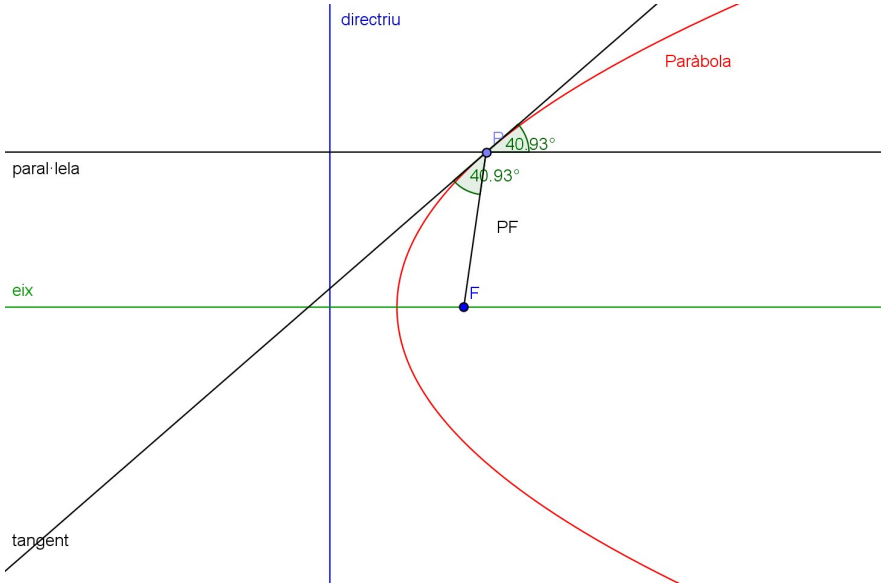


Figura 1. Propietat focal de la paràbola amb GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

- De l'**el·lipse**: en cada punt de l'el·lipse, la recta tangent forma angles iguals amb els segments que uneixen el punt amb els focus.

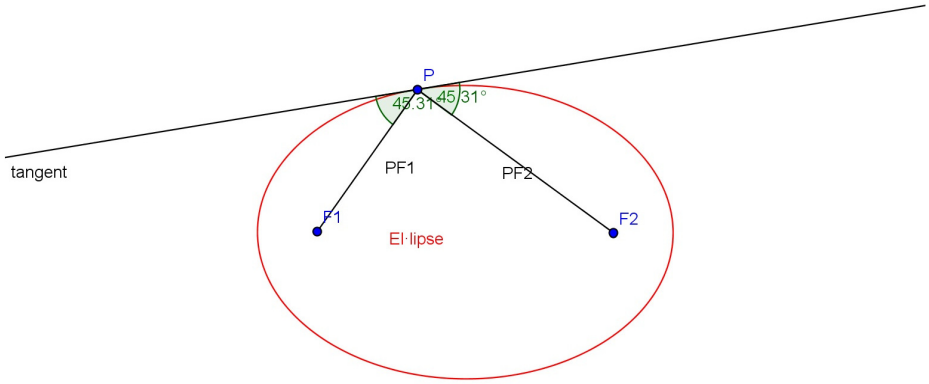


Figura 2. Propietat focal de l'el·lipse amb GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

- De la **hipèrbola**: en cada punt de la hipèrbola, la recta tangent forma angles iguals amb els segments que uneixen el punt amb els focus.

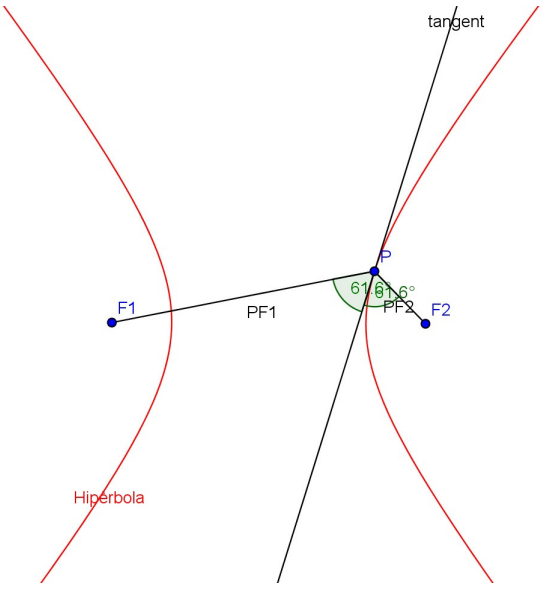


Figura 3. Propietat focal de la hipèrbola amb GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

- Corba de Lissajous: és la família de corbes descrites per les següents equacions paramètriques, $\begin{cases} x = a \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases}$.
  - Quan $\omega = 1$ i $\delta = 0$, obtenim una **recta**.
  - Quan $a = b$, $\omega = 1$ i $\delta = \frac{\pi}{2}$, aleshores obtenim un **cercle**.
  - Quan $a \neq b$, $\omega = 1$ i $\delta = \frac{\pi}{2}$, obtenim una **el·lipse**.
  - Quan $\omega = 2$ i $\delta = \frac{\pi}{2}$, aleshores obtenim una **paràbola**.

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència artística i cultural.
  L'apreciació de les matemàtiques tenen a veure amb l'art i l'actitud davant el fet cultural i, en particular, de l'artístic.

- Competència matemàtica.
  L'alumne ha de tenir els conceptes matemàtics clars i en ment.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i els errors a cada pas.

- Competència d'autonomia i iniciativa personal.
  Comporta la presa de decisions per arribar a completar el repte, a més, amb l'ajuda dels monitors, es poden plantejar preguntes i ampliar coneixements.

- Competència social i cultura.
  El mòdul permet treballar en petits i grans grups d'alumnes.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Apol·loni de Perga: Apol·loni de Prega (al voltant de 269 aC – al voltant de 190 aC) va ser un geòmetra grec famós per la seva obra *Sobre les seccions còniques*. Va ser Apol·loni qui va donar els noms **el·lipse, paràbola** i **hipèrbola** a les figures que coneixem avui dia.

Va néixer a Perga, a Pamfilia (actualment Turquia), però no sabem gran cosa de la seva vida. Pels prefacis dels seus propis llibres sabem que va viure durant cert temps a Alexandria, Pèrgam i Efes. Segons Pappos d'Alexandria, va estudiar a Alexandria sota deixebles d'Euclides, fet que no resulta gens evident. El que sembla cert és que va escriure la seva obra poc després del 200 aC.

A part de *Sobre les seccions còniques*, que en parlarem a continuació, sabem per autors posteriors que Apol·loni va escriure altres llibres de matemàtiques i astronomia. Actualment tots estan perduts i només coneixem el seu contingut parcialment per les cites dels autors dits anteriorment.

El llibre de les *Còniques* d'Apol·loni pot considerar-se el cim de la geometria grega. Altres matemàtics grecs posteriors (com Menecme, Euclides, o Arquimedes) havien parlat de les seccions còniques, però Apol·loni va ser el primer a sistematitzar tots els coneixements que es tenien sobre les corbes còniques: paràbola, hipèrbola i el·lipse.

L'obra constava de vuit llibres, però només els quatre primers es van preservar en la tradició hel·lenista i bizantina. Durant l'Edat Mitjana i bona part de l'Època Moderna, només es coneixien els quatre primers llibres. En el segle XVII es va trobar una traducció àrab dels llibres V, VI, VII que s'havia fet a Bagdad per ordre dels germans Banu Mussa en el segle IX. En llibre VIII, definitivament desaparegut, només s'ha pogut reconstruir a partir dels escrits s de Pappos i el comentari d'Eutoci.

Cobra de Lissajous: aquesta família de corbes va ser investigada per **Nathaniel Bowditch** el 1815, anys més tard i amb més detall per **Jules Antoine Lissajous** el 1857.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

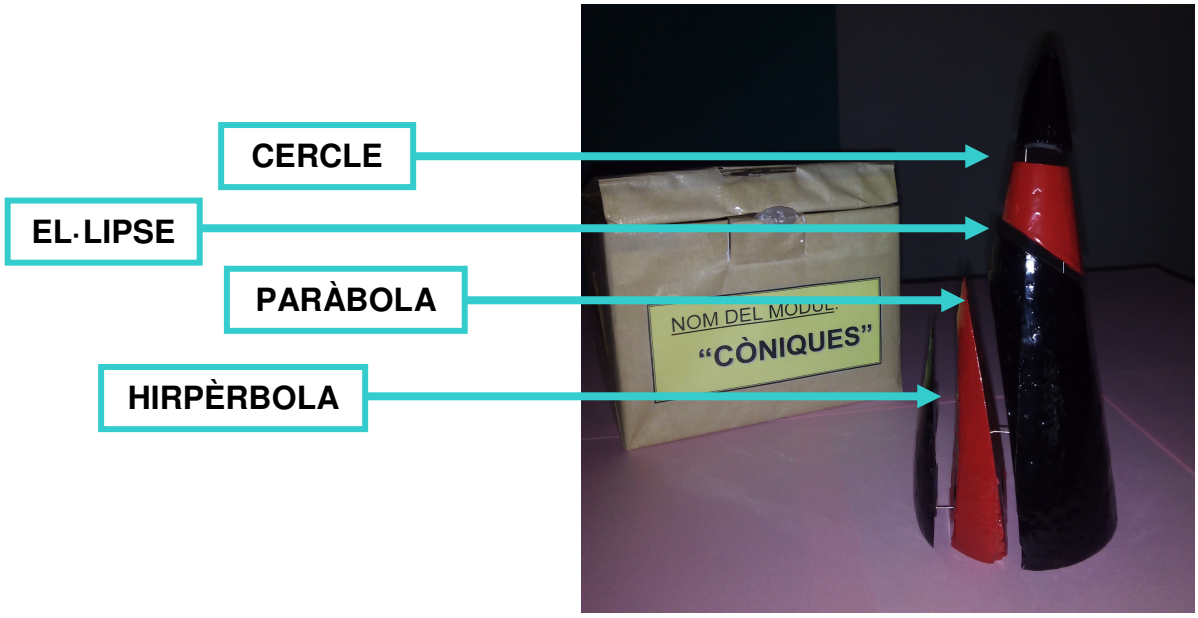
La construcció d'aquest mòdul és molt complicada i gens senzilla. Però si que podem fer les **Seccions de les còniques (Con d'Apol·loni)**.

La manera de realitzar-ho és molt senzilla. Només cal que els alumnes comprin un con de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN", i facin les seccions d'aquest, és a dir, el cercle, l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola. I un cop fetes, es poden pintar de dos colors diferents, amb pintura acrílica; i per ajuntar-les podem utilitzar cinta imantada i xinxetes metàl·liques.

Imatge 4. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 5. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 6. Construcció real. Marina Agudelo (2015).



Imatge 7. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

Primera proposta d'activitat:

CÒNIQUES AMB EL GEOGEBRA:

Es tracta d'una activitat simple, tecnològica i molt eficient. Consisteix a obtenir una **el·lipse**, una **hipèrbola** i una **paràbola** mitjançant el programa GeoGebra.

Aquesta activitat es pot fer de manera individual, o en grups de tres alumnes (cadascun dels membres realitzaria una de les tres seccions).

A continuació s'adjunten les fitxes de l'activitat per entregar als alumnes.

EL·LIPSE amb el GeoGebra

L'activitat consisteix a realitzar una **el·lipse** amb el programa GeoGebra.

Passos a seguir:

1. Feu una circumferència de centre A i un punt B, aquest últim no el mostreu.
2. Col·loqueu un punt C sobre la circumferència i activeu l'opció d'animar l'objecte.
3. Col·loqueu un altre punt D situat a l'interior de la circumferència, allunyat del centre.
4. Feu la mediatriu dels punt C i D, i activeu el rastre d'aquest objecte.
5. Ara només cal, que activeu l'animació i obtindreu una **el·lipse** de focus A i D.

Comprovació:

- Comprova que la suma de les distàncies de qualsevol punt de l'el·lipse als focus Ai D, és sempre constant.

Vegeu el resultat que obtindreu:

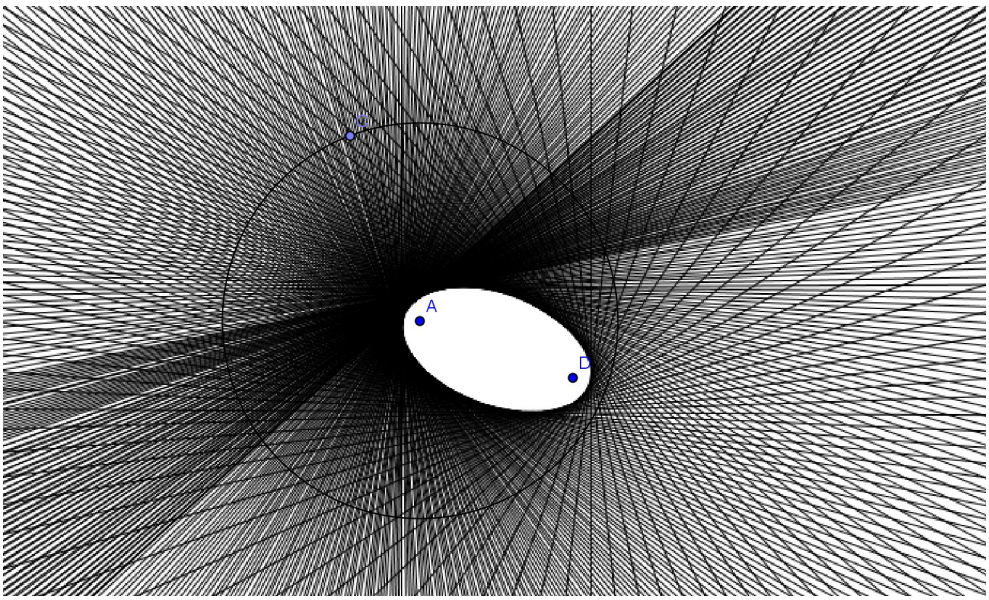


Figura 1. El·lipse creada amb el GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

HIPÈRBOLA amb el GeoGebra

L'activitat consisteix a realitzar una **hipèrbola** amb el programa GeoGebra.

Passos a seguir:

1. Feu una circumferència de centre A i un punt B, aquest últim no el mostreu.
2. Col·loqueu un punt C sobre la circumferència i activeu l'opció d'animar l'objecte.
3. Col·loqueu un altre punt D situat a l'exterior de la circumferència, no massa allunyat de la circumferència.
4. Feu la mediatriu dels punt C i D, i activeu el rastre d'aquest objecte.
5. Ara només cal, que activeu l'animació i obtindreu una **hipèrbola** de focus A i D.

Comprovació:

- Comprova que la diferència de les distàncies de qualsevol punt de la hipèrbola als focus A i D (amb valor absolut), és sempre constant.

Vegeu el resultat que obtindreu:

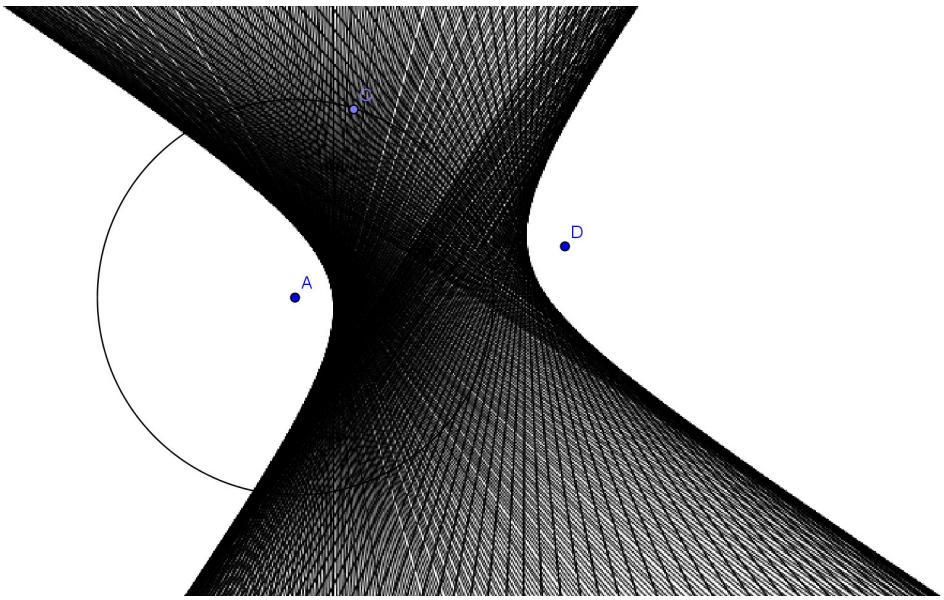


Figura 1. Hipèrbola creada amb el GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

PARÀBOLA amb el GeoGebra

L'activitat consisteix a realitzar una **paràbola** amb el programa GeoGebra.

Passos a seguir:

1. Feu una recta amb dos punts A i B, i no els mostreu.
2. Col·loqueu un punt C sobre la recta i activeu l'opció d'animar l'objecte.
3. Col·loqueu un altre punt D situat a fora de la recta.
4. Feu la mediatriu dels punt C i D, i activeu el rastre d'aquest objecte.
5. Ara només cal, que activeu l'animació i obtindreu una **paràbola** de focus el punt D i de directriu la recta.

Comprovació:

- Comprova que la distància d'un punt de la paràbola al focus D, coincideix amb la distància d'aquest punt a la recta.

Vegeu el resultat que obtindreu:

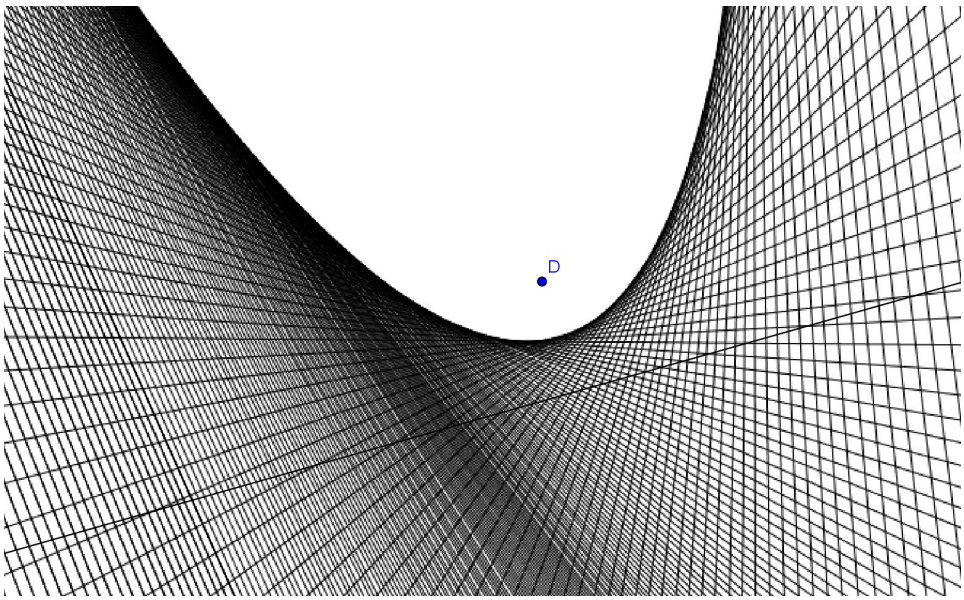
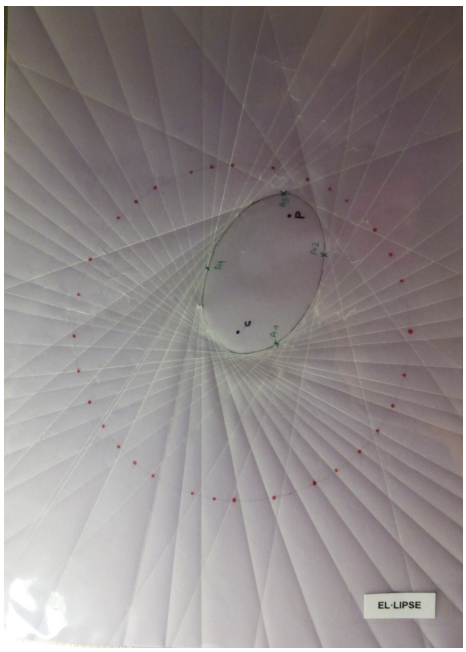


Figura 1. Paràbola creada amb el GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

Segona proposta d'activitat:

Les construccions fetes a la proposta d'activitat anterior es poden fer també doblegant paper vegetal. És una manera molt visual i manipulativa de veure les diferents seccions còniques. Aquesta activitat va ser creada pel membre del MMACA, Anton Aubanell, la fitxa corresponent la podem trobar en *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*, a la següent pàgina web http://www.xtec.cat/~aaubanel/

Observem el resultat que s'obtindria utilitzant aquest procediment (**imatges de la construcció de l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola doblegant paper. Marina Agudelo (2015)**).



A continuació, s'adjunta una fitxa similar a la de l'Anton Aubanell.

CÒNIQUES DOBLEGANT PAPER VEGETAL

Per fer aquesta activitat necessitareu el següent **MATERIAL:**

- 3 fulls de paper vegetal,
- un compàs,
- un regle, i
- un escaire.

L'activitat consisteix a obtenir una **el·lipse**, una **hipèrbola** i una **paràbola** doblegant un full de paper.

1er FULL:

1. Preneu un full de paper vegetal i dibuixeu-hi:
    - una circumferència d'entre 6 cm i 10 cm de radi, i maqueu el seu centre amb una C, i
    - un punt interior, més aviat allunyat del centre, que li direm P.
2. Assenyaleu sobre la circumferència diversos punts (uns 30) tan repartits com pugueu.
3. Doblegueu el paper de manera que el punt P se superposi a un del punts assenyalats. Marqueu bé el séc prement-lo fort.
4. Feu l'operació anterior repetidament per a cadascun dels punts que heu assenyalat sobre la circumferència.
5. Observeu que el conjunt de sécs delimiten en el seu interior una corba tancada, respecte de la qual cada séc representa una recta tangent. Una corba obtinguda d'aquesta manera s'anomena *envolupant* del conjunt de les rectes que la delimiten.
6. Resseguiu acuradament amb llapis els punts de l'envolupant obtinguda.
7. La corba que acabeu de marcar és una ***el·lipse*** que té els seus focus en els punts P i C. Escolliu quatre punts a l'atzar (A1, A2, A3 i A4) sobre l'el·lipse i amideu les seves distàncies a P i a C. Comprovareu que, llevat dels errors de mesura, la suma és constant.

2on FULL:

1. Preneu un nou full de paper vegetal i dibuixeu-hi:

    - una circumferència d'entre 5 cm i 8 cm de radi, i marqueu el seu centre amb una C, i

    - un punt exterior, no massa allunyat de la circumferència, que li direm P.

2. Assenyaleu sobre la circumferència diversos punts (uns 30) tan repartits com pugueu i doblegueu, repetidament, el paper de manera que el punt P se superposi cada vegada a un dels punts assenyalats. Marqueu bé el séc.

3. Observareu que l'envolupant del conjunt de sécs és una corba amb dues branques. Repasseu-la acuradament amb llapis.

4. La corba que acabeu de marcar és una ***hipèrbola*** que té els seus focus en els punts P i C. Escolliu quatre punts a cada branca (A1, A2, A3 i A4, B1, B2, B3 i B4) i amideu les seves distàncies a P i a C. Comprovareu que la diferència, presa en valor absolut, és constant (llevat d'errors de mesura).

3r FULL:

1. Preneu un nou full de paper vegetal i dibuixeu-hi:

    - una recta que direm r, i

    - un punt exterior a la recta que direm P.

2. Assenyaleu sobre la recta diversos punts (uns 30) tan repartits com pugueu i doblegueu, repetidament, el paper de manera que el punt P se superposi a cadascun dels punts assenyalats. Marqueu bé el séc. Repasseu acuradament l'envolupant del conjunt de sécs.

3. La corba que acabeu de marca és una ***paràbola*** que té per focus el punt P i per directriu la recta r. Escolliu quatre punts de l'atzar sobre la paràbola (A1, A2, A3 i A4), mesureu les seves distàncies a P i a r (podeu emprar l'escaire) i observeu que coincideixen.

Tercera proposta d'activitat:

CÒNIQUES MITJANÇANT UNA LLANTERNA:

Es tracta de realitzar les seccions còniques del con, és a dir, el **cercle**, l'**el·lipse**, la **paràbola** i la **hipèrbola**; mitjançant una llanterna (lot). El procediment és molt senzill, únicament el que s'ha de fer és acostar la llanterna a la paret i segons la inclinació que es faci, apareixerà a la paret les diferents seccions.

Aquesta activitat es pot fer de manera individual, o bé en parelles. En el cas que es faci en parelles, a més a més, d'observar les diferents seccions del con, es podria copiar la secció en un full de paper. El procediment seria que un alumne subjecta la llanterna i l'altre col·loca el full de paper a la paret i ressegueix amb un llapis la secció corresponent. D'aquesta manera, se li pot demanar a l'alumne que identifiqui els focus corresponents a l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola.

A continuació s'adjunta la fitxa de l'activitat per entregar als alumnes.

Còniques mitjançant una LLANTERNA

L'activitat consisteix a representar les diferents seccions còniques (**cercle, el·lipse, paràbola** i **hipèrbola**) amb una llanterna.

Figura 1. Llanterna.
Marina Agudelo (2015).

(En el cas que l'activitat es realitzi amb parelles, en cadascun dels passos, caldrà calcar la cònica de la llanterna amb un paper, i en els casos de l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola, identificar els focus corresponents).

Passos a seguir:

1. Ubiqueu-vos en una habitació amb poca llum.
2. Acosteu la llanterna de manera perpendicular a la paret, així obtindreu un **cercle**.

Figura 2. Cercle creat amb la llanterna.
Marina Agudelo (2015).

3. Seguidament, inclineu lleugerament la llanterna amunt o avall; i d'aquesta manera haureu aconseguit una **el·lipse**.

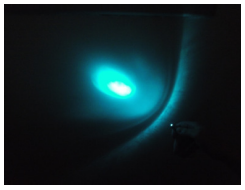


Figura 3. El·lipse creada amb la llanterna.
Marina Agudelo (2015).

4. Col·loqueu la llanterna paral·lela a la paret, obtindreu una **paràbola**.

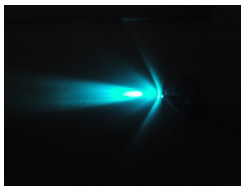


Figura 4. Paràbola creada amb la llanterna.
Marina Agudelo (2015).

5. Amb la posició anterior, inclineu lleugerament la llanterna i així obtindreu una **hipèrbola**.

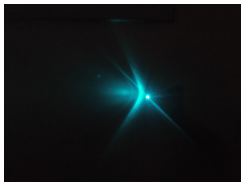


Figura 8. Hipèrbola creada amb la llanterna.
Marina Agudelo (2015).

Quarta proposta d'activitat:

CORBES DE LISSAJOUS MITJANÇANT UN PÈNDOL:

Es tracta d'una activitat una mica complexa, però molt divertida de fer. L'objectiu consisteix a crear **corbes de Lissajous** amb sorra, mitjançant un **pèndol**.

Es podria fer com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia i/o física.

A continuació s'adjunta la fitxa de l'activitat per entregar als alumnes.

Corbes de Lissajous mitjançant un PÈNDOL

Per fer aquesta activitat necessitareu el següent **MATERIAL**:

- una caixa resistent sense tapa que el fons d'aquesta sigui de la mida d'un full de paper DIN A4,
- un escaire o angle metàl·lic,
- una ampolla de plàstic de dimensions petites (per exemple, l'ampolla de colònia que s'utilitza als viatges),
- cinta adhesiva,
- cordill,
- estisores,
- un full de paper i
- sorra (per exemple de la platja).

L'activitat consisteix a construir un **pèndol**, que permeti realitzar les **corbes de Lissajous** amb la sorra.

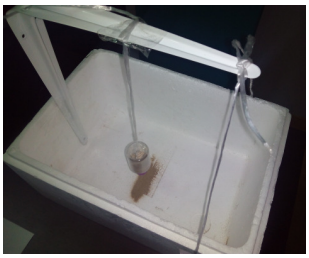
Passos a seguir:

1. Agafeu l'escaire i l'enganxeu amb la cinta adhesiva, pel costat més llarg, al lateral de la caixa.
2. Per altre banda, agafeu l'ampolla de plàstic i li feu dos forats amb les estisores, un al tap (no massa gros, ja que serà per on caigui la sorra) i l'altre a la part inferior de l'ampolla (per on passarà el cordill).
3. Agafeu un tros llarg de cordill (d'uns 50 cm.) i el passeu pel forat de la part inferior de l'ampolla fins arribar a l'altre extrem; feu un nus, de tal manera que quedi a l'interior de l'ampolla i que no s'empassi.
4. Amb la cinta adhesiva enganxeu el cordill de l'ampolla al costat superior de l'escaire, vigilant que quedi a quatre dits del fons de la caixa.
5. Ompliu l'ampolla amb la sorra, la tapeu amb el tap foradat i la deixeu cara amunt perquè no es buidi.
6. Poseu el full de paper el fons de la caixa.
7. Finalment, agafeu l'ampolla plena de sorra, tapant el forat amb un dit i deixeu anar l'ampolla dins la caixa, amb no massa força ja que sinó tocaria a les parets. Així aconseguireu que faci les **corbes de Lissajous**.

Comentaris:

- Si la part superior de l'escaire es mogués lleugerament, caldria subjectar-lo amb un cordill que anés de l'extrem de l'escaire fins a sota de la caixa.
- Si voleu guardar les corbes de Lissajous que fareu, només cal que pinteu de cola el full de paper i procediu amb el pas **7.**

Vegeu el resultat que obtindreu: **(imatges de la creació real, amb el resultats obtinguts. Marina Agudelo (2015)).**



PER SABER-NE MÉS:

- Apol·loni de Prega →
  http://ca.wikipedia.org/wiki/Apol%C2%B7loni_de_Perge
- Corba de Lissajous →
  http://Mathworld.wolfram.com/LissajousCurve.html

  https://ca.wikipedia.org/wiki/Corba_de_Lissajous
- Més material per treballar a l'aula →
  http://apliense.xtec.cat/arc/taxonomy/term/6282

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

De l'octàedre al cub

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

Un políedre regular, políedre platònic o sòlid platònic és un políedre, les cares del qual són polígons regulars iguals i que formen entre ells angles diedres iguals. Hi ha cinc políedres regulars:

- Tetràedre regular: és un políedre de quatre cares, quatre vèrtexs i sis arestes, on cadascuna de les cares són triangles equilàters.
  Quan no ho són, aleshores direm que és un **tetràedre irregular.**

- Octàedre regular: és un políedre de vuit cares, sis vèrtex i dotze arestes, on cadascuna de les cares són triangles equilàters.
  Quan no ho són, aleshores direm que és un **octàedre irregular**.

- Hexàedre regular o cub: és un políedre de sis cares, vuit vèrtexs i dotze arestes, on cadascuna de les cares són quadrats.

- Dodecàedre regular: és un políedre de dotze cares, vint vèrtexs i trenta arestes, on cadascuna de les cares són pentàgons regulars.

- Icosàedre regular: és un políedre de vint cares, dotze vèrtexs i trenta arestes, on cadascuna d eles cares són triangles equilàters.

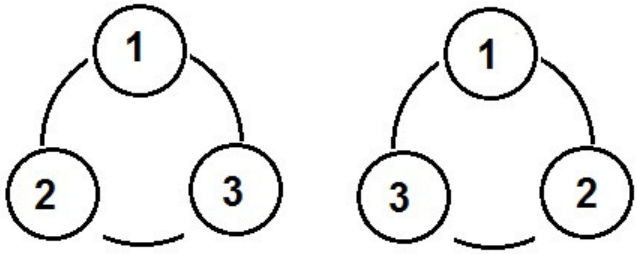
Per calcular el volum del tetràedre regular necessitem conèixer la mesura de la seva aresta, que anomenarem a. Aleshores, mitjançant la següent fórmula podrem calcular el volum:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

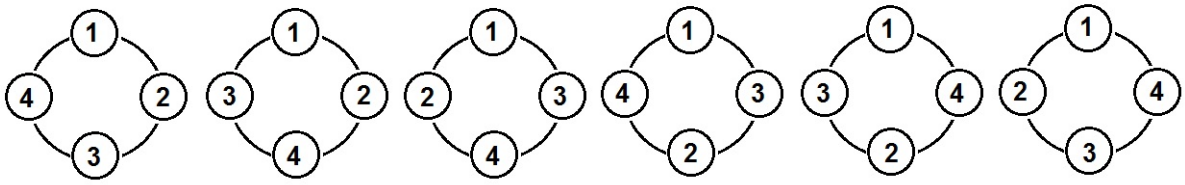
Donat un conjunt finit de n elements, les permutacions es tractarien de cadascuna de les possibles ordenacions de tots els elements d'aquest conjunt, $P_n = n!$.

En canvi, les permutacions circulars es calcularien fent $PC_n = (n-1)!$, ja que les permutacions cícliques dels elements són equivalents a causa que el cercle es pot girar.

Exemple de tres elements:



Exemple de quatre elements:



COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència matemàtica.
  Pels conceptes i metodologies matemàtiques que es treballen.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i els errors a cada pas.

- Competència d'autonomia i iniciativa persona.
  Comporta la presa de decisions per arribar a completar el repte, a més, amb l'ajuda dels monitors, es poden plantejar preguntes i ampliar coneixements.

- Competència social i ciutadana.
  És una activitat per més d'una persona, és a dir, per fer-se en grup.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Stella octangula: Simbòlicament, es pot pensar en la Stella Octangula com una Estrella de David tridimensional. Aquest cos geomètric va ser creat per Leonardo Da Vinci per il·lustrar la *Divina Proportione* (1509) de Luca Pacioli, que l'anomenà *Octocedron Elevatus Vacuus.*

Apareix també a l'obra *Perspectiva Corporum Regularium* de Wentzel Jamnitzer (1568).

En nom d'Stella Octangula li va donar Johannes Kepler en el seu llibre *De Nive Sexangula* (1611).

Apareix també a dues obres de M. C. Escher: amb altres políedres a l'obra *Stars* (1948) i de manera central a l'obra *Doble Planetoid* (1949).

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

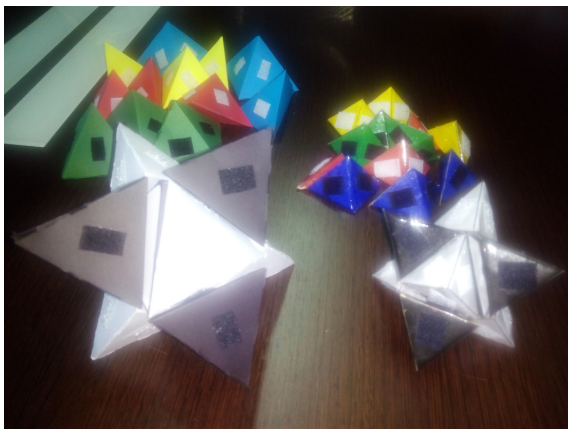
A continuació, s'adjunten uns retallables que permetran als alumnes reconstruir el mòdul original. Hi ha dues maneres d'imprimir-los: directament o bé amb els següent colors:

- **Tetràedre irregular**: un de color blau, un de vermell, un de groc i un de verd.
- **Tetràedre regular**: un de color blanc i un de color negre.
- **Octàedre regular**: un de color blanc, després caldrà pintar de color negre, una cara si una cara no.

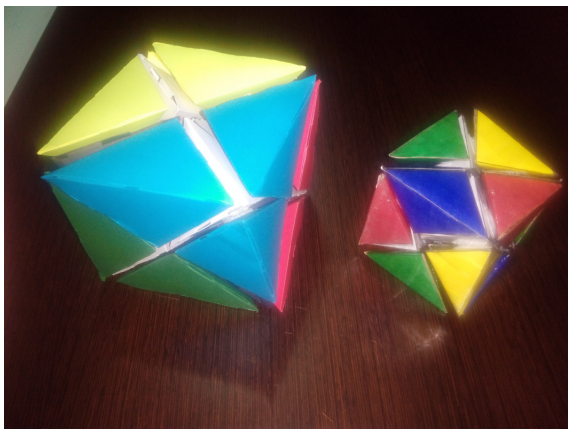
Llavors, tan amb una opció com amb un altre, els alumnes només hauran de retallar pel contorn les figures i per les línies de punts i muntar-los (no fa falta enganxament, ja que porten incorporades unes pestanyes que permeten fer la construcció amb més facilitat). Alhora d'ajuntar les peces, és molt pràctic fer-ho amb cinta adhesiva de velcro, ja que d'aquesta manera permet realitzar el mòdul tal qual l'original.

Imatge 9. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 10. Construcció real. Marina Agudelo (2015).



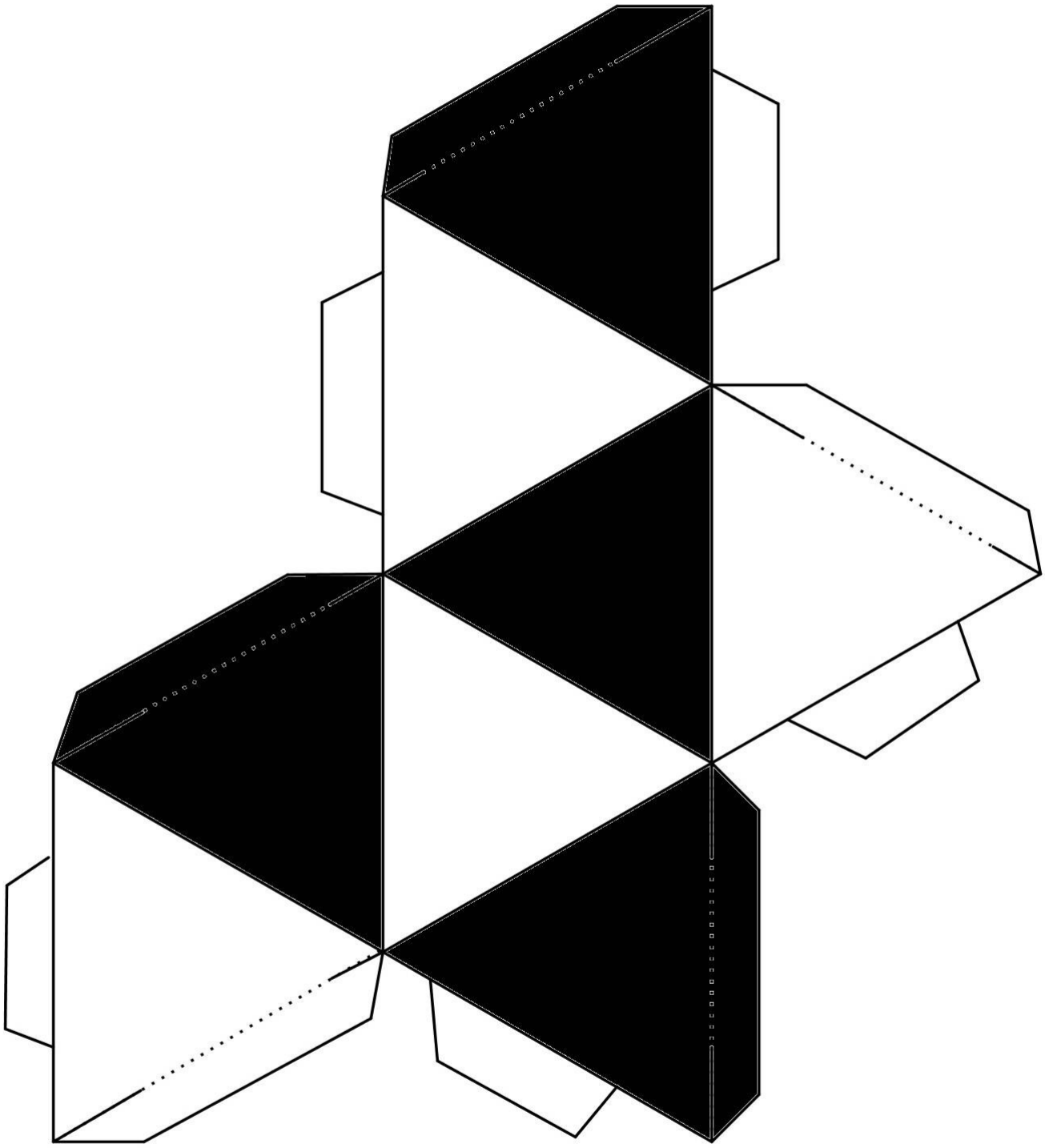
Imatge 11. Construcció real. Marina Agudelo (2015).



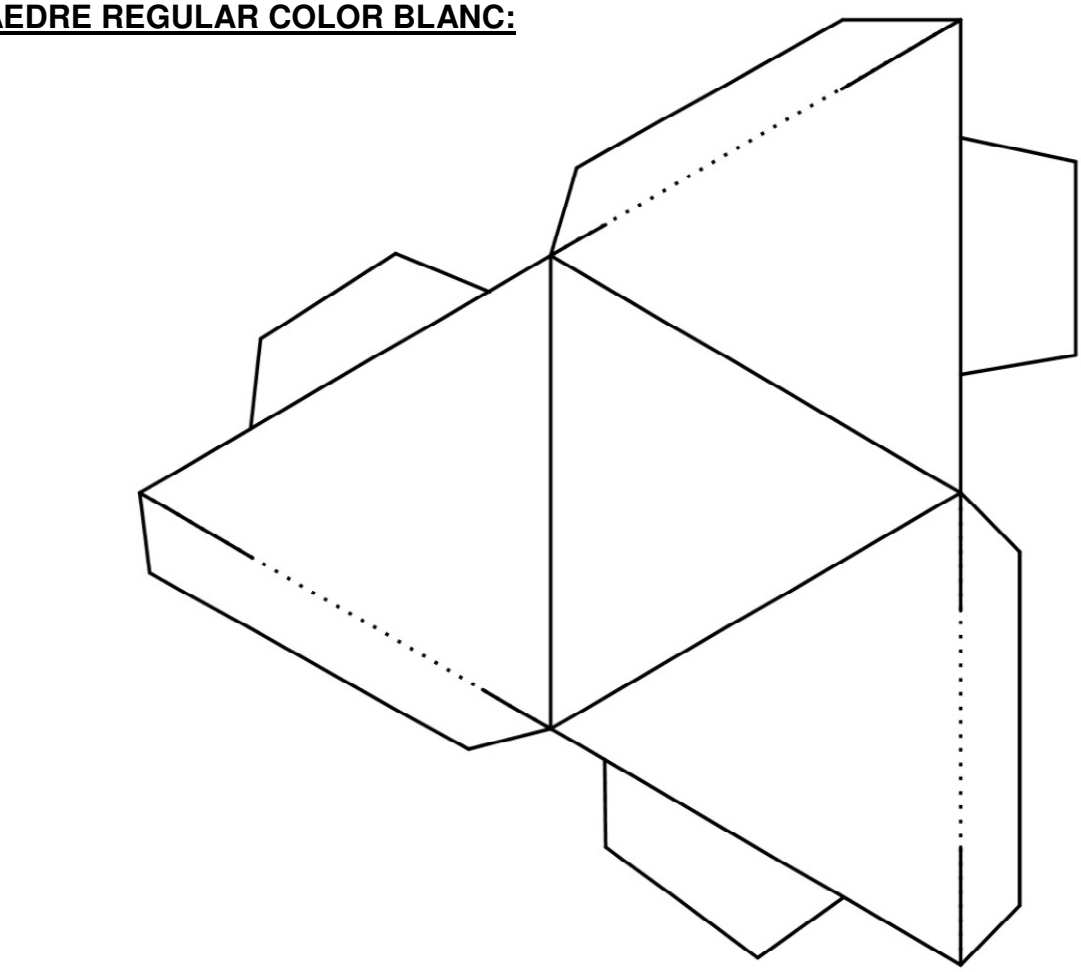
Imatge 12. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

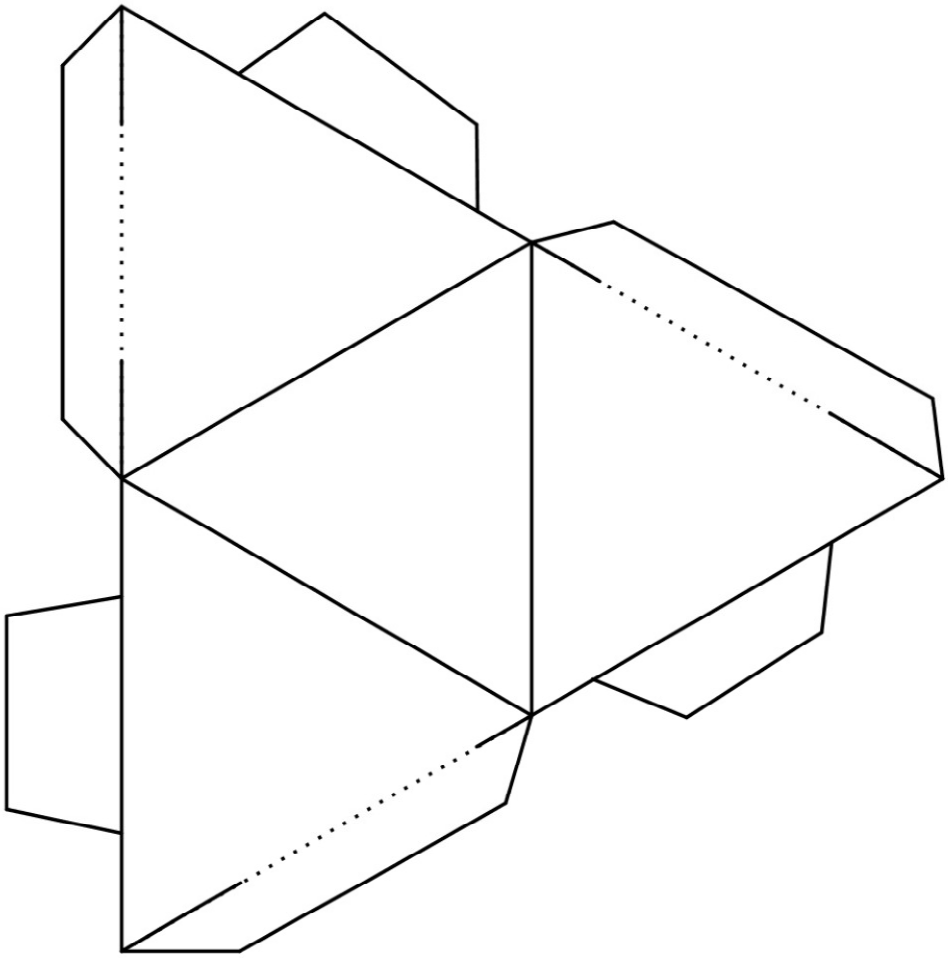
PRIMERA OPCIÓ D'IMPRESSIÓ

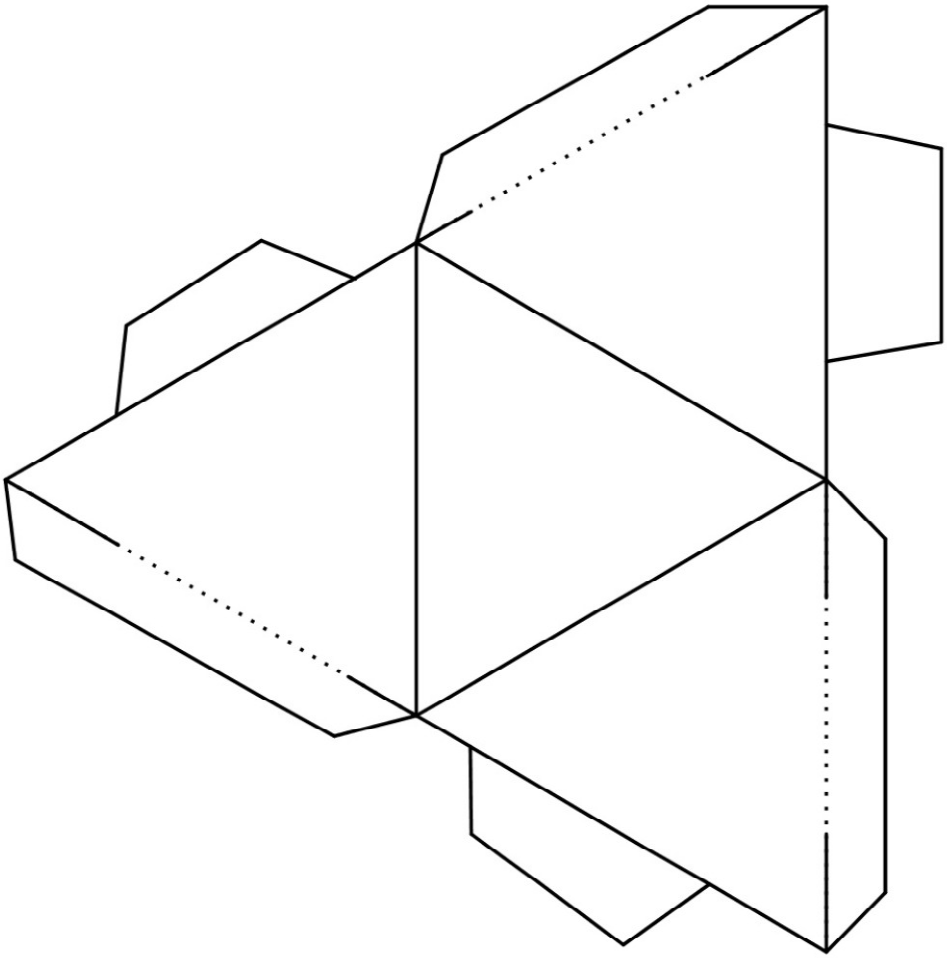
OCTÀEDRE REGULAR:

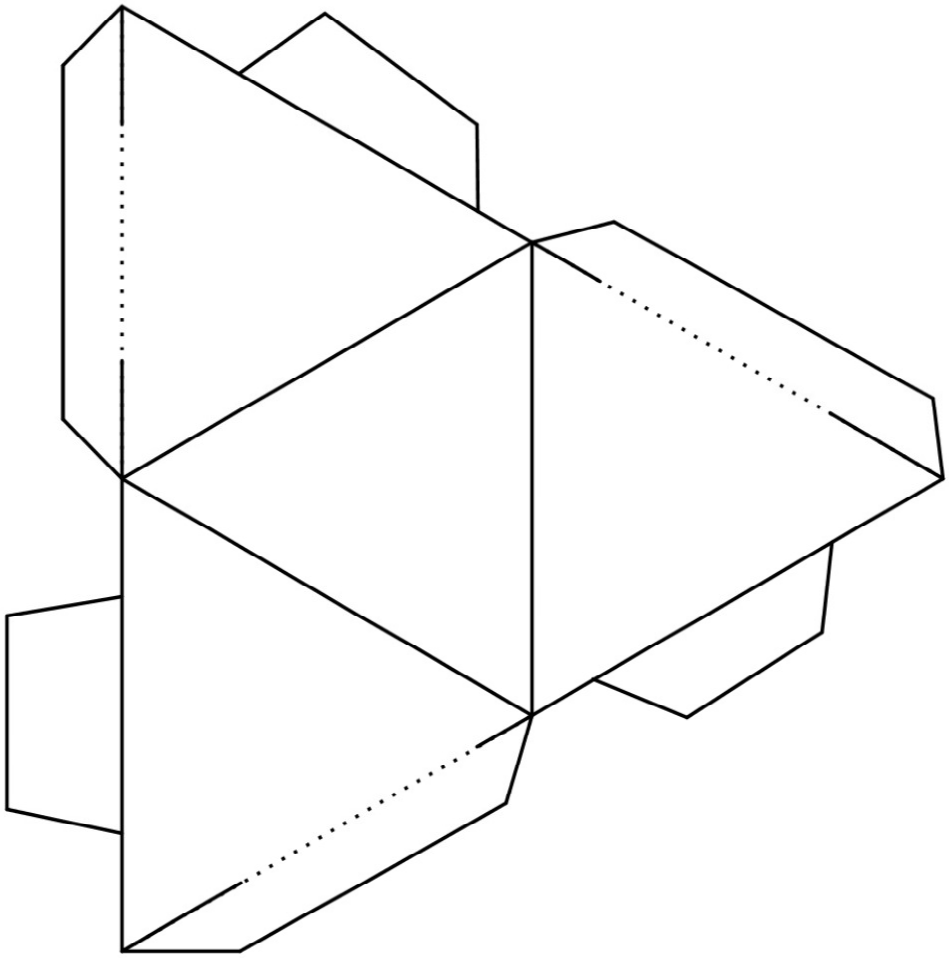


TETRÀEDRE REGULAR COLOR BLANC:

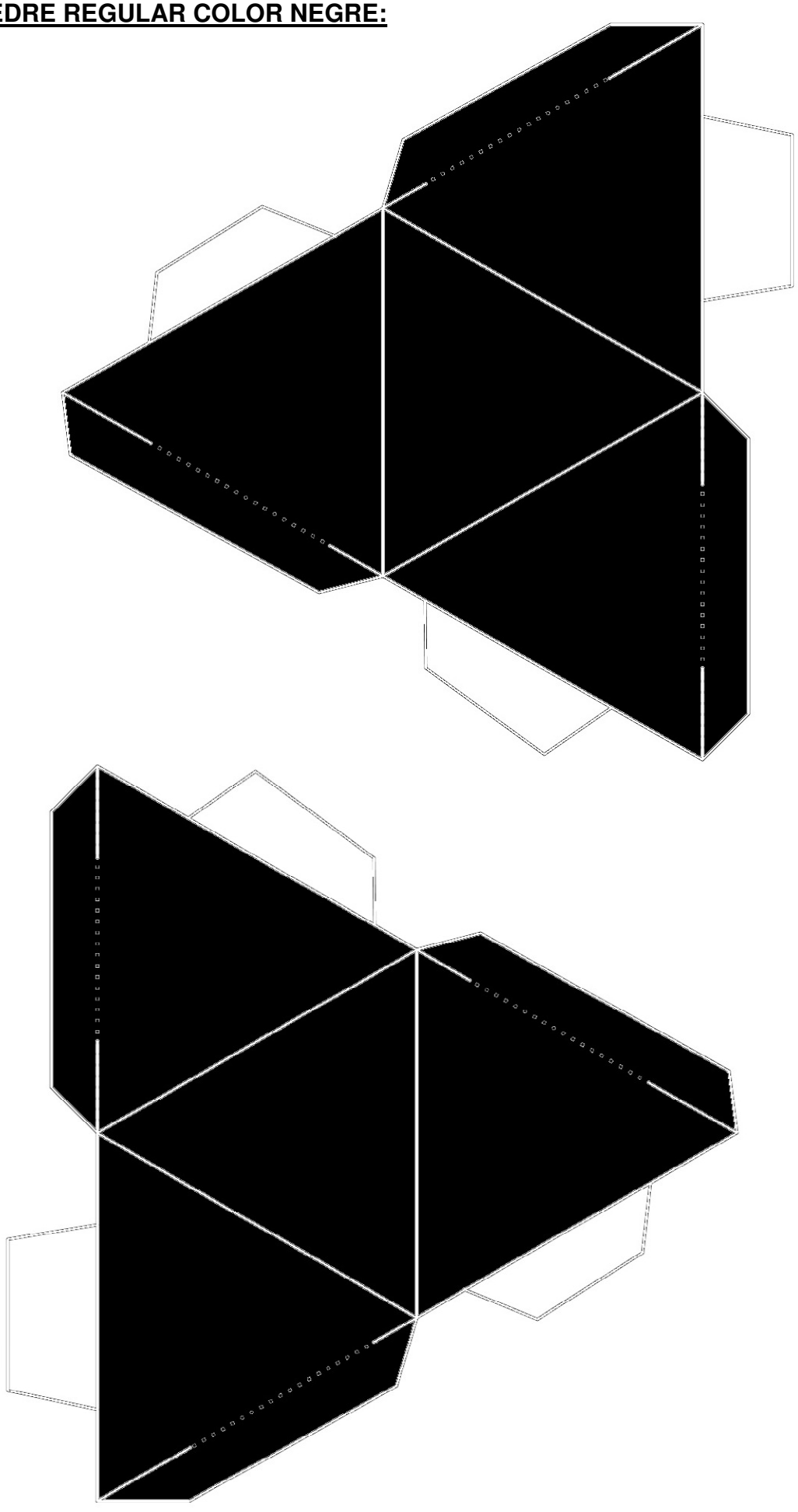


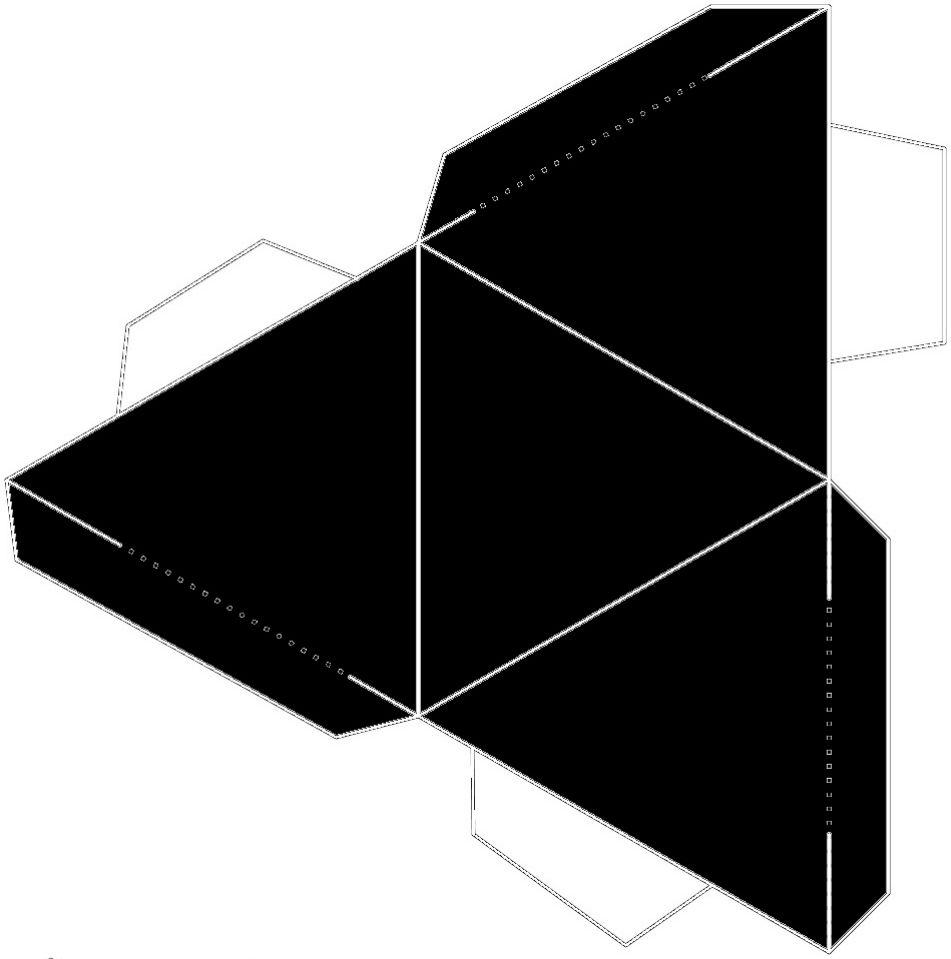


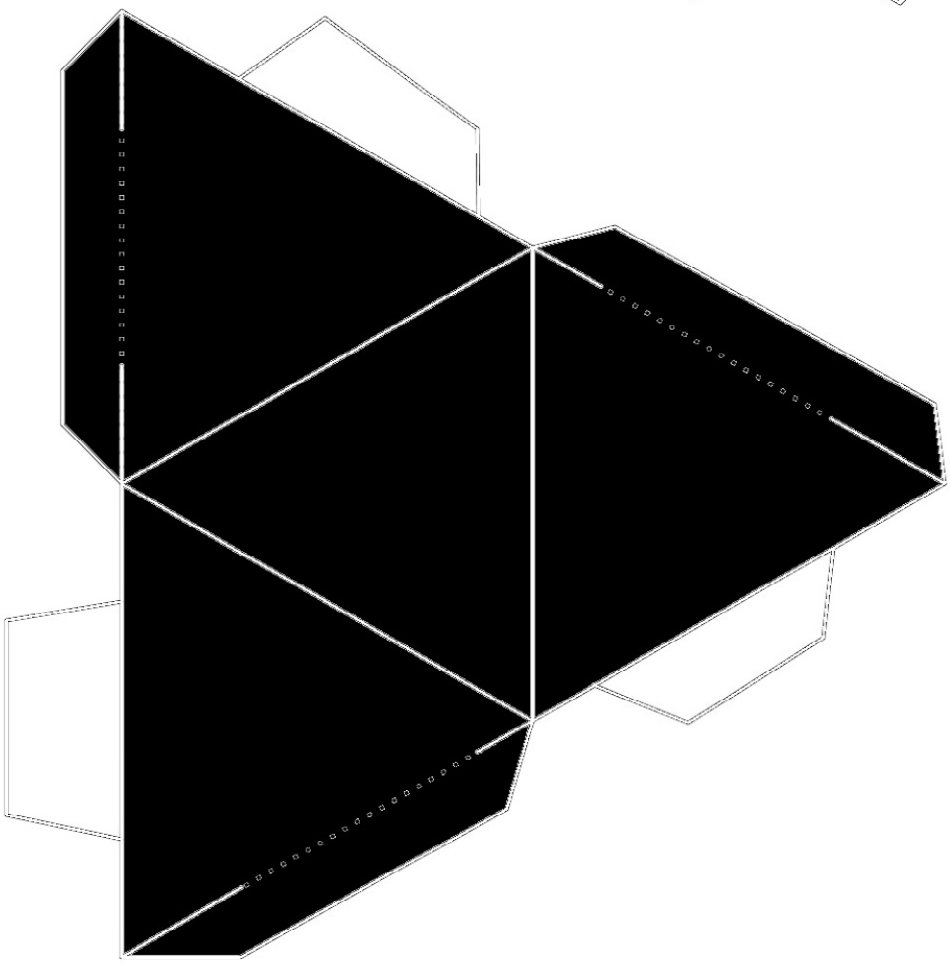




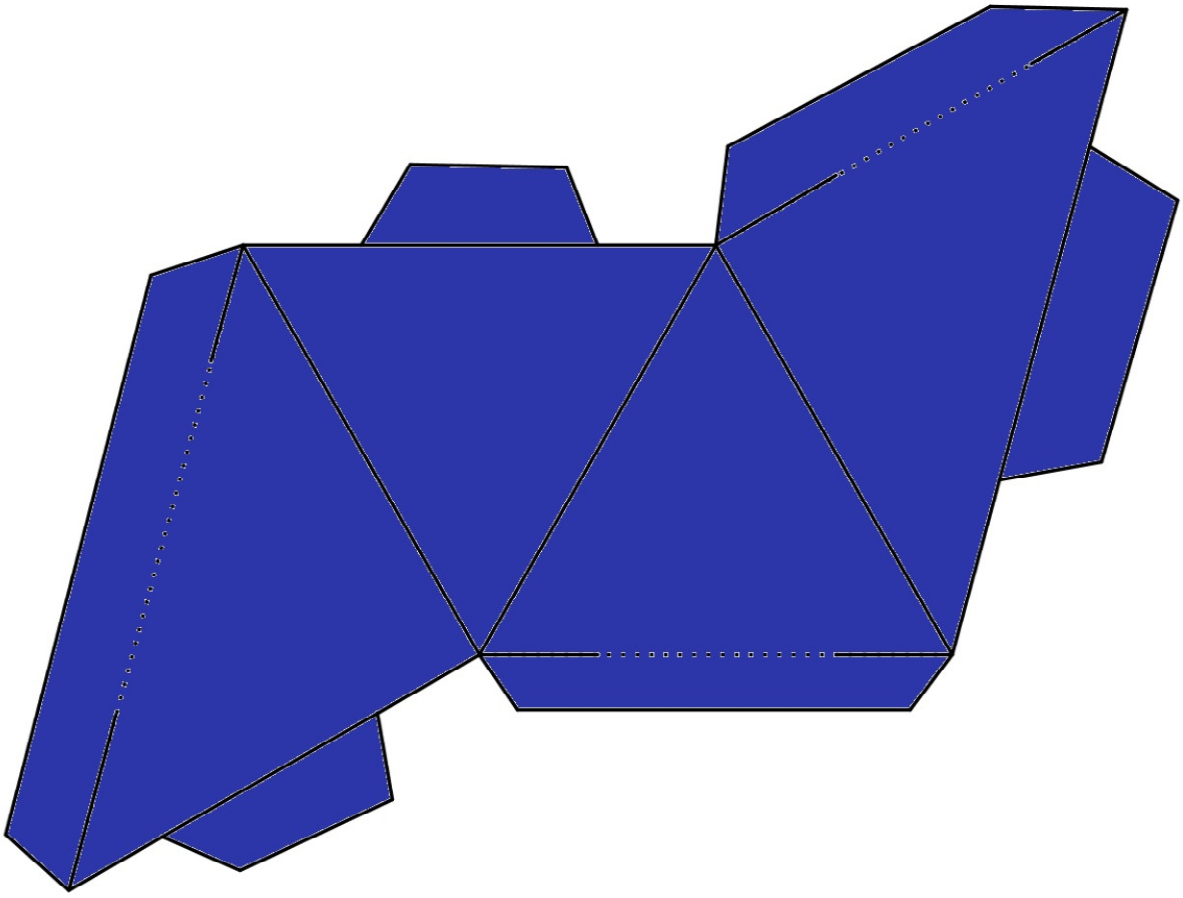
TETRÀEDRE REGULAR COLOR NEGRE:

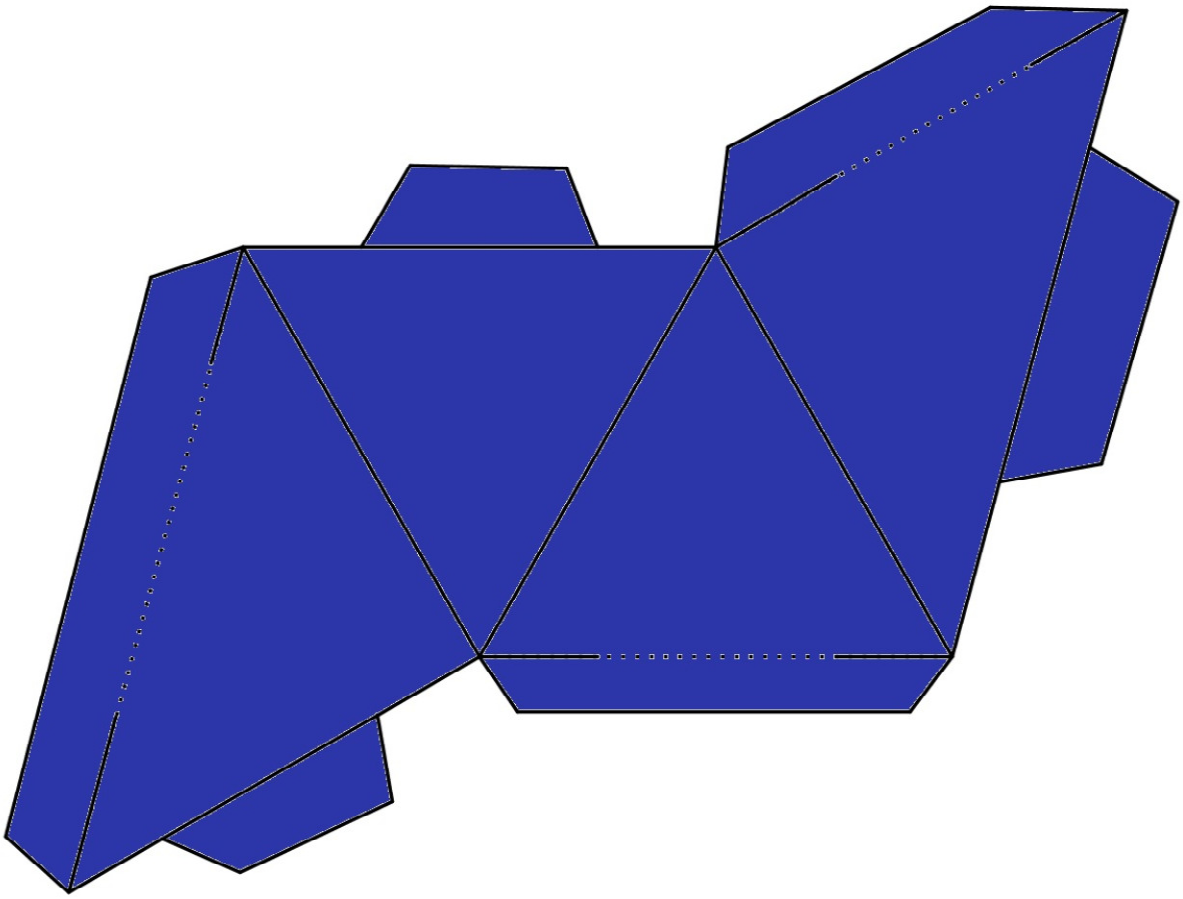


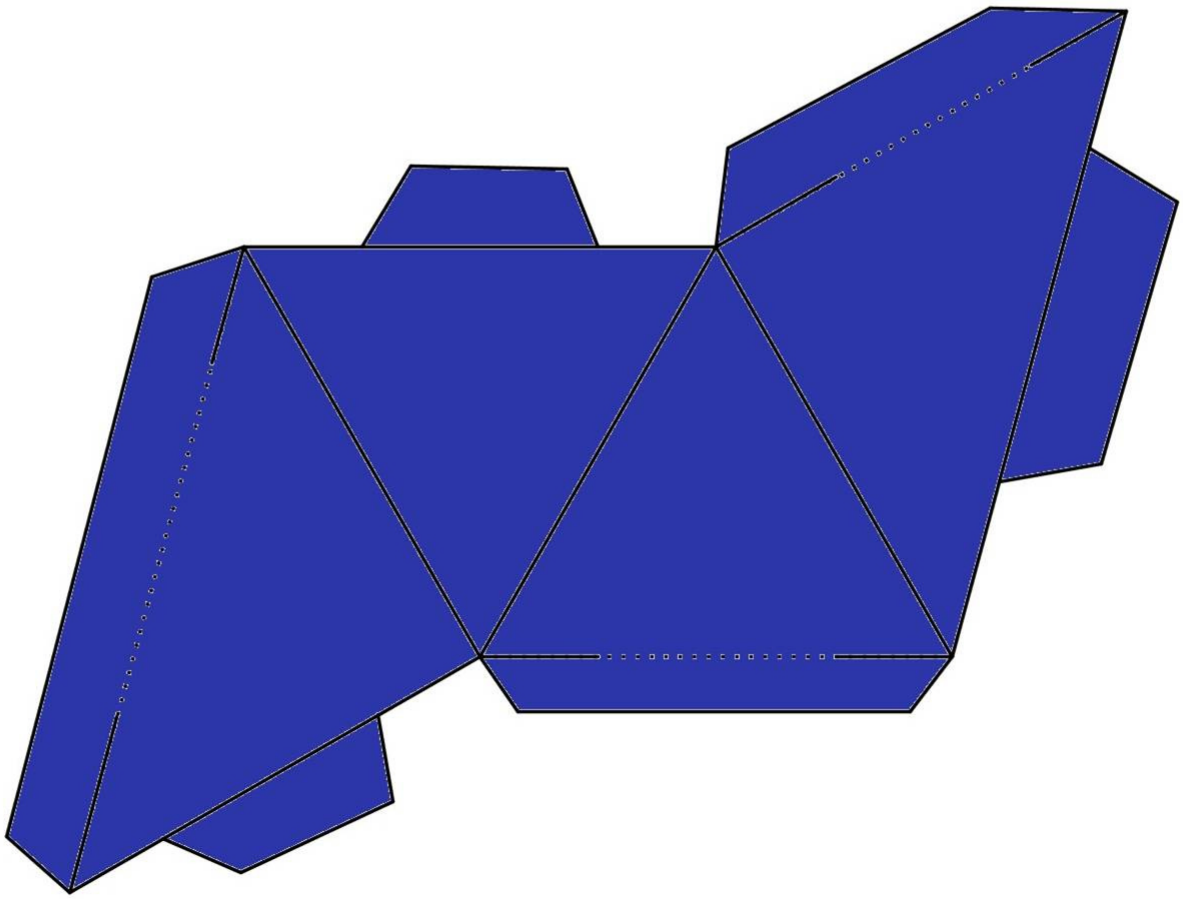




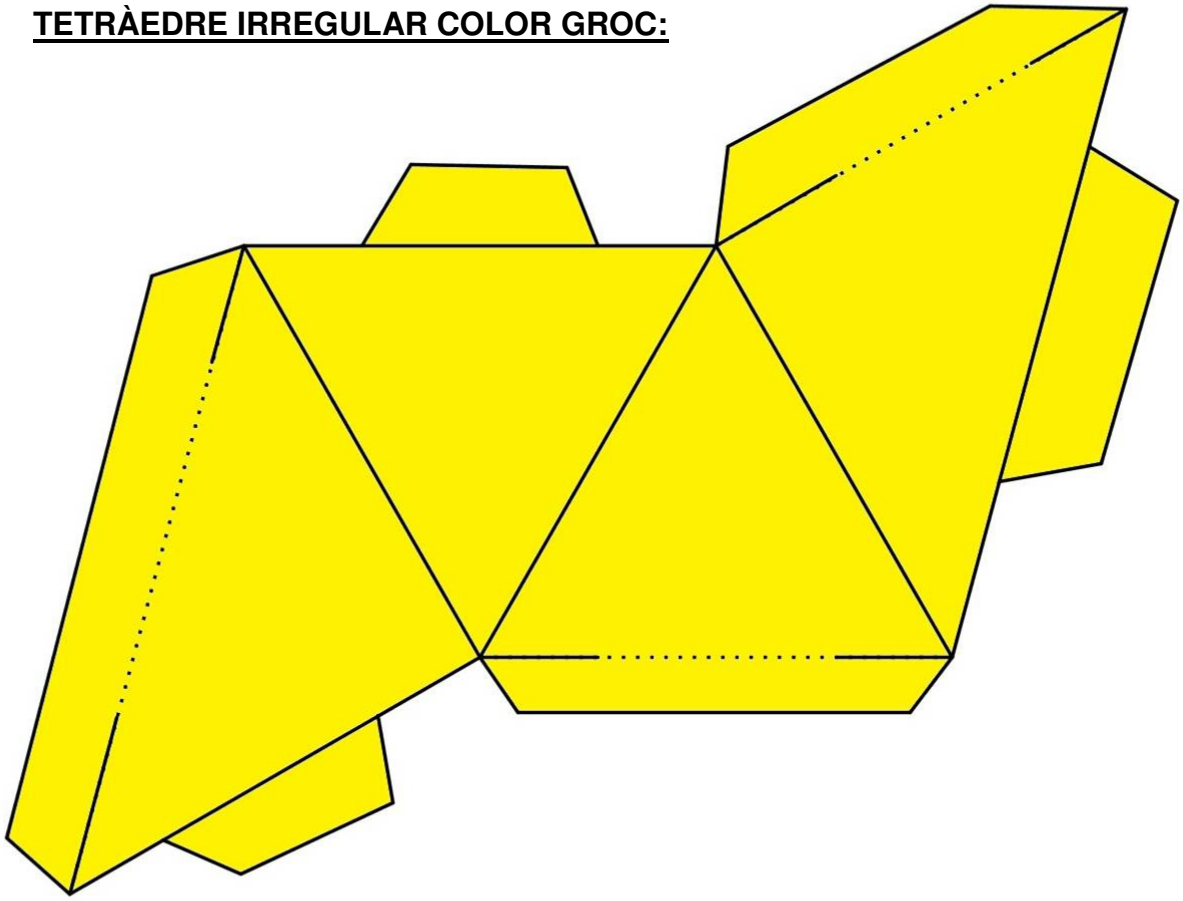
TETRÀEDRE IRREGULAR COLOR BLAU:

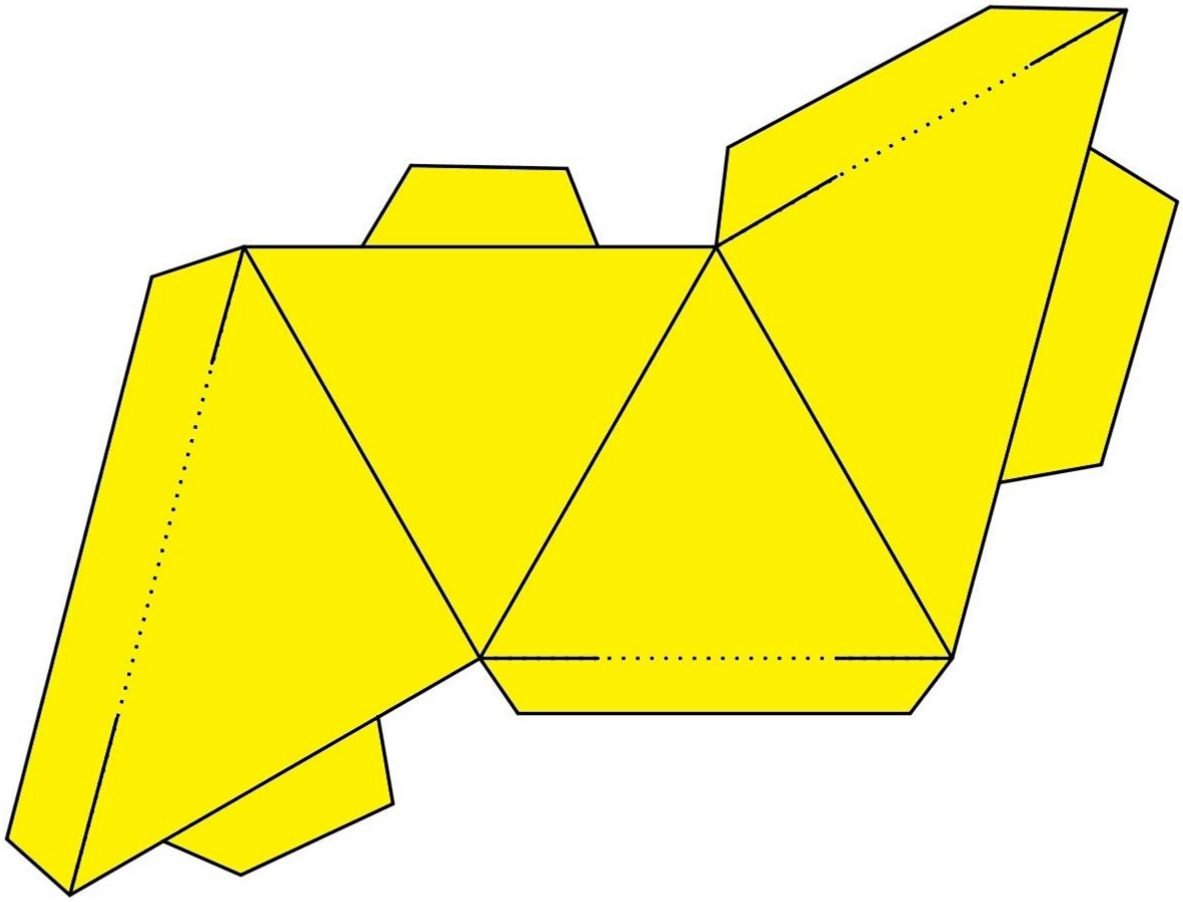


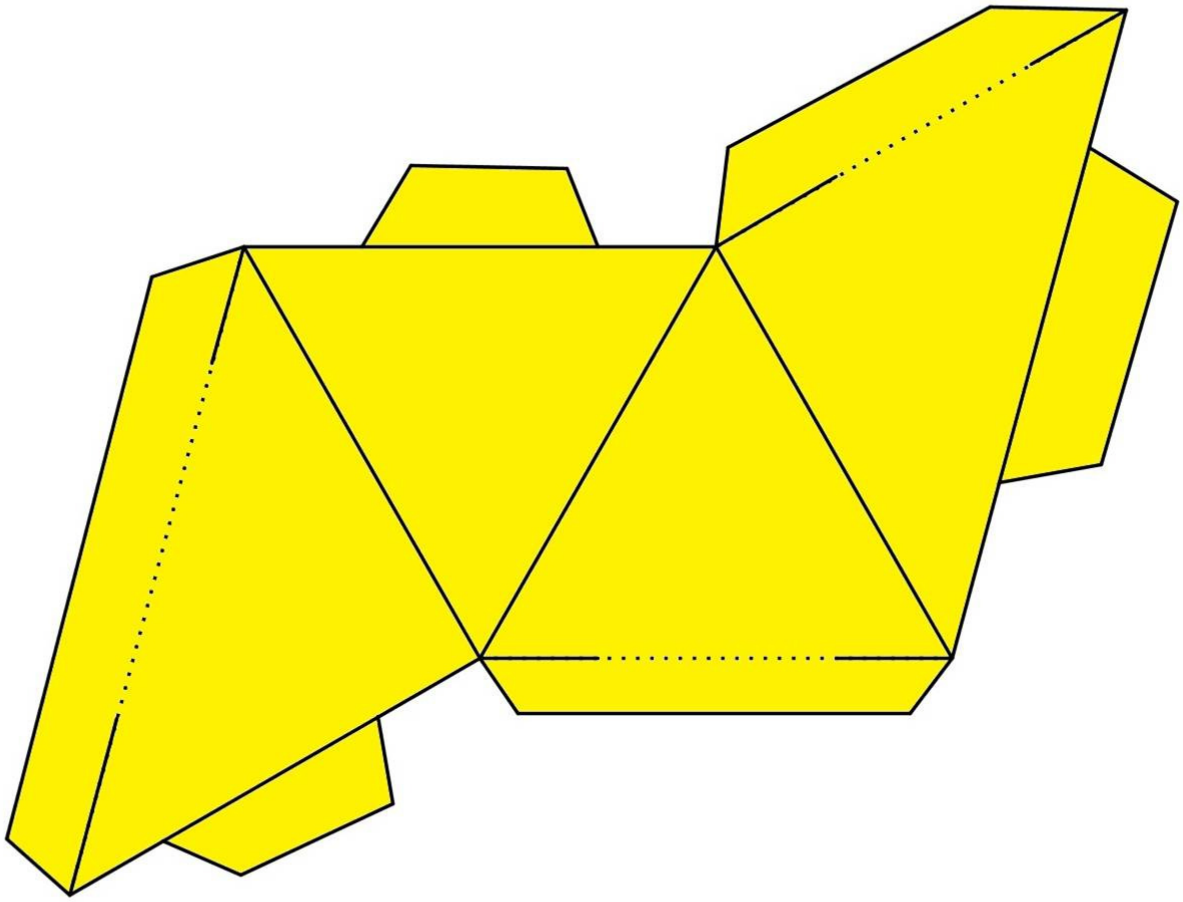




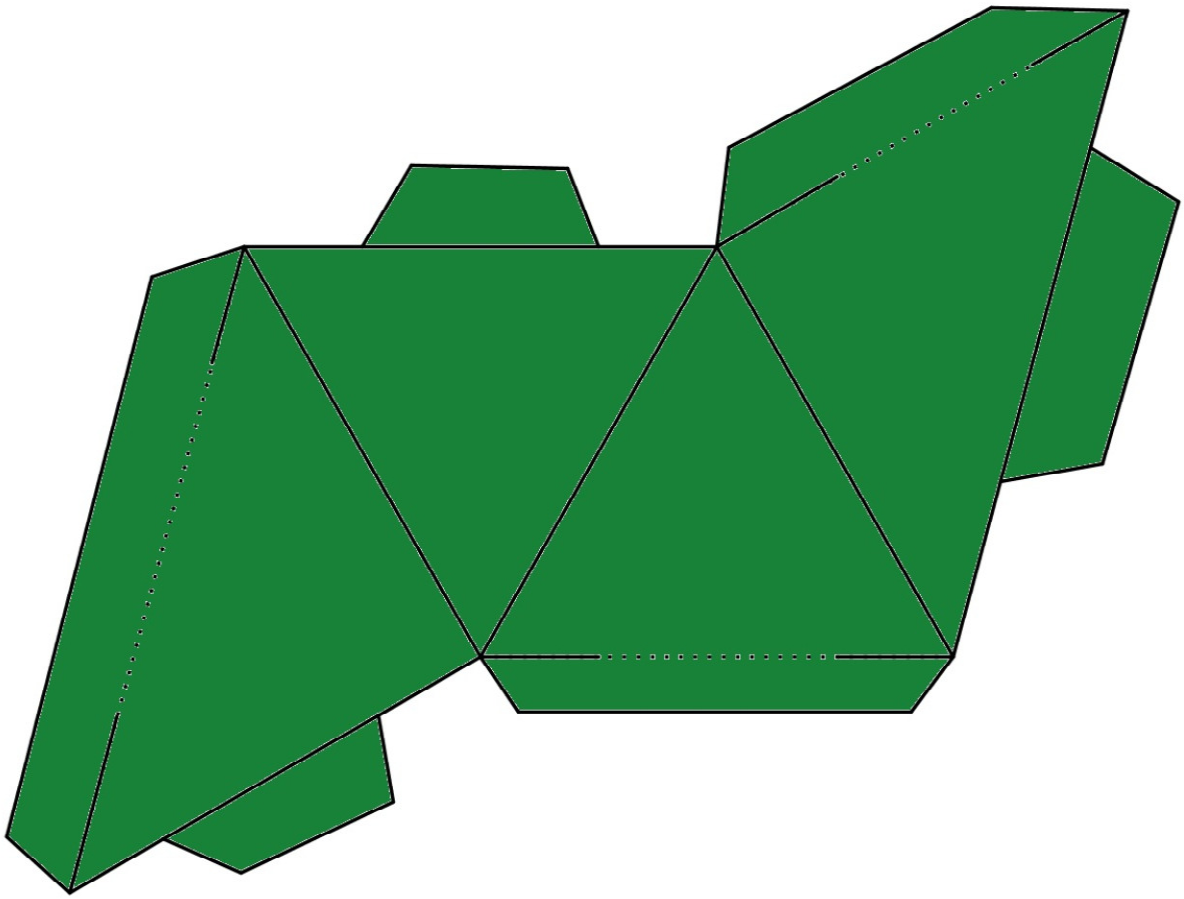
TETRÀEDRE IRREGULAR COLOR GROC:

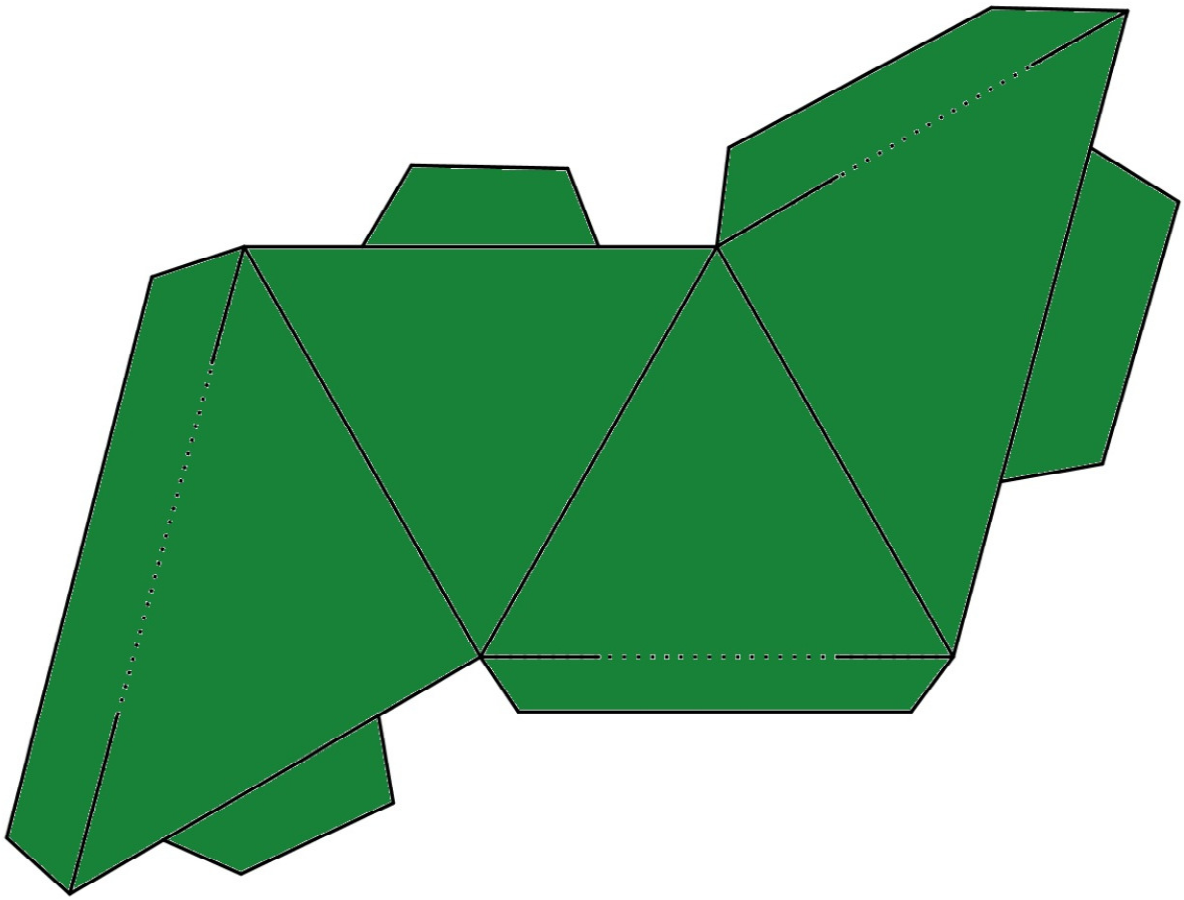


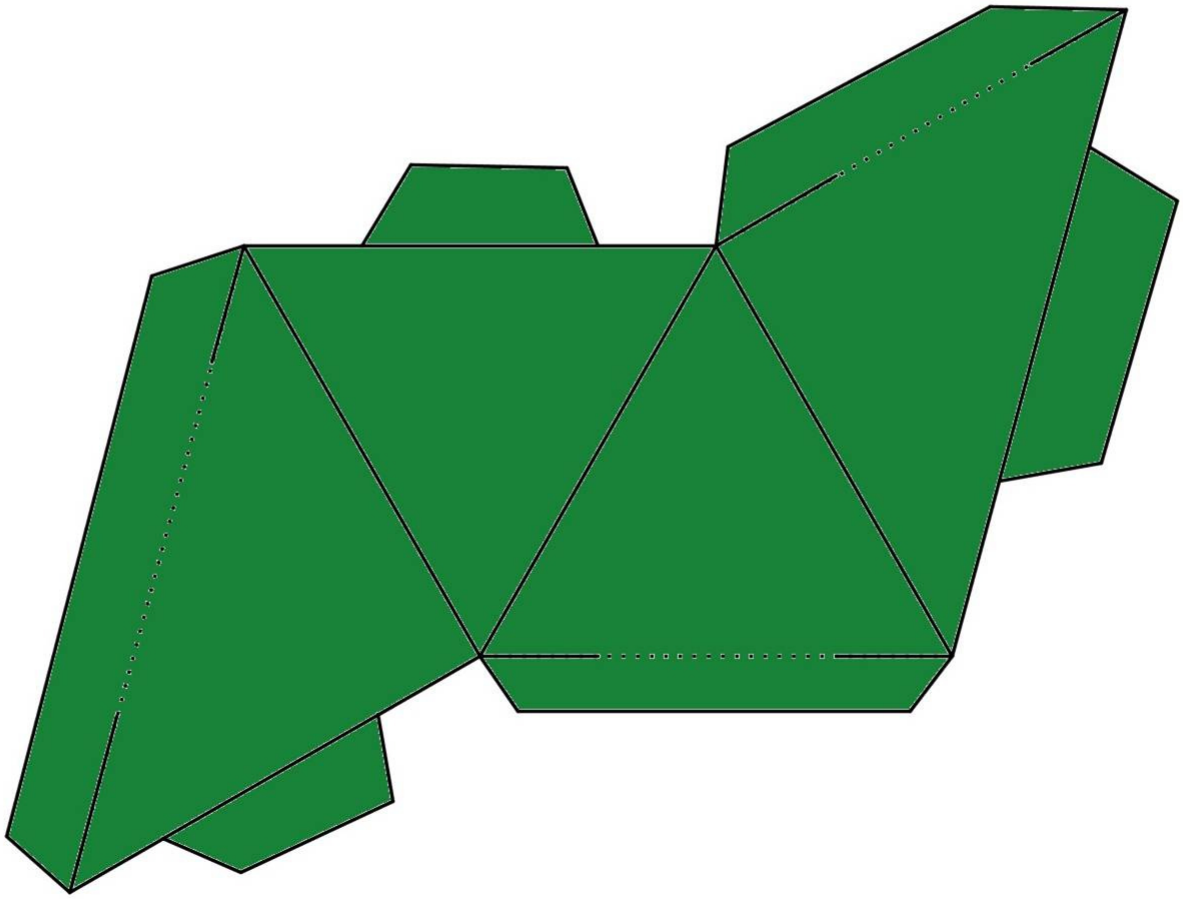




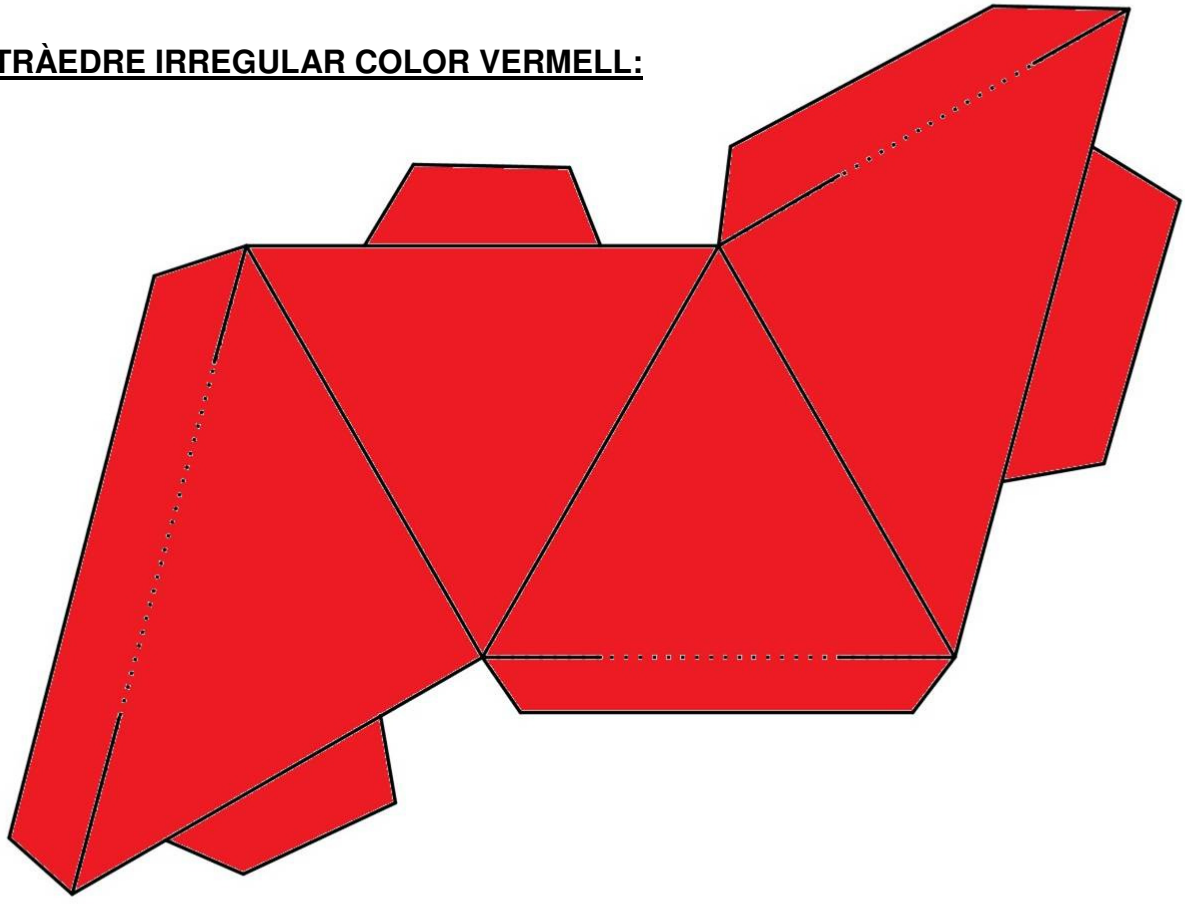
TETRÀEDRE IRREGULAR COLOR VERD:

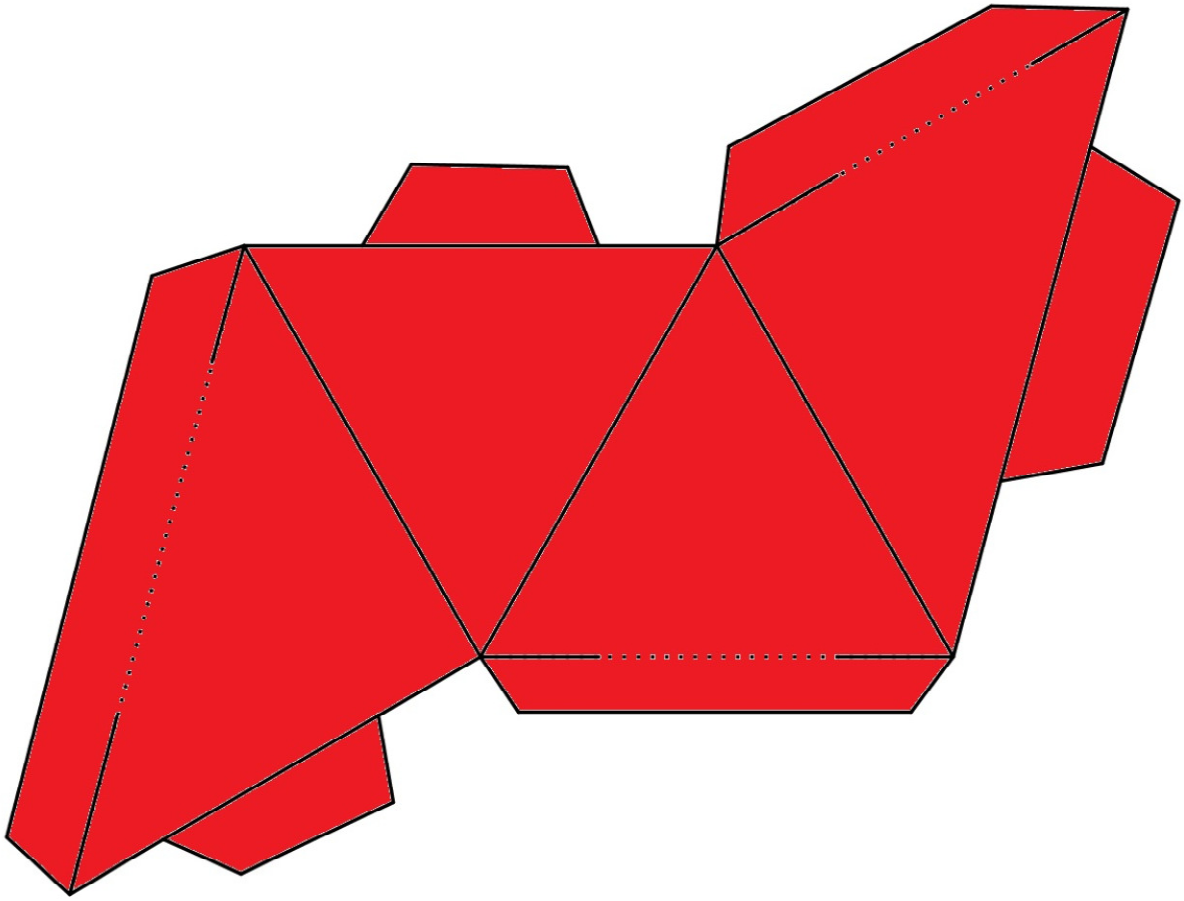


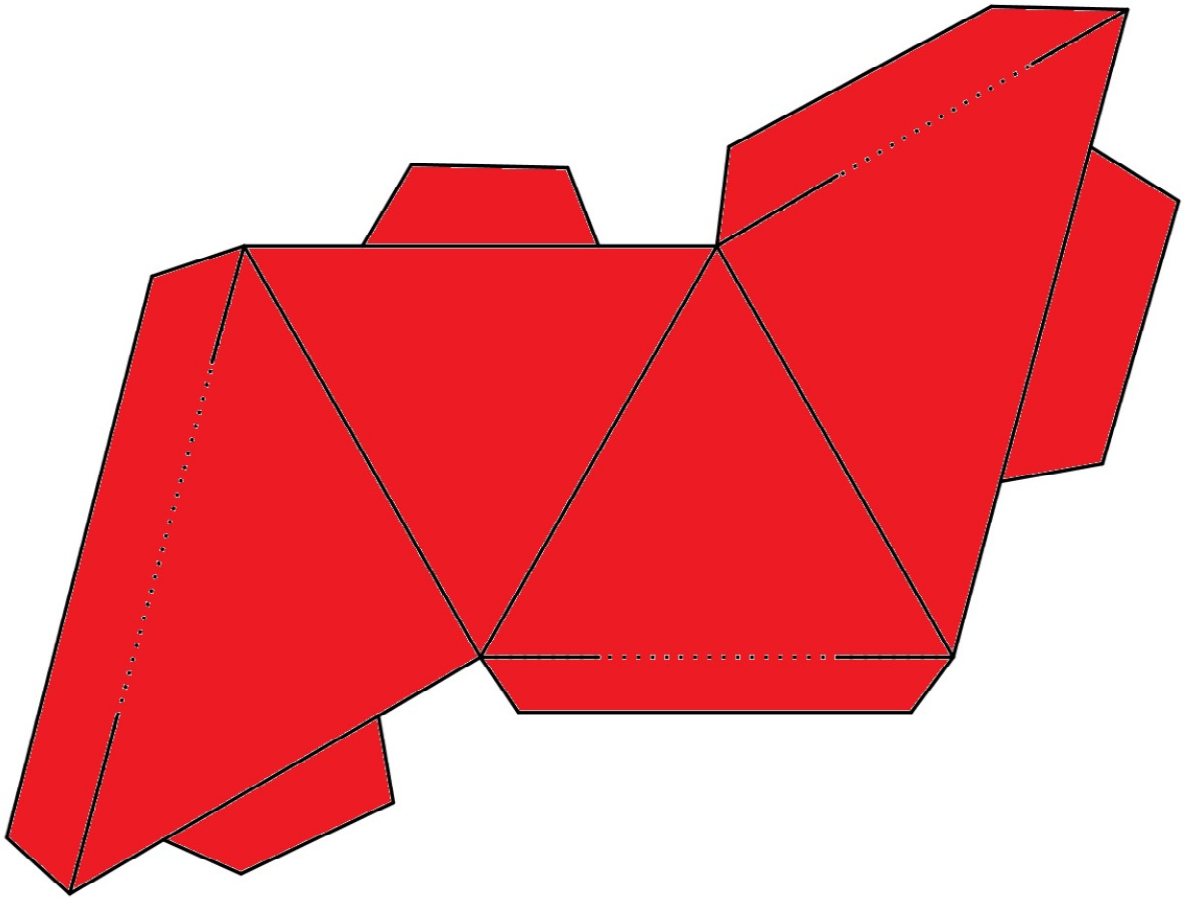




TETRÀEDRE IRREGULAR COLOR VERMELL:

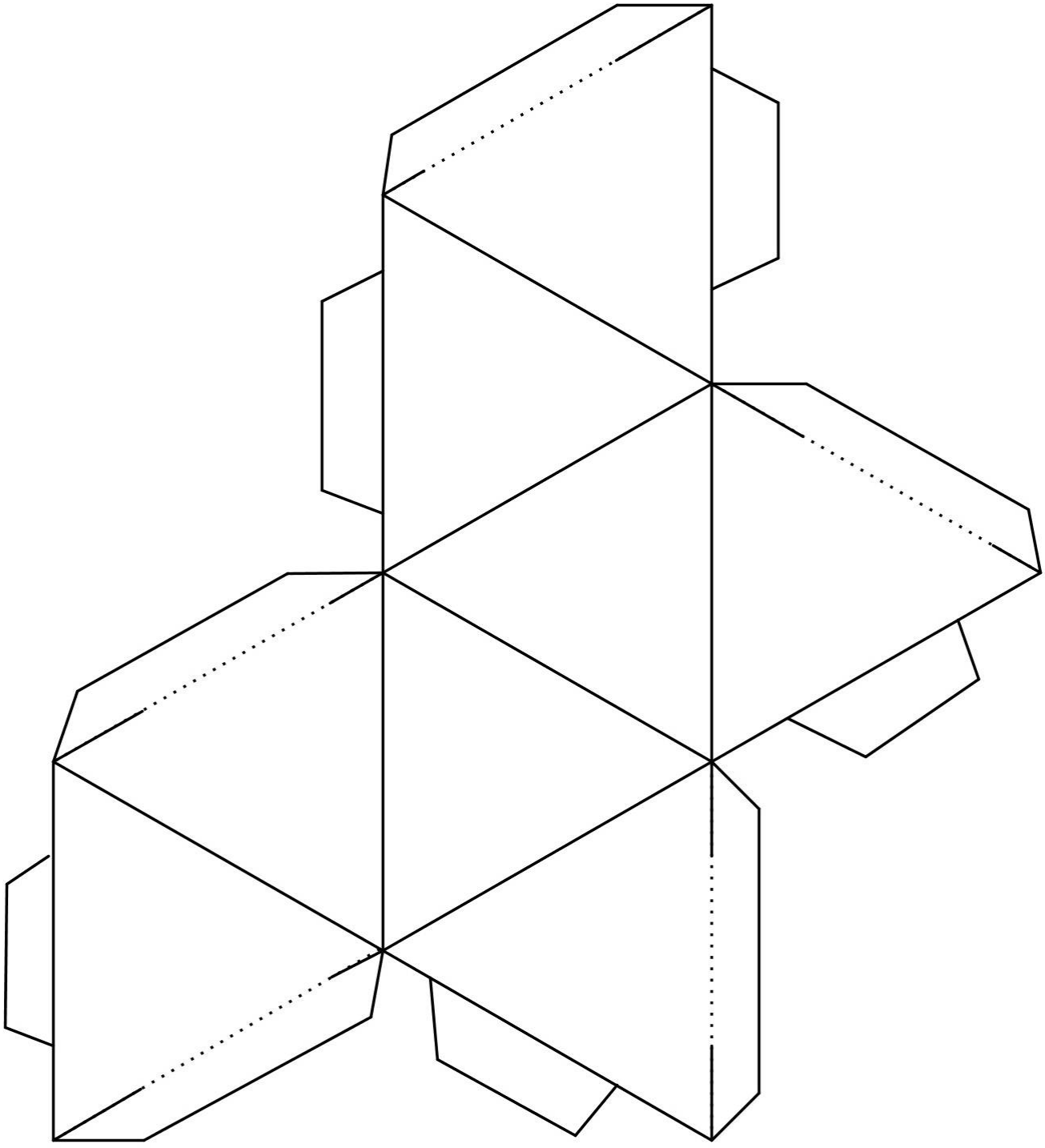




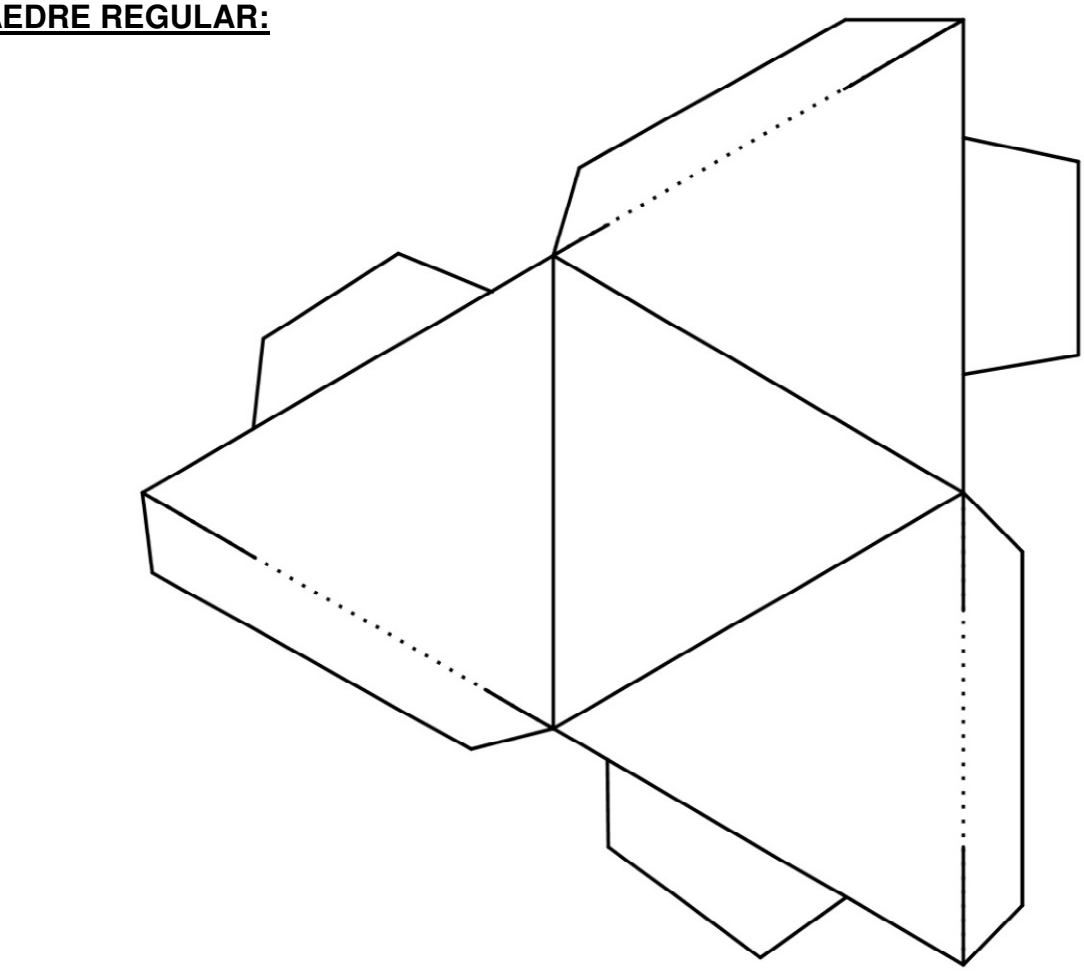


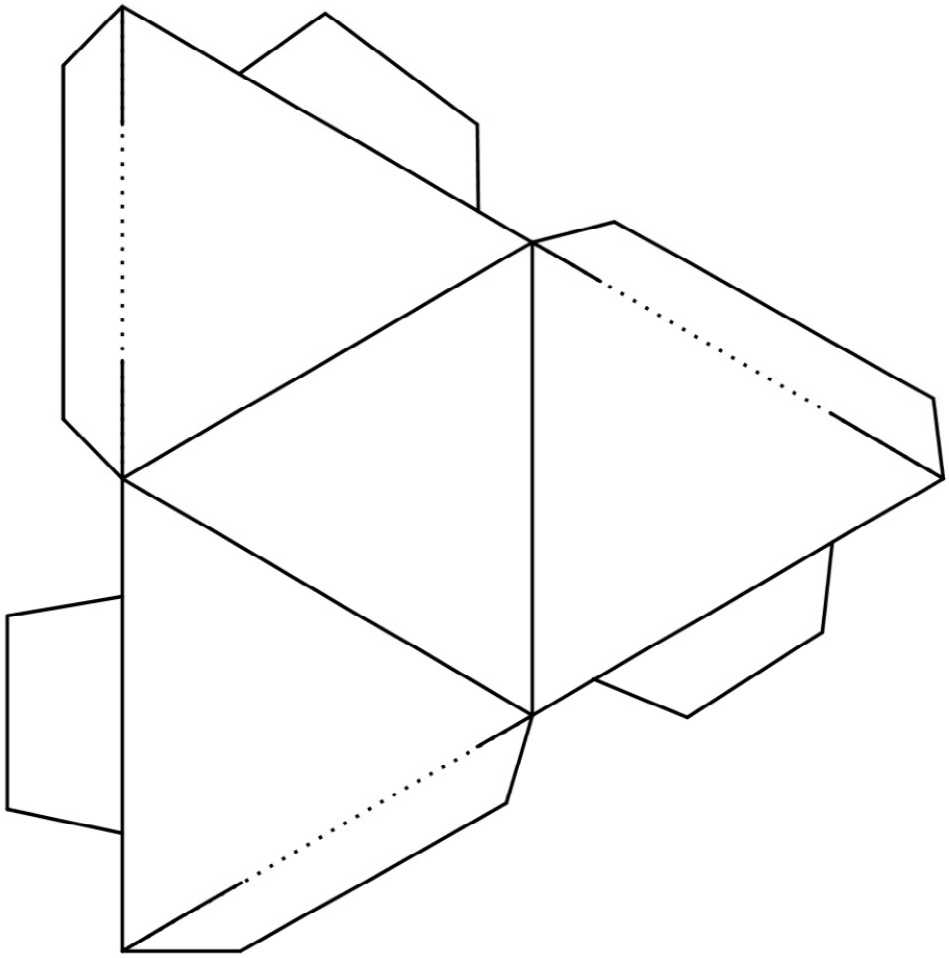
SEGONA OPCIÓ D'IMPRESSIÓ

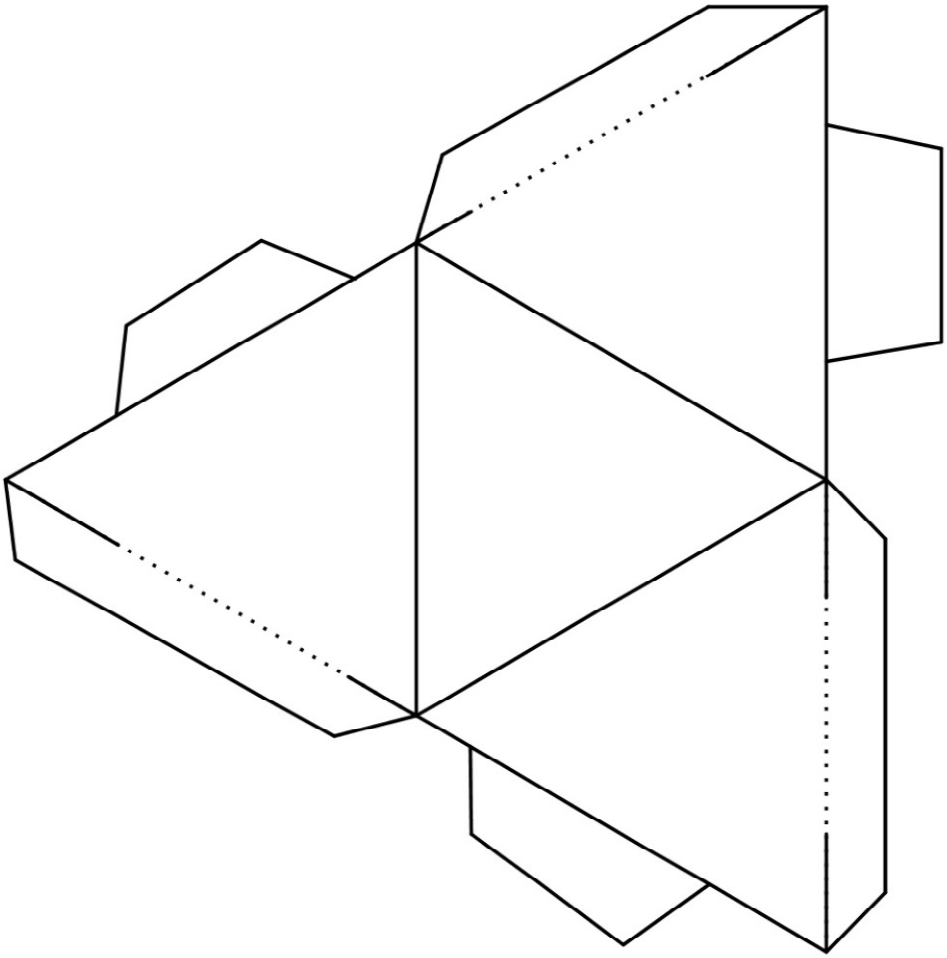
OCTÀEDRE REGULAR:

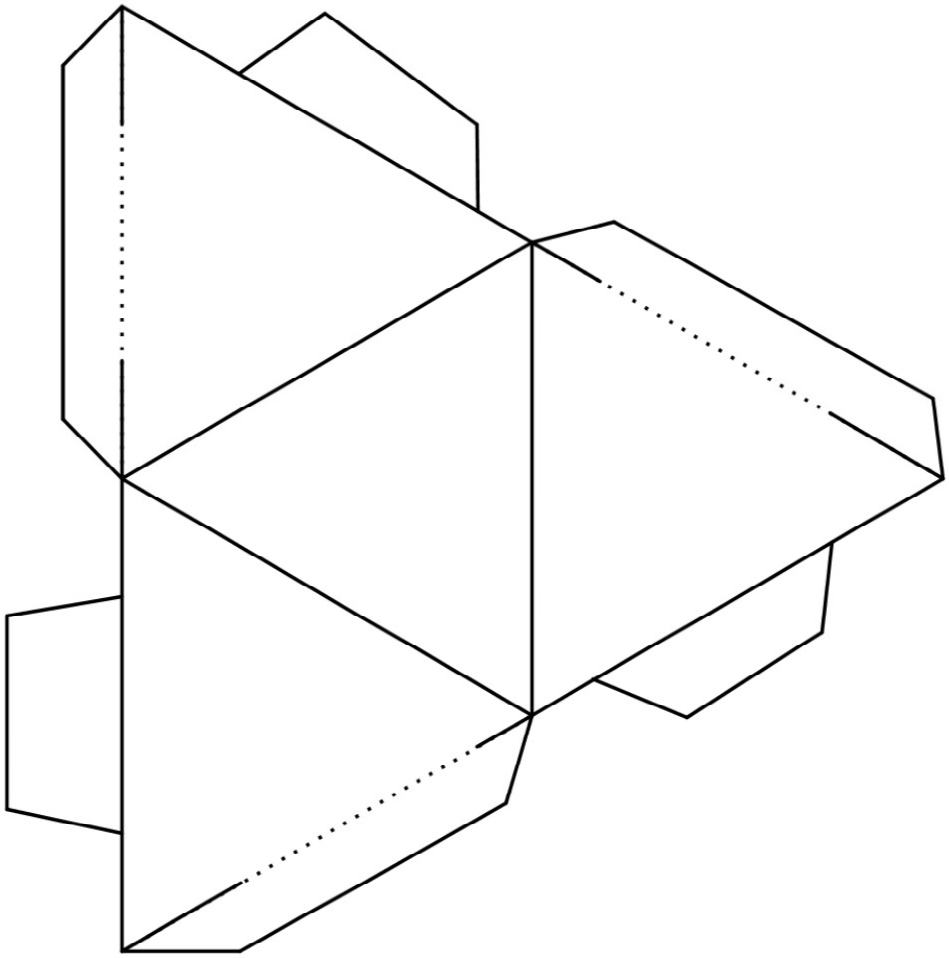


TETRÀEDRE REGULAR:

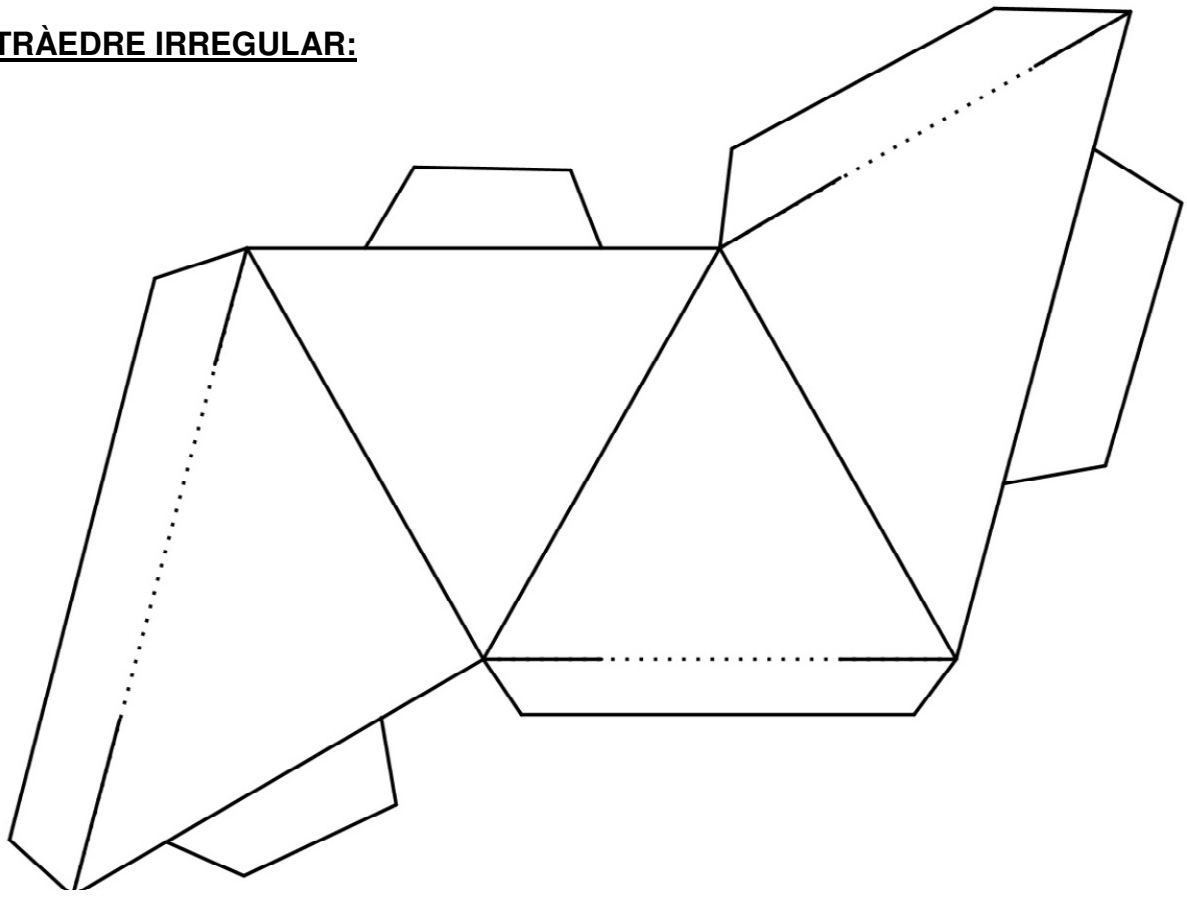


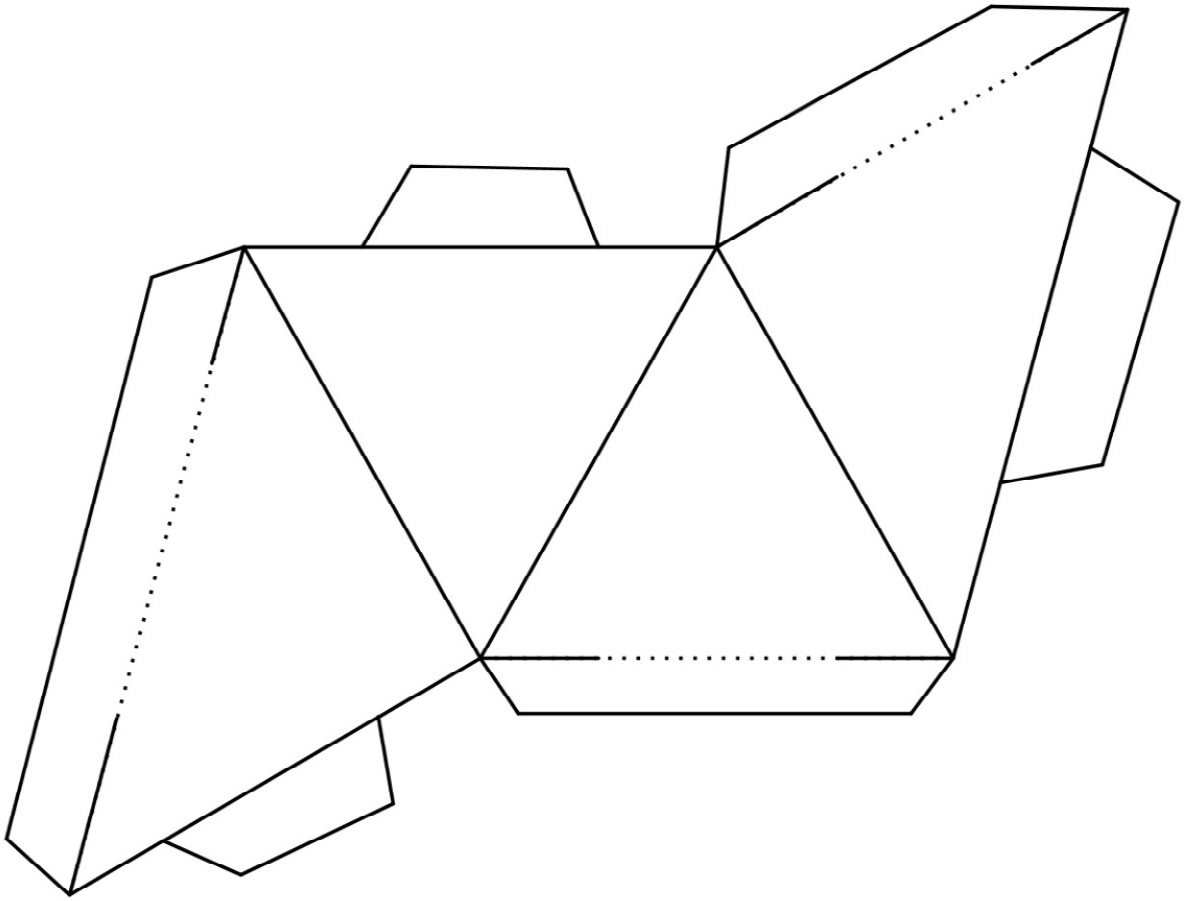


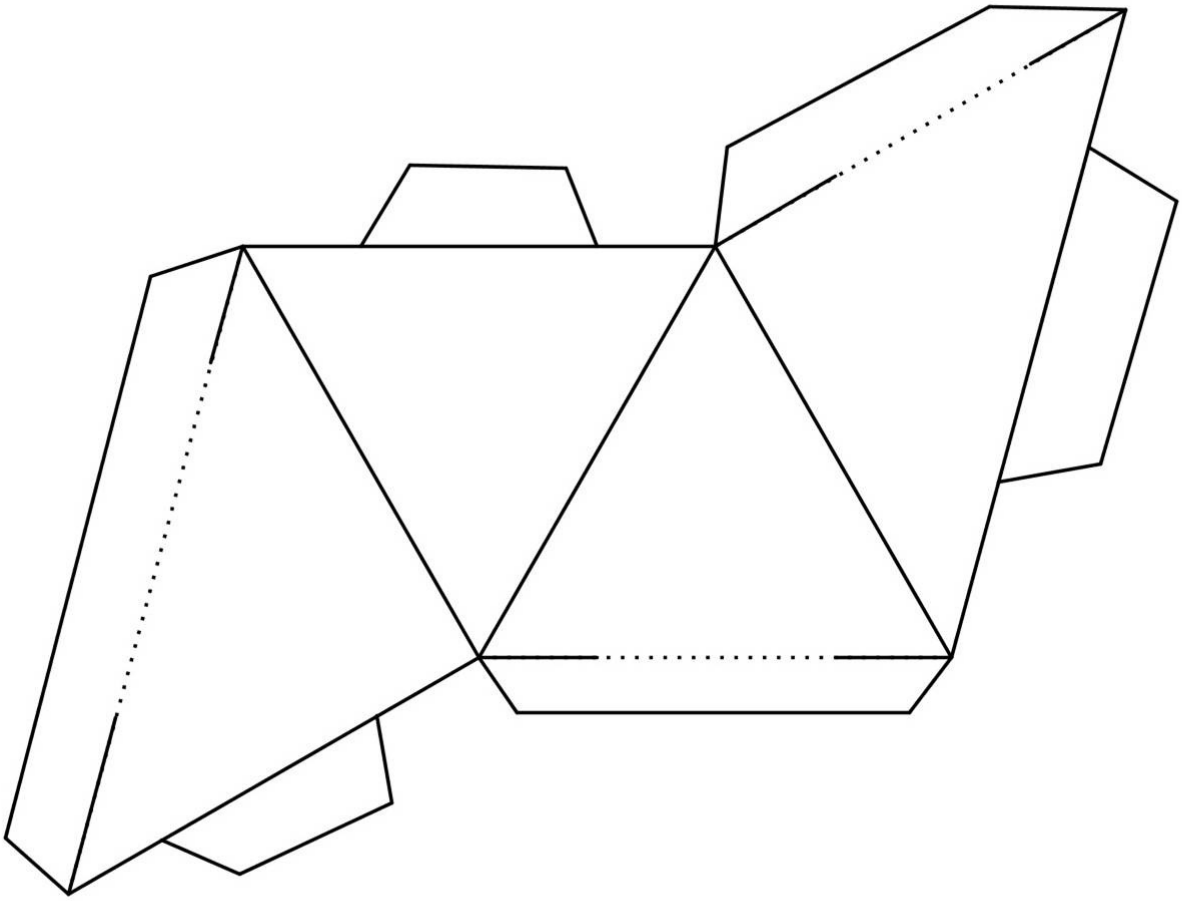




TETRÀEDRE IRREGULAR:







ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

- Amb l'ajuda del GeoGebra, com faries un tetràedre regular i un octàedre regular desplegat en el pla?

- Digues la posició relativa en que es troben les rectes que formen els dos políedres anteriors.

- Com faries el tetràedre irregular que apareix en el mòdul? Ajuda't també amb el GeoGebra.

- Digues els valors dels angles diedres que formen les cares del políedre anterior.

- Amb les figures que has construït, respon les següents preguntes:

  a) Quantes cares, vèrtexs i arestes hi ha en total amb totes les figures?

  b) Intenta fer un nou políedre.

- L'Stella Octangula és un políedre compost regular format per dos tetràedres que s'intersequen en un octàedre regular. També es pot aconseguir com l'estelació de l'octàedre regular.

  Com hem pogut comprovar, l'Stella Octangula es pot descomposar en un octàedre regular i cuit tetràedres regulars.
  Per altre banda hem pogut comprovar que afegint dotze tetràedres irregulars podem composar un cub (també anomenat embolcall convex del políedre compost).

  Raonant geomètricament digues:

  - ✓ Quina relació hi ha entre el volum de l'octàedre i el volum d'un dels tetràedres gran que la generen? I amb un dels tetràedres petits?

  - ✓ Quina relació hi ha entre el volum d'un dels tetràedres regulars petits i un d'irregulars?

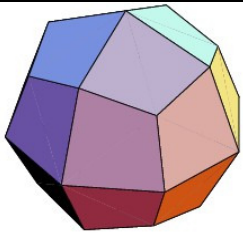
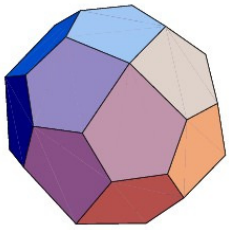
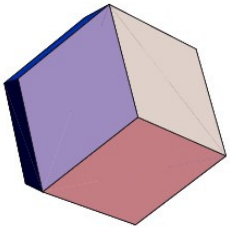
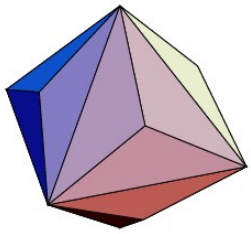
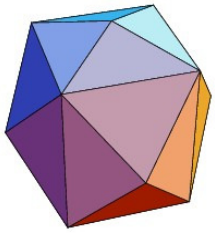
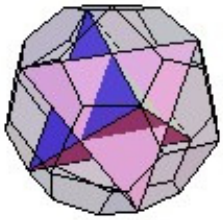
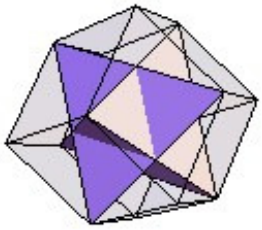
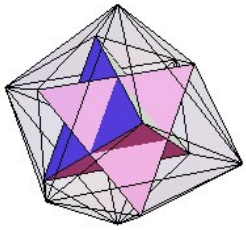
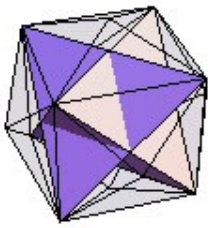
  - ✓ Quin relació hi ha entre el volum d'un tetràedre petit i el cub?

  - ✓ Quina relació hi ha entre el volum de l'Stella Octangula i la del cub?

  - ✓ Quina relació hi ha entre l'aresta d'un dels tetràedres regulars i la del cub?

  - ✓ Quina relació hi ha entre l'aresta d'un dels tetràedres regulars petits i la del cub?

L'Stella Octangula també es pot inscriure en altres políedres: icositetràedre trapezoïdal, icositetràedre pentagonal, dodecàedre ròmbic, octàedre triakis i el cub tetrakis (tots ells sòlids de Catalan).

Icositetràedre trapezoïdal	Icositetràedre pentagonal	Dodecàedre ròmbic	Octàedre triakis	Cub tetrakis
				
				

Imatges extretes de http://mathworld.wolfram.com/

PER SABER-NE MÉS:

- Descripció de la Stella Octangula →

http://es.wikipedia.org/wiki/Estrella_oct%C3%A1ngula

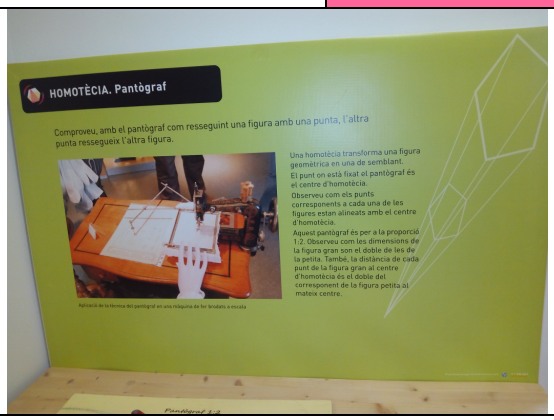
http://mathworld.wolfram.com/StellaOctangula.html

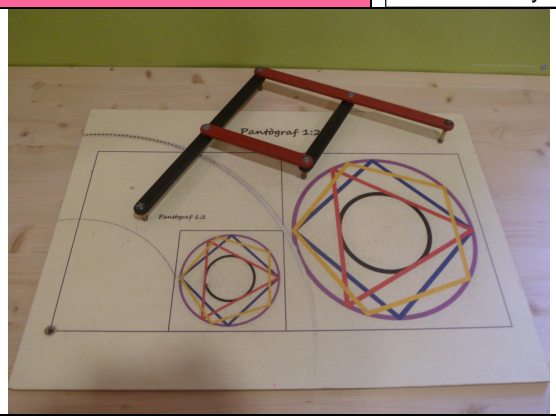
Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Pantògraf

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya





CONEIXEMENTS PREVIS:

- Pantògraf: és un conegut aparell històric, utilitzat per reduir o ampliar dibuixos. Està format per quatre barretes articulades formant un paral·lelogram. Una de les barretes té un extrem fix i llavors els punts extrems de les altres dues barretes, el que ressegueix i el que escriu (o a l'inrevés), formen les figures semblants. Cal dir que perquè això passi aquests tres punts han d'estar alineats.

- Figures semblants: dues figures són **semblants** quan tenen la mateixa forma i per tant tenen els angles iguals i els costats proporcionals.

- Homotècia: l'**homotècia** de centre O i raó k és la transformació que fa correspondre a cada punt P un punt P', alineat amb O i P, de manera que OP' = k·OP.

- Escala: és la raó de semblança entre l'original i la seva representació. Per exemple, *1:200 significa que 1 cm. del plànol equival a 200 cm. en la realitat.*

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència artística i cultural.
  L'apreciació de les matemàtiques tenen a veure amb l'art i l'actitud davant el fet cultural.

- Competència matemàtica.
  L'alumne ha de tenir els conceptes matemàtics clars i en ment.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Els alumnes hauran de valorar si el que estan fent és correcte o no.

- Competència d'autonomia i iniciativa persona.
  En el cas de treball individual, el mòdul requereix presa de decisions i constància per a arribar a la solució.

CONTINGUT HISTÒRIC:

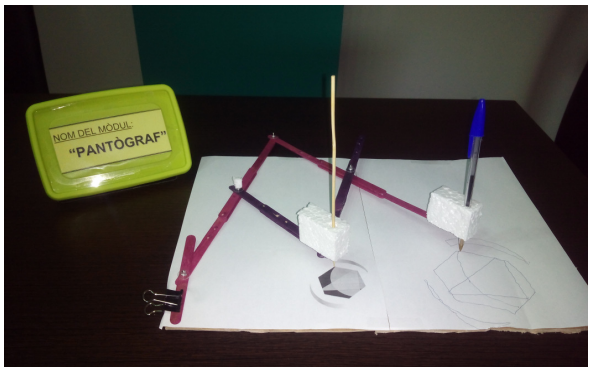
Pantògraf: la seva teoria es descriu en els principis de Descartes sobre els paral·lelograms i va ser ideat el 1630 pel sacerdot jesuïta germànic Christoph Scheiner, té aplicacions en diversos camps de la mecànica, en mecanismes com ara el pantògraf de ferrocarril, el gat hidràulic, o com a instrument de dibuix.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

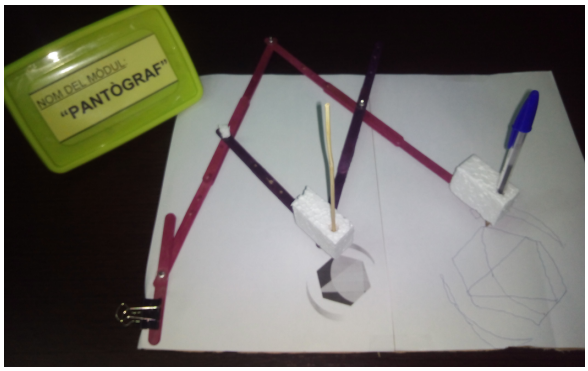
CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunta una fitxa amb el material i el procediment que cal seguir per obtenir el mòdul original.

Aquesta construcció és una mica complexa, ja que es necessiten una sèrie de materials i eines, que potser a l'aula no tinguin. Es podria fer la construcció com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia.



Imatge 13. Construcció real. Marina Agudelo (2015).



Imatge 14. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 15. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Construcció d'un PANTÒGRAF

Per fer aquesta activitat necessitareu el següent **MATERIAL**:

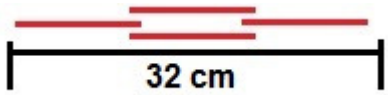
- setze pals de gelat de fusta,
- sis xinxetes o claus molt prims,
- sis rosques per evitar les punxades,
- dos trossos de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN",
- un pal de broxeta,
- un bolígraf,
- una barrina,
- una pistola de silicona o bé cola blanca,
- una pinça per subjectar,
- cinta adhesiva, i
- fulls de paper.

L'activitat consisteix a realitzar un **pantògraf**, seguint els passos descrits a continuació.

Passos a seguir:

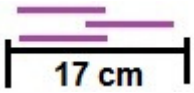
8. Enganxeu els 16 pals de gelat amb la cola o la silicona de la següent manera amb les mesures indicades a continuació:

- Dues barres formades per 4 pals que mesurin 32 cm. en total.



- Una barra de 4 pals que mesurin 26 cm en total.

- Una barra de 3 pals que mesurin 17 cm en total.



- I us quedarà un pal sol.

9. Marqueu amb un punt cada barra a les següents mesures:

- Les dues barres de 32 cm a 1 cm, 7 cm, 8'5 cm, 11 cm, 16 cm i 31 cm.
- La barra de 26cm a 1 cm, 2'5 cm, 5 cm, 10 cm i 25 cm.
- La barra de 17cm a 1 cm, 7 cm, 8'5 cm, 11 cm i 16 cm.
- El pal sol es farà un punt a la seva meitat.

10. Amb molt de compte, feu els forats amb la barrina de totes les marques fetes en el pas anterior.

11. Seguidament, muntarem les barres que formaran el pantògraf de la següent manera:

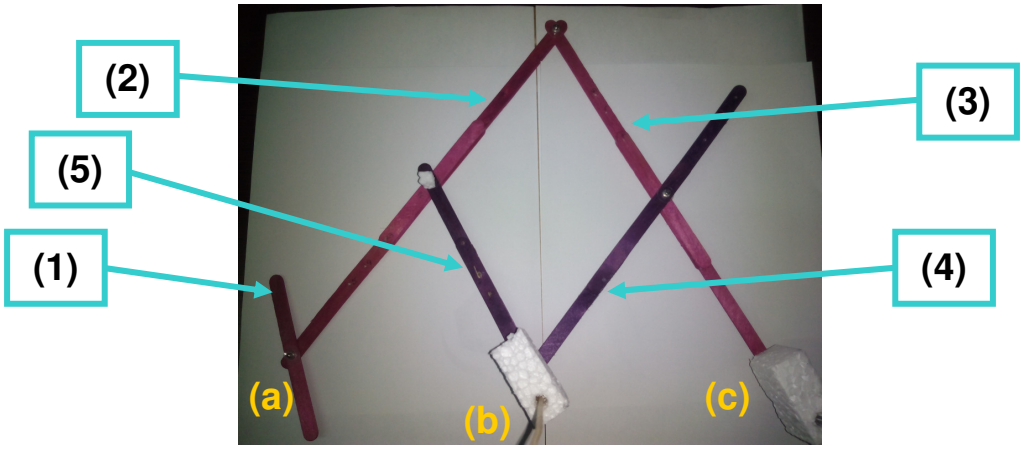


Figura 1. Muntatge de les barres del pantògraf.
Marina Agudelo (2015).

12. Enumereu cadascun dels forats que hem fet de la següent manera, ja que cadascun d'ells representa una mesura, és a dir, la figura s'ampliarà dues, tres, quatre i cinc vegades. Perquè això passi només cal que els 2, 3, 4 o bé 5, coincideixin. En el cas que es mostra a la següent fotografia el nombre que coincideix és el 2 i per tant, permetrà ampliar el doble el dibuix. Anàlogament pels altres.

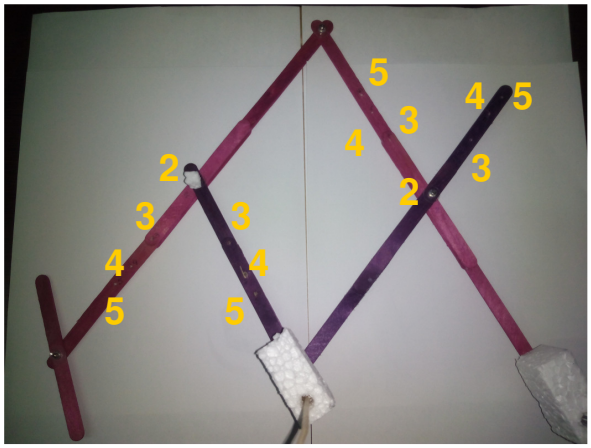


Figura 2. Enumeració dels forats fets del pantògraf.
Marina Agudelo (2015).

13. Agafeu els dos trossos de porexpan i claveu-hi el bolígraf en cadascun d'ells a la part extrema, tal com es mostra en la següent fotografia.

Figura 3. Ubicació del forat a la peça de porexpan del pantògraf.
Marina Agudelo (2015).

14. Com que el pal de broxeta és molt petit, hi emboliqueu la cinta adhesiva fins que quedi fixat pel forat fet pel bolígraf.

15. Enganxeu amb cola o silicona el porexpan als extrems **(b)** i **(c)** en la mateixa direcció.

16. Finalment, només cal fixar el pantògraf per l'extrem **(a)** i a dibuixar s'ha dit.

Comentaris:

Si en l'extrem **(b)** hi col·loquem el pal de broxeta i en el **(c)** el bolígraf, el que fareu serà ampliar el dibuix o imatge.
En cas contrari, és a dir, si intercanvieu el pal de la broxeta i el bolígraf, el que fareu serà reduir el dibuix.

ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

Primera proposta d'activitat:

PANTÒGRAF AMB EL GEOGEBRA:

Es tracta d'una activitat tecnològica i molt eficient. Consisteix a obtenir un **pantògraf** a qualsevol escala, mitjançant el programa GeoGebra.

Aquesta activitat es pot fer de manera individual, o en grups de dos o tres alumnes.

A continuació s'adjunten la fitxa de l'activitat per entregar als alumnes.

PANTÒGRAF amb el GeoGebra

L'activitat consisteix a realitzar un **pantògraf** a qualsevol escala, amb el programa GeoGebra.

Passos a seguir:

6. Col·loqueu un punt **F** qualsevol i activeu l'opció d'objecte fix, ja que aquest punt serà fix.

7. Creeu dos paràmetres, **a** i **b,** de rang [-5, 5].

8. Feu una circumferència de centre **F** i radi **a**.

9. Col·loqueu un punt **S** qualsevol prop de la circumferència anterior, però que no arribi a tocar-la.

10. Feu una circumferència de centre **S** i radi **a**.

11. Marqueu la intersecció entre les dues circumferències, que serà el punt **A**.

12. Feu la última circumferència, que serà de centre **A** i radi **b**.

13. Traceu la recta que passarà pels punts **F** i **A**.

14. Fent la intersecció entre aquesta recta i la circumferència de centre **A** i radi **b** obtindreu el punt **B**.

15. Feu la recta **r** paral·lela a la recta **F A** en el punt **B**. I la recta **s** paral·lela a **r** en el punt **S**. La intersecció d'aquestes dues rectes serà el punt **D**.

16. Traceu la recta **t** que passa pels punts **F** i **S**. I la intersecció entre les rectes **t** i **s**, serà el punt **L**.

17. Realitzeu els següents segments: **FA, AB, BD, DL, DS** i **AS**.

18. Finalment, només caldrà que no mostreu totes les rectes i circumferències; i que els punts **S** i **L** tinguin rastre. I així obteniu un **pantògraf** a qualsevol escala, ja que si varieu els paràmetre **a** i **b** ampliareu o reduireu el dibuix.

Vegeu el resultat que obtindreu:

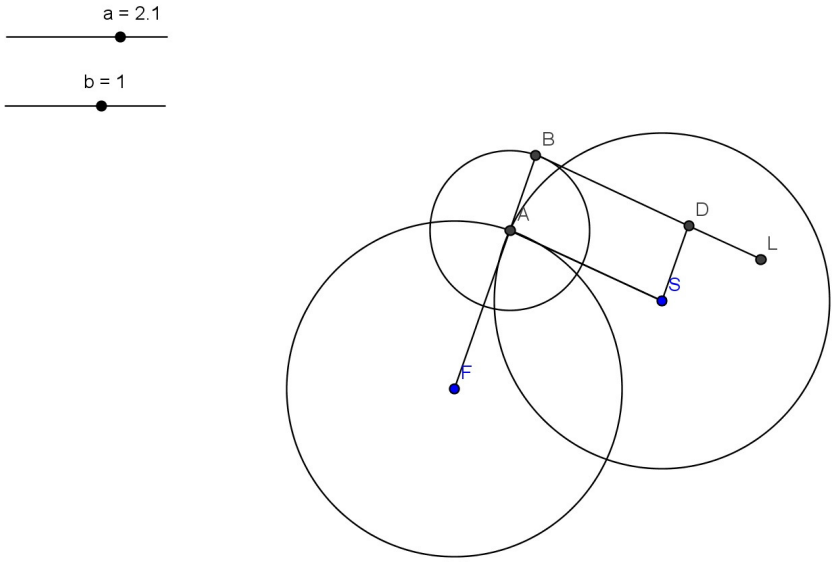


Figura 1. Pantògraf amb GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

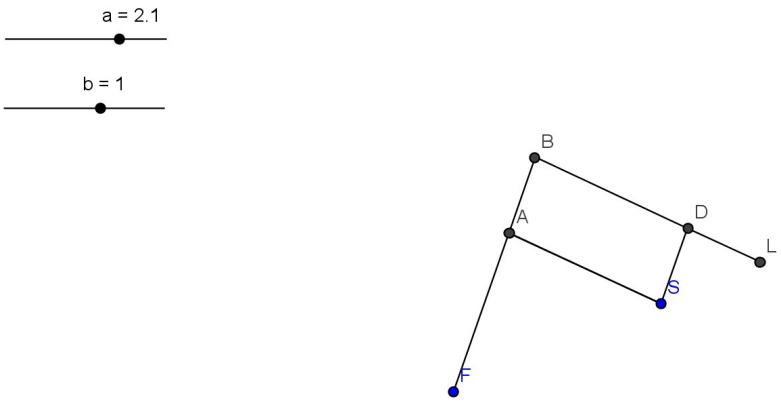


Figura 2. Pantògraf amb GeoGebra sense mostrar les circumferències. Marina Agudelo (2015).

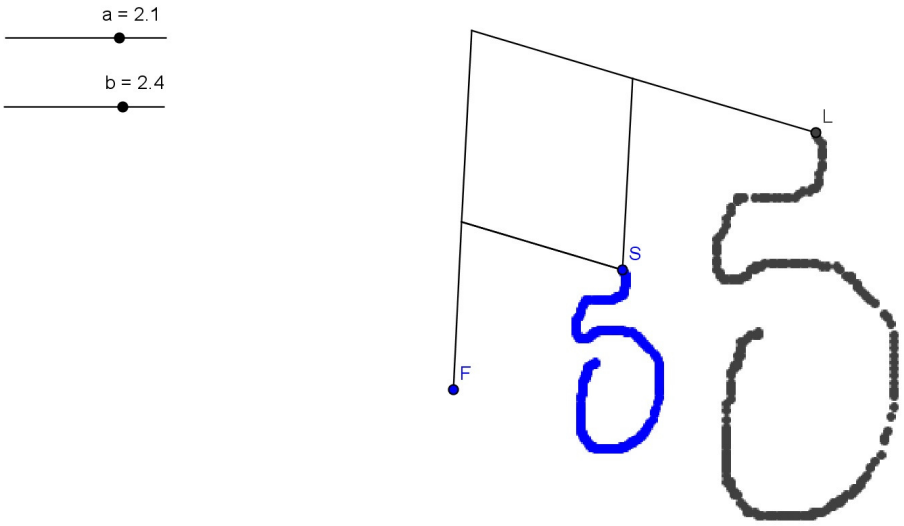


Figura 3. Resultat final del pantògraf amb GeoGebra. Marina Agudelo (2015).

Segona proposta d'activitat:

PANTÒGRAF, quin és l'ERROR?

A continuació, s'adjunta una fotografia de dos pantògrafs, l'objectiu d'aquesta activitat és que l'alumne digui quin és l'error. A simple vista, sembla que tot sigui correcte, però resulta que les propietats que s'haurien de complir perquè efectivament fossin uns patògrafs, no es compleixen.

Estem parlant de que els extrems del pantògraf han d'estar alineats, els punts **A, B** i **C**. I les distàncies **AD = DB = FE** i **BE = EC = DF**. Vegeu a la següent figura.

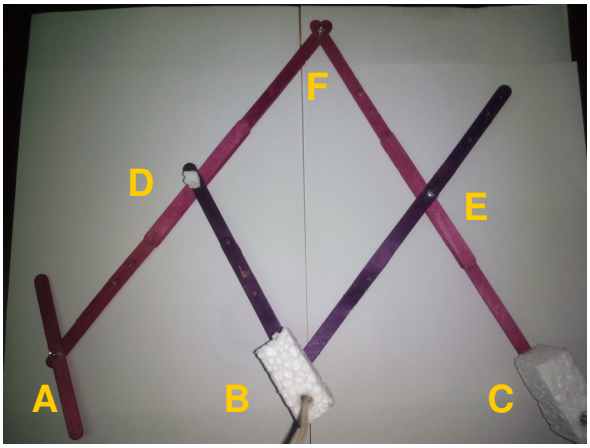


Figura 1. Enumeració dels punts del pantògraf. Marina Agudelo (2015).

PANTÒGRAF, quin és l'ERROR?

A continuació, us mostrem una fotografia de dos suposats **pantògrafs**. Series capaç de dir si hi ha algun d'elles que no sigui correcte? Justifica la teva resposta.

Figura 1. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

PER SABER-NE MÉS:

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Suma de nombres quadrats

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

Definirem el següent vocabulari utilitzat en aquest mòdul:

- Paral·lelepípede: és un cos tridimensional format per sis paral·lelograms (quadrilàter que els seus costats oposats són paral·lels). Tenim tres definicions diferents d'aquest concepte:
  - és un políedre de sis cares, cada un de les quals és un paral·lelogram,
  - un hexàedre amb tres parells de cares paral·leles, i
  - un prisma la base del qual és un paral·lelogram.

  L'**ortòedre** (sis cares rectangulars), el **cub** (sis cares quadrades) i el **rombòedre** (sis cares ròmbiques) són casos concrets del paral·lelepípede.

  El seu volum es calcula de la següent manera:

$$V = (\cos ta\,1)\cdot(\cos tat\,2)\cdot(\cos tat\,3)$$

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència matemàtica.
  L'alumne ha de tenir els conceptes matemàtics clar i en ment.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Els alumnes hauran de valorar si el que estan fent és correcte o no.

- Competència d'autonomia i iniciativa personal.
  En el cas de treball individual, el mòdul requereix presa de decisions i constància per a arribar a la solució.

CONTINGUT HISTÒRIC:

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunten uns retallables que permetran als alumnes reconstruir el mòdul original. Hi ha dues opcions d'impressió: imprimir les peces directament a color, o bé imprimir-les amb sis colors diferents. Un cop impresos, els alumnes hauran de retallar les peces pel contorn i les línies de punts, i muntar-les sense necessitat d'utilitzar la cola, ja que tenen unes senzilles pestanyes que aguanten la peça.

Quan totes les peces estiguin muntades, caldrà enganxar-les una sobre l'altra fins a obtenir la figura del mòdul, és a dir, la següent:

Imatge 16. Figura original del museu. MMACA (2015)

La millor manera d'enganxar les peces és utilitzant cinta adhesiva a doble cara.

Imatge 17. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

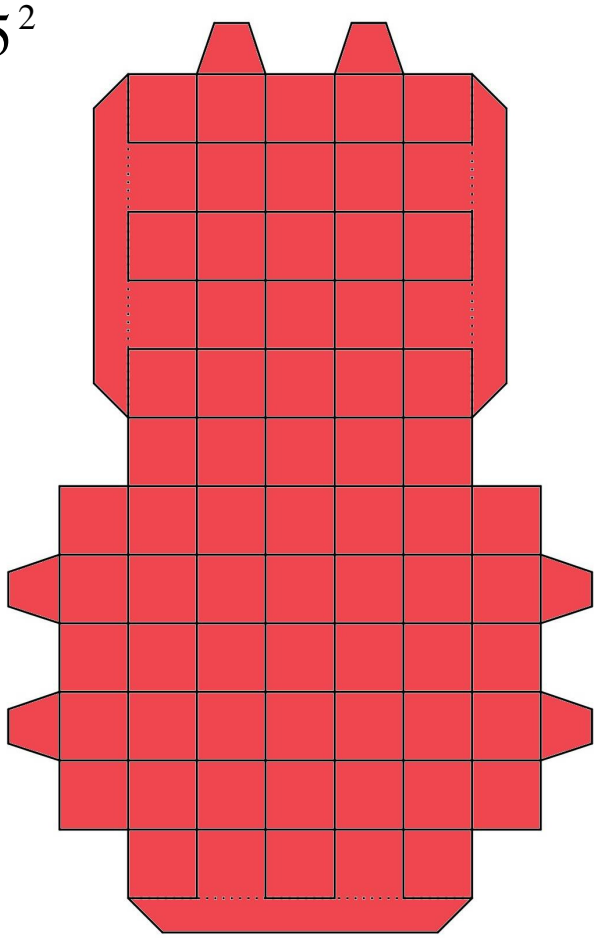
Imatge 18. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 19. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

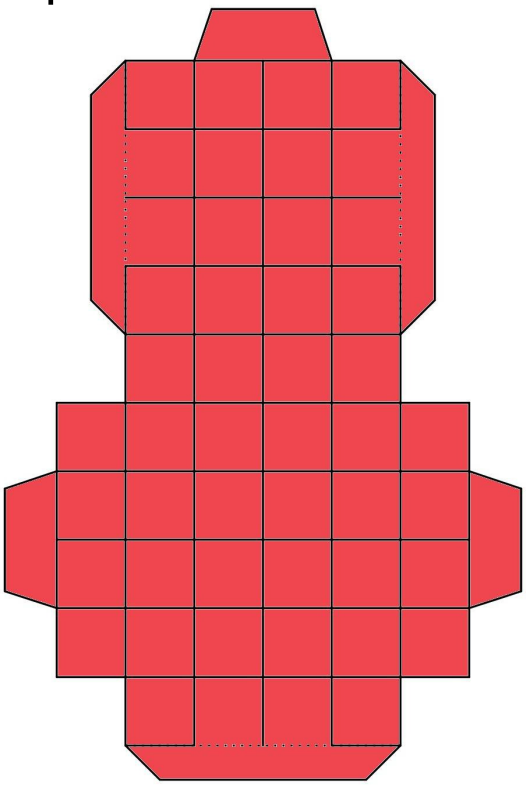
Imatge 20. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

PRIMERA OPCIÓ D'IMPRESSIÓ

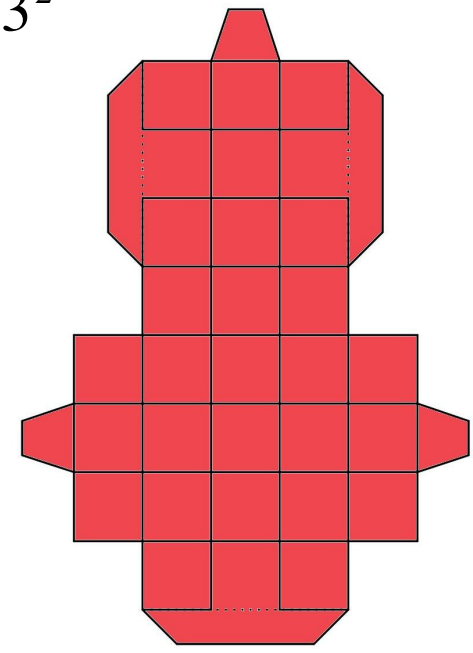
5^2



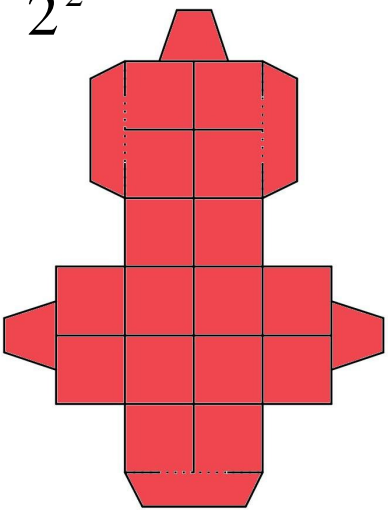
4^2



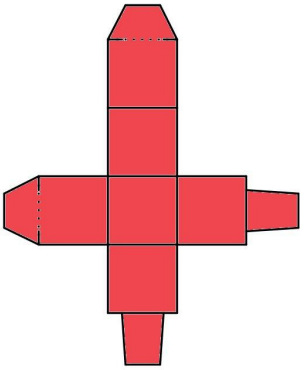
3^2



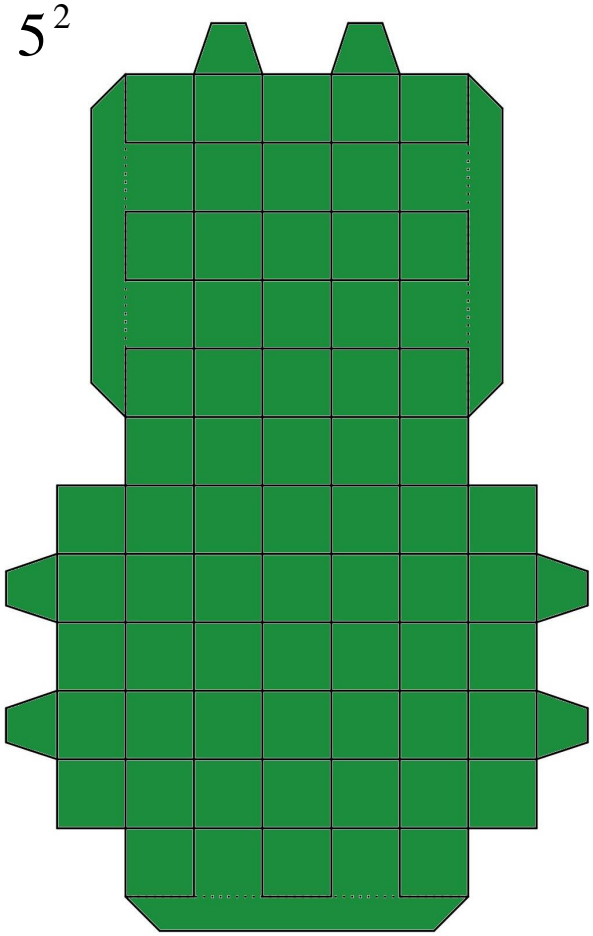
2^2



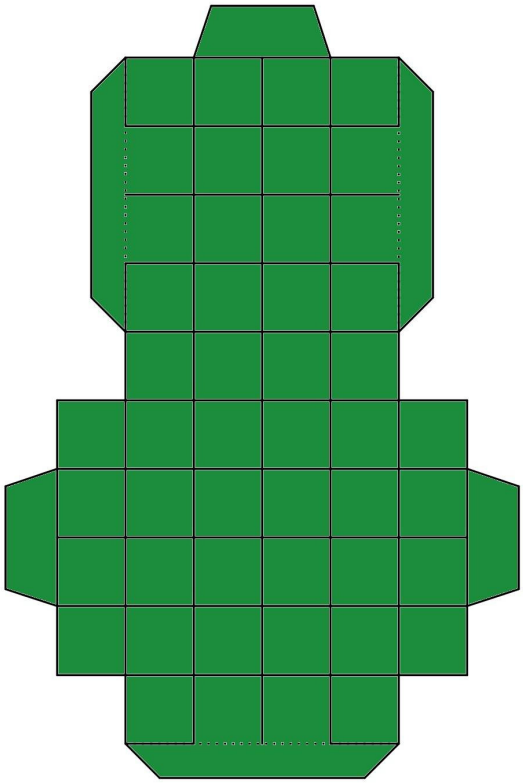
1^2



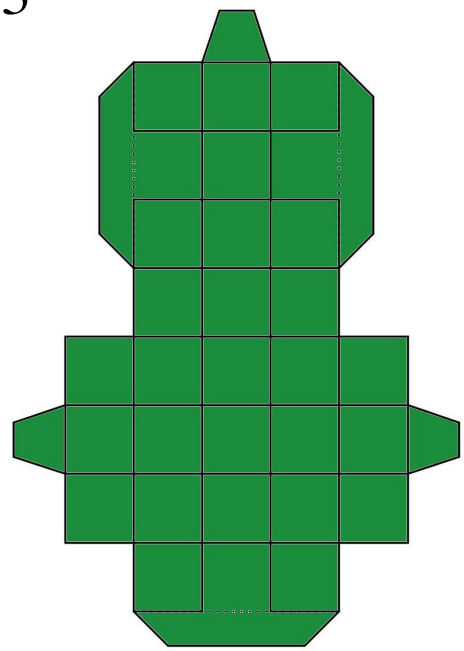
5^2



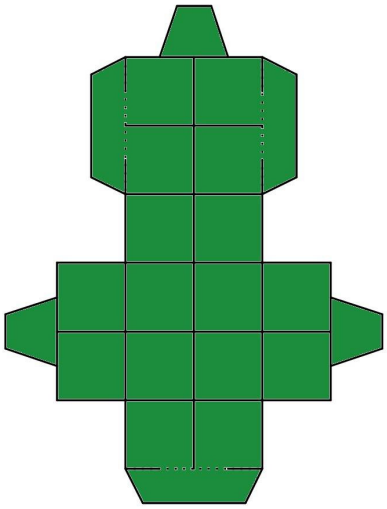
4^2



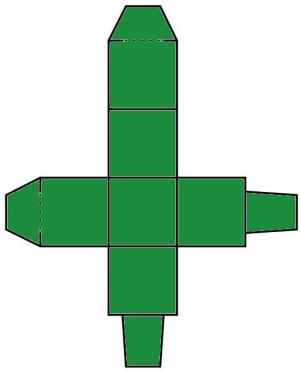
3^2



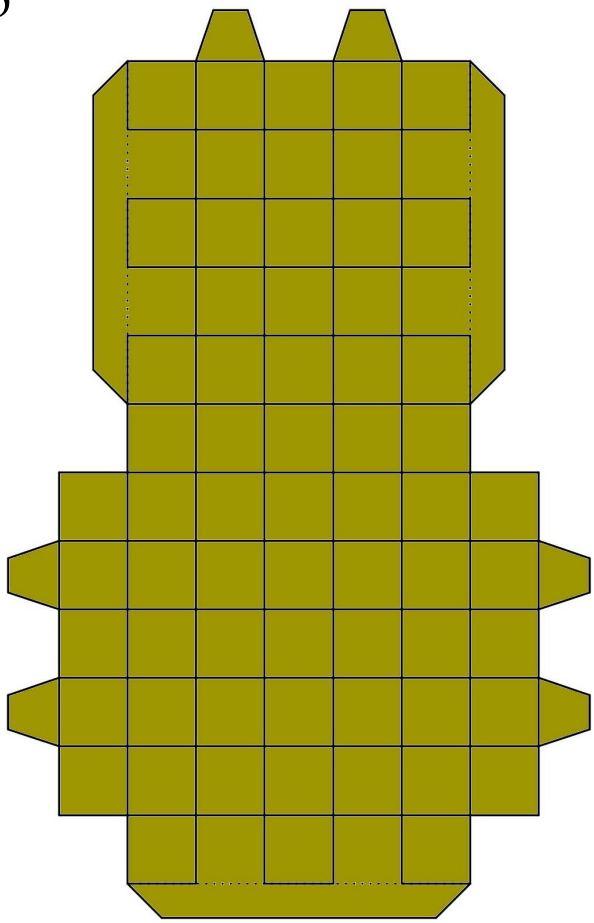
2^2



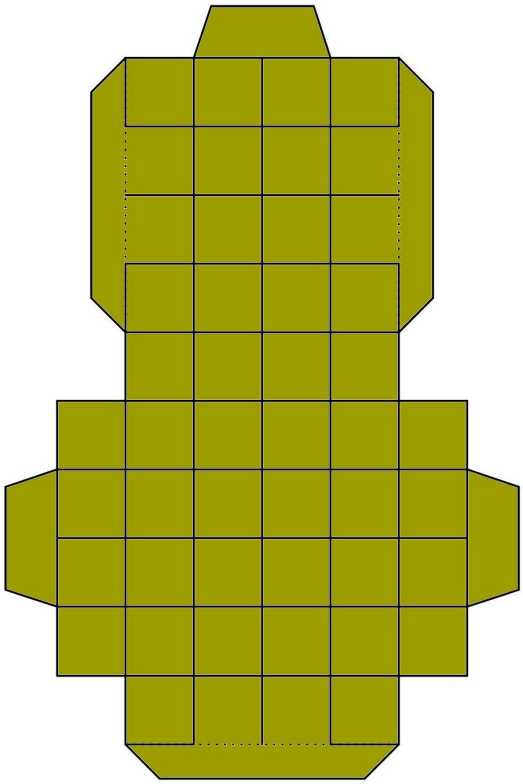
1^2



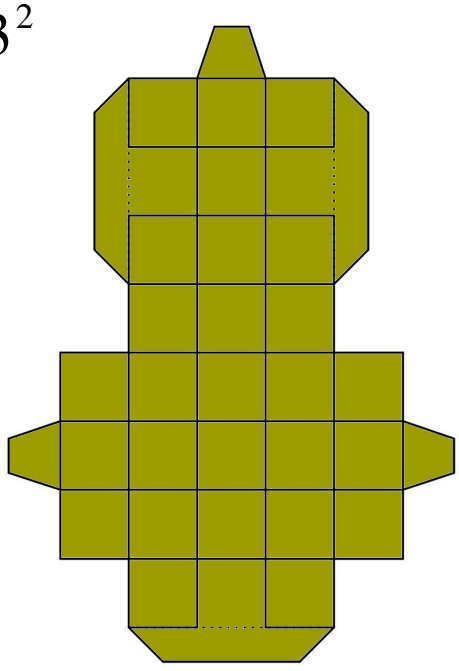
5^2



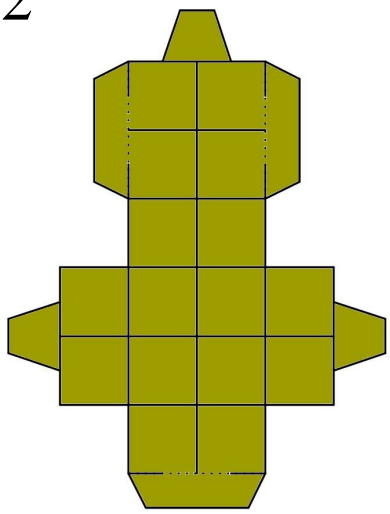
4^2



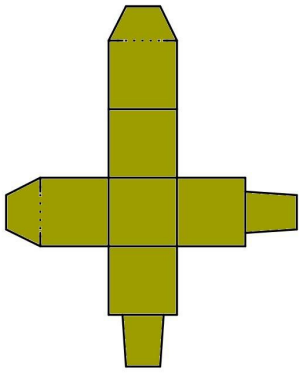
3^2



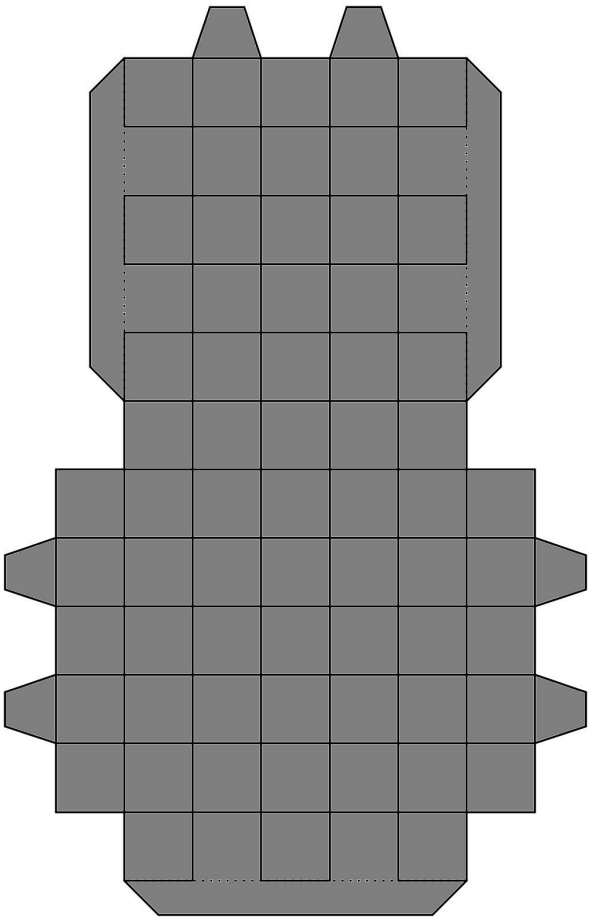
2^2



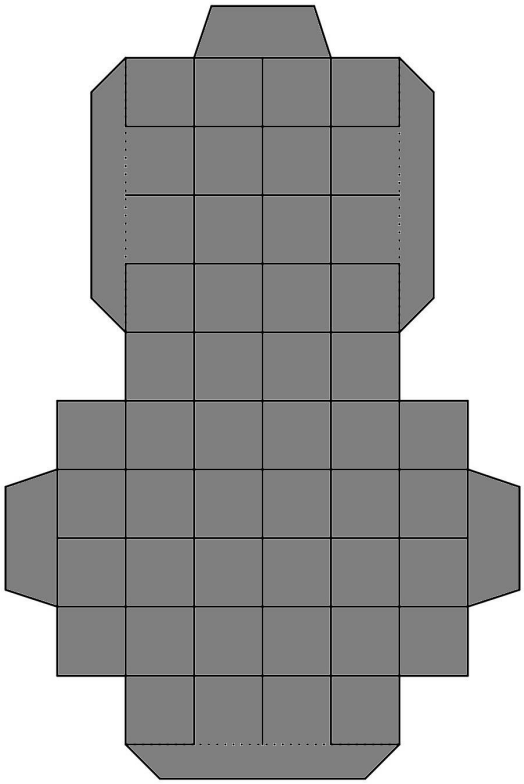
1^2



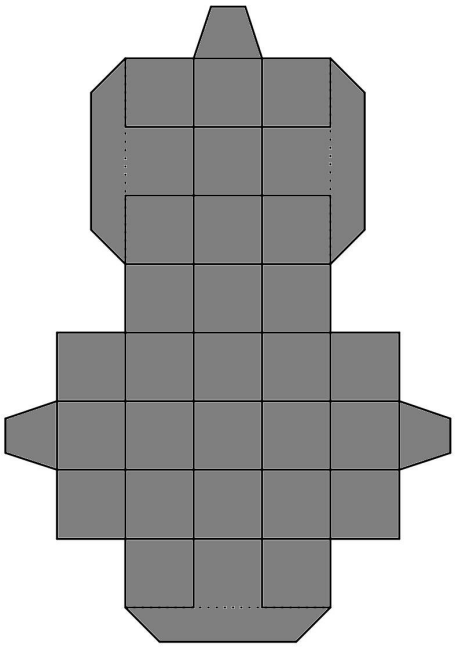
5^2



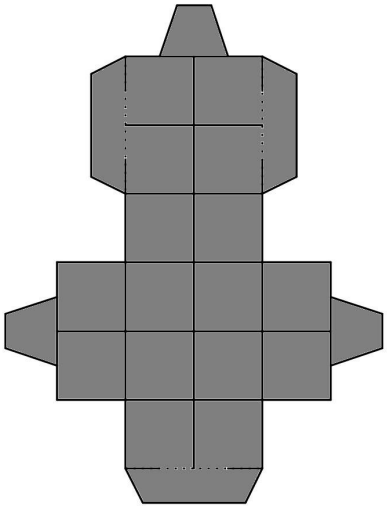
4^2



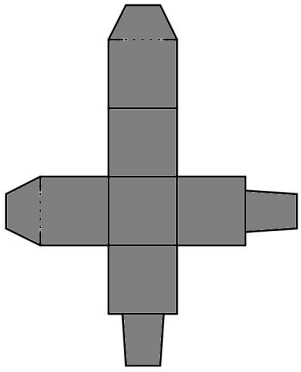
3^2



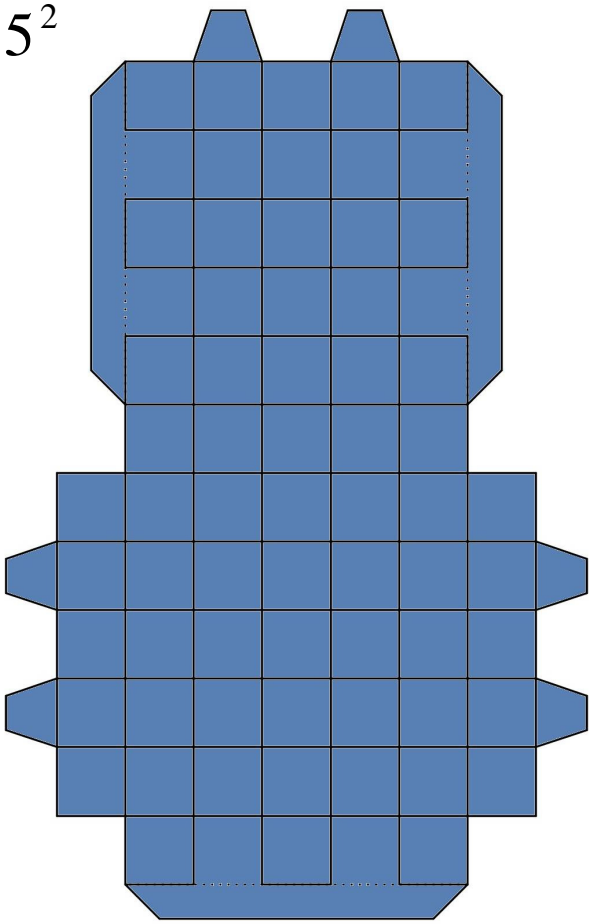
2^2



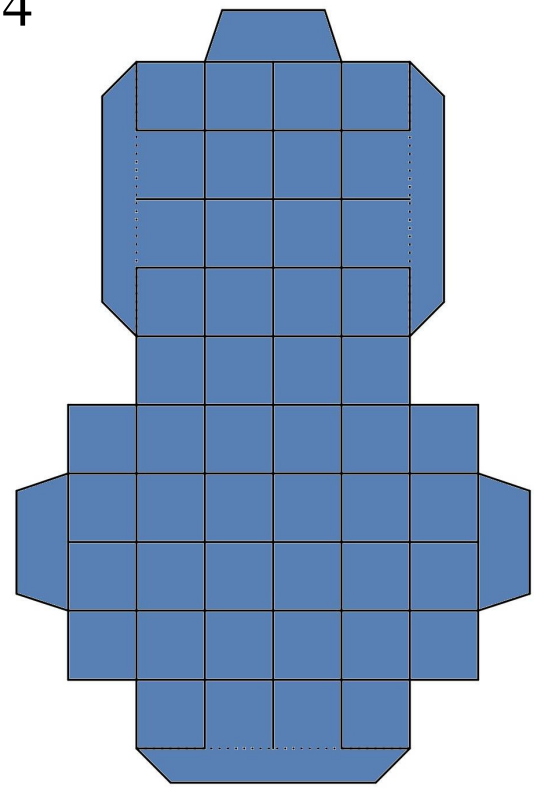
1^2



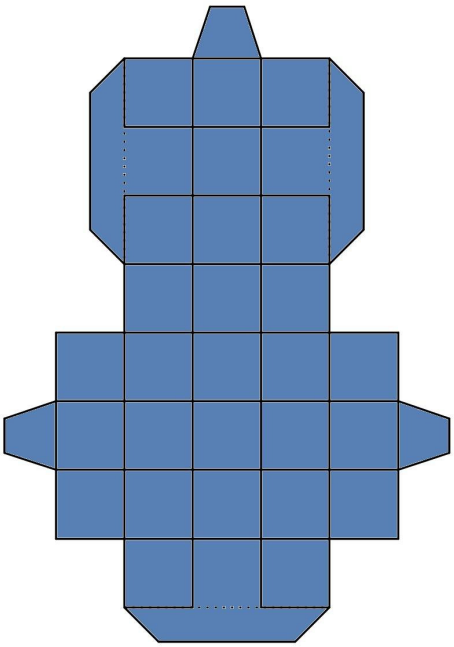
5^2



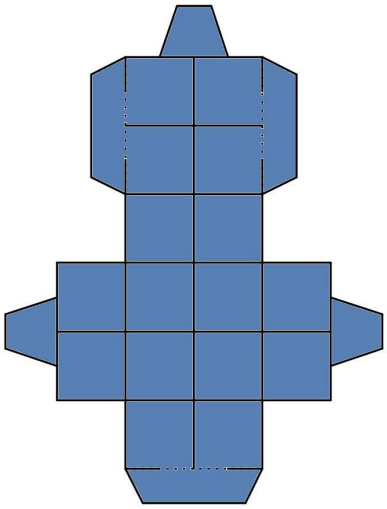
4^2



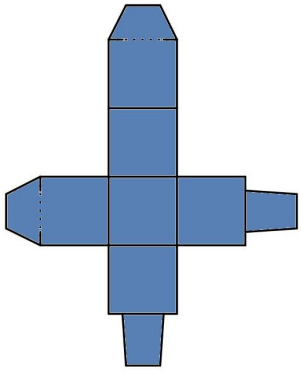
3^2



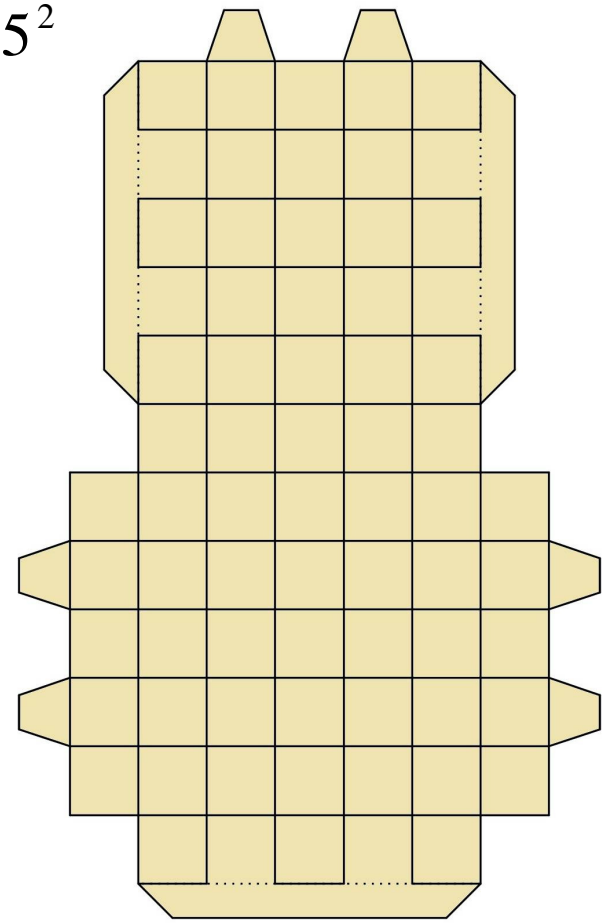
2^2



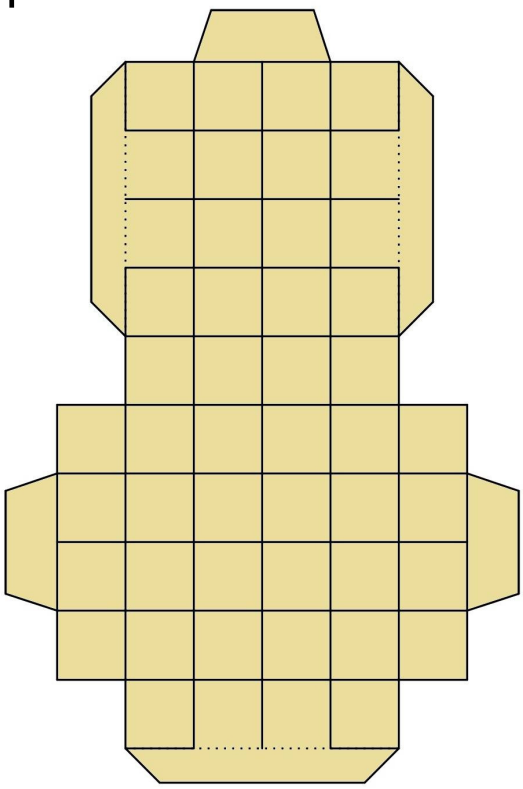
1^2



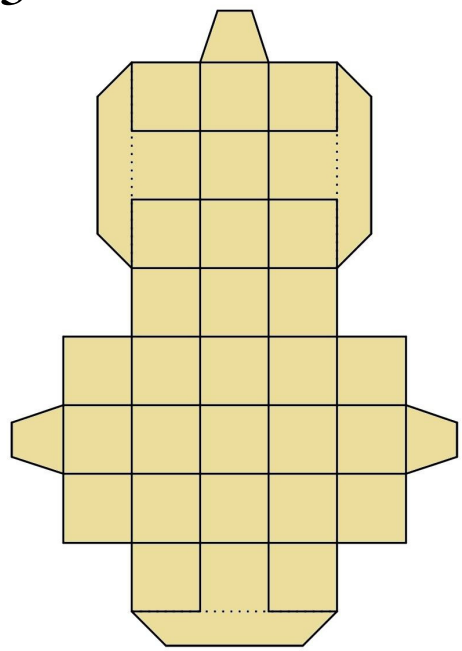
5^2



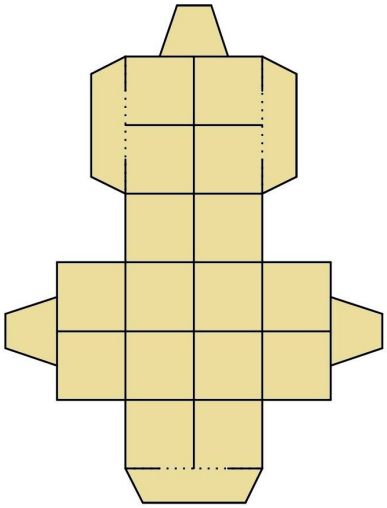
4^2



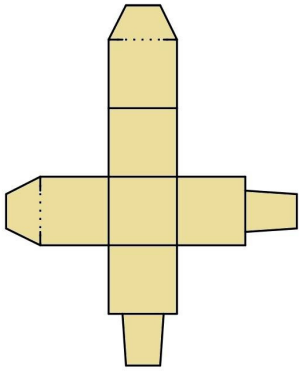
3^2



2^2

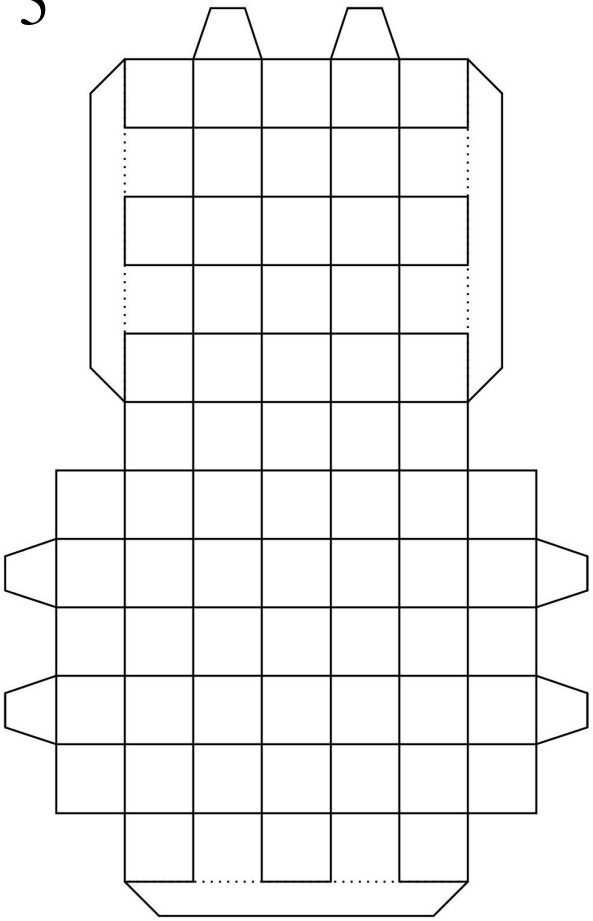


1^2

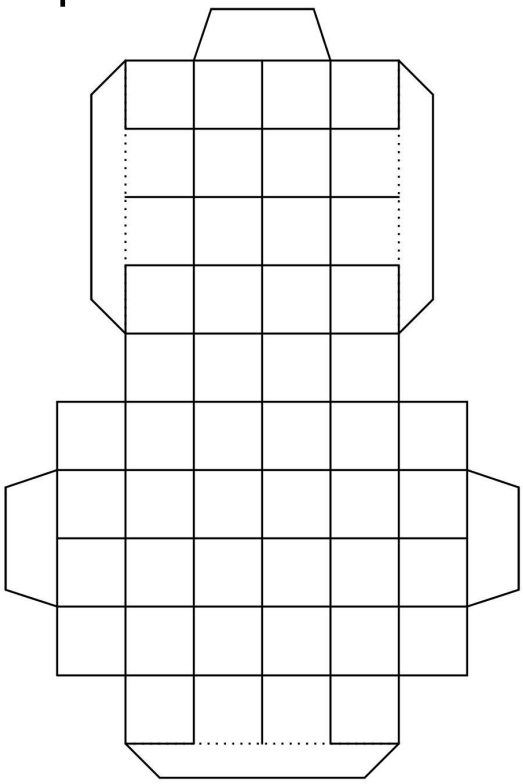


SEGONA OPCIÓ D'IMPRESSIÓ

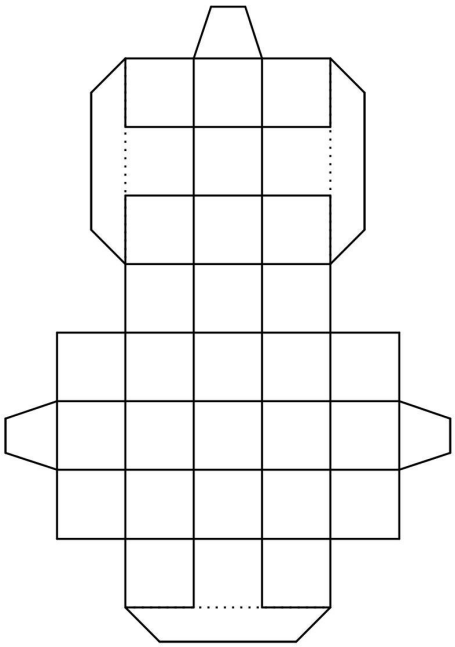
5^2



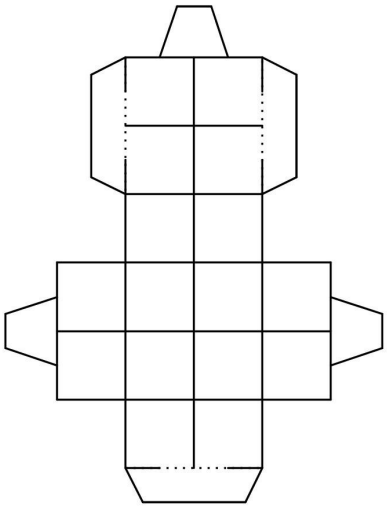
4^2



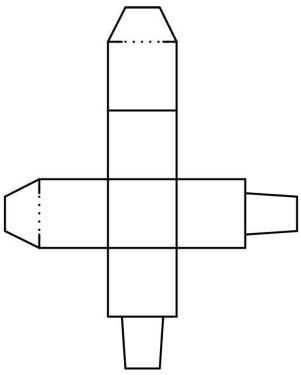
3^2



2^2

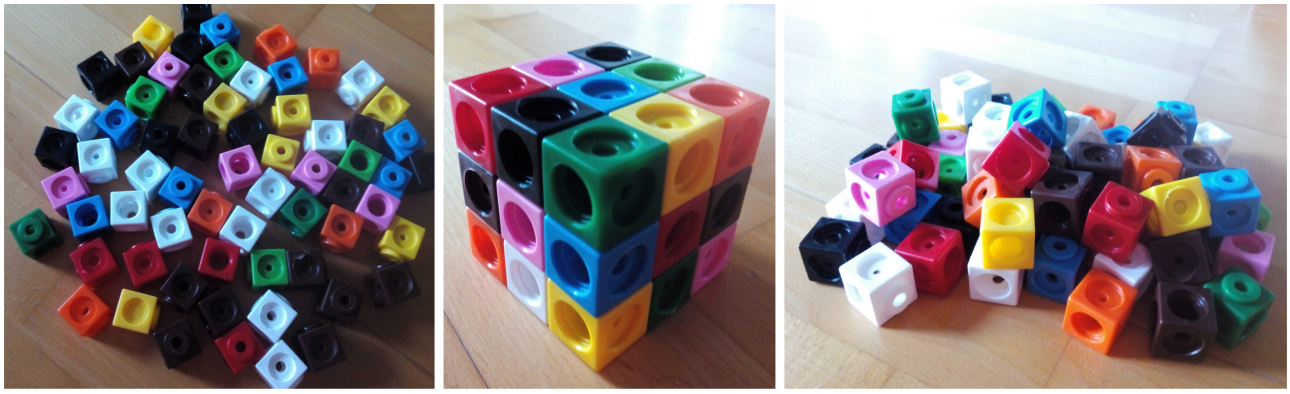


1^2



ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Es plantegen una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul. I en aquest cas utilitzarem els anomenats cubs multilink:



Imatge 21. Cubs multilinks. Marina Agudelo Riba (2015).

- Es tracta que l'alumne utilitzi la construcció feta anteriorment i/o els multilinks, per trobar l'expressió general de la suma de quadrats consecutius. És a dir, el nucli d'aquest mòdul. Mostrem els primers:

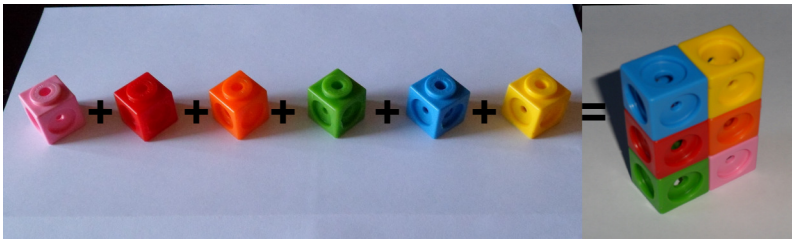


Figura 16. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

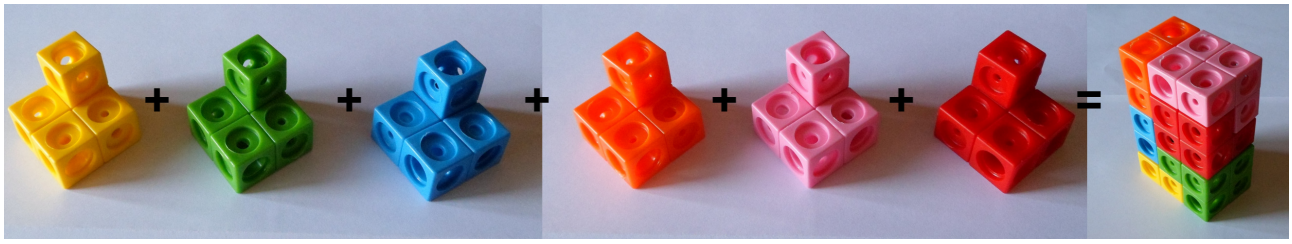


Figura 17. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

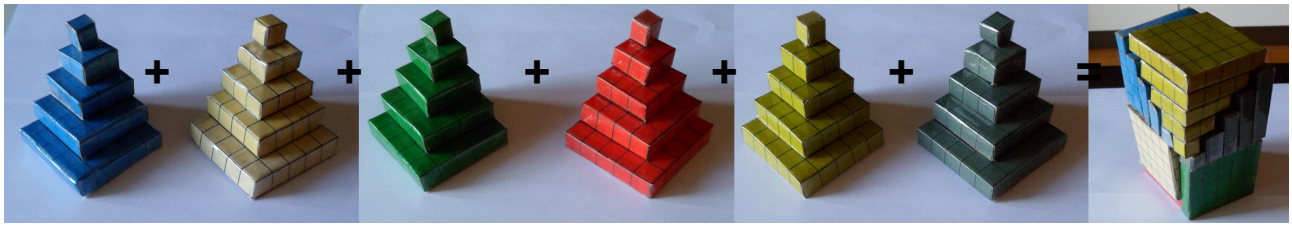


Figura 18. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

- Es tracta que l'alumne utilitzi els multilink per veure que a partir de la suma de dos nombres triangulars consecutius dóna un nombre quadrat.

Per exemple:

$$T_2 + T_3 = Q_3 \Leftrightarrow$$

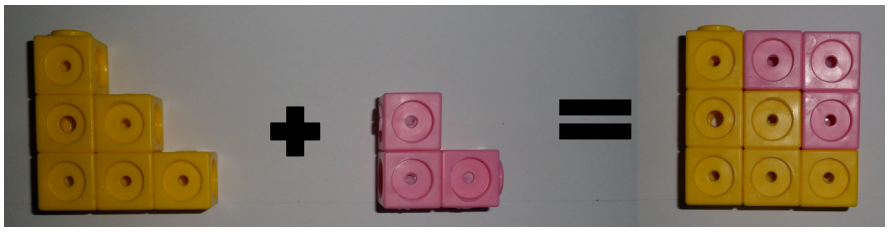


Figura 4. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

$$T_3 + T_4 = Q_4 \Leftrightarrow$$

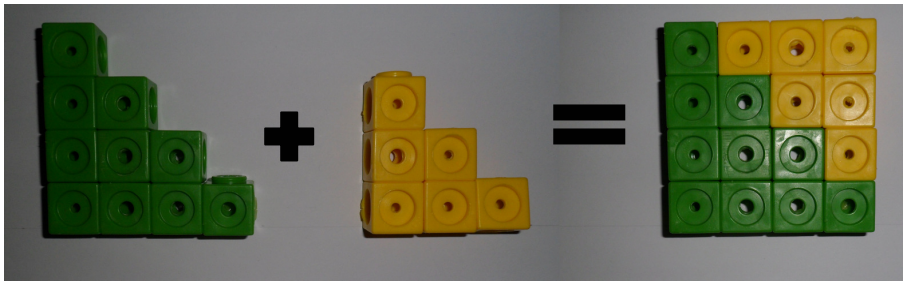


Figura 5. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

I a més se'ls hi pot preguntar als alumnes, si poden trobar l'expressió general de la suma de dos nombres triangulars consecutius dóna un nombre quadrat.

- L'altra activitat que també es pot realitzar amb el multilink és el de demostrar que sumant vuit vegades el mateix triangular, ens dóna un nombre quadrat menys un.

Per exemple:

$$T_2 + T_2 + T_2 + T_2 + T_2 + T_2 + T_2 + T_2 = 8 \cdot T_2 = Q_5 - 1 \Leftrightarrow$$

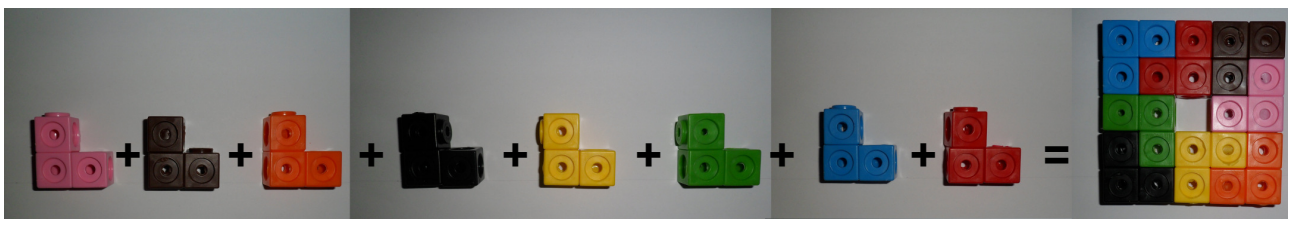


Figura 6. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

$$T_3 + T_3 + T_3 + T_3 + T_3 + T_3 + T_3 + T_3 = 8 \cdot T_3 = Q_7 - 1 \Leftrightarrow$$

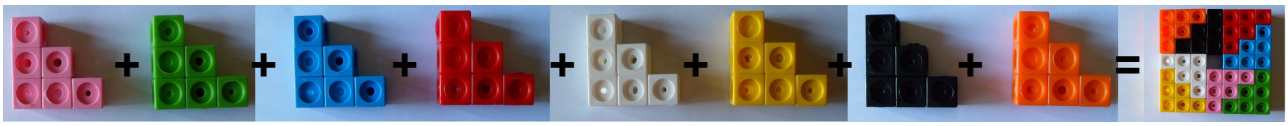


Figura 7. Construcció real amb cubs multilinks. Marina Agudelo (2015).

I a més se'ls hi pot preguntar als alumnes, si poden trobar l'expressió general de la suma de vuit nombres triangulars iguals dóna un nombre quadrat menys un.

PER SABER-NE MÉS:

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Tres triangles equilàters

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

- Triangle equilàter: és una figura geomètrica plana limitada per tres segments que tenen la mateixa longitud cadascun.

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços d'expressar tant en oral com en escrit tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència matemàtica.
  Pels conceptes i metodologies matemàtiques que es treballen.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i els errors a cada pas.

- Competència d'autonomia i iniciativa persona.
  Treballar de manera individual tot prenent decisions per portar a terme el mòdul.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Henry Ernest Dudeney (10/4/1857 – 24/4/1930) fou un matemàtic anglès autor de jocs i trencaclosques matemàtics. Es considera un dels millors creadors de trencaclosques.

Erik Demaine: al març de 2008 el jove canadenc va continuar amb la línia de Dudeney. Es va preguntar si seria possible tallar qualsevol polígon en peces i unir-les formant una cadena perquè alhora de plegar-la cap un costat o l'altre es formessin figures diferents. I ho va aconseguir.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunta una plantilla per poder construir els tres triangles equilàters.

Per a la construcció del mòdul original necessitarem el següent material:

- una placa de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN" amb un gruix d'un centímetre;
- agulles de cap de cosir, per subjectar la plantilla de paper;
- un cúter, per tallar la placa; i
- unes pintures acríliques, per pintar les peces.

Passos que s'han de seguir:

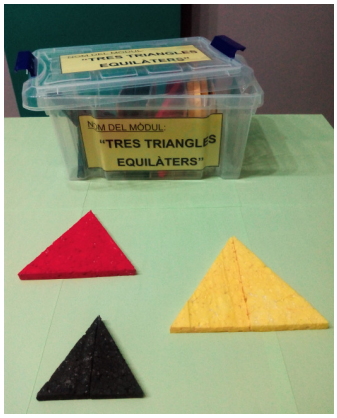
- Donar a cada alumne una plantilla dels tres triangles equilàters, i retallar-los.
- Clavar amb les agulles de cap la plantilla a la placa de porexpan.
- Amb l'ajuda del cúter tallar el contorn de cada triangle.
- Finalment, pintar les peces com el mòdul original.

Es podria fer la construcció com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia.

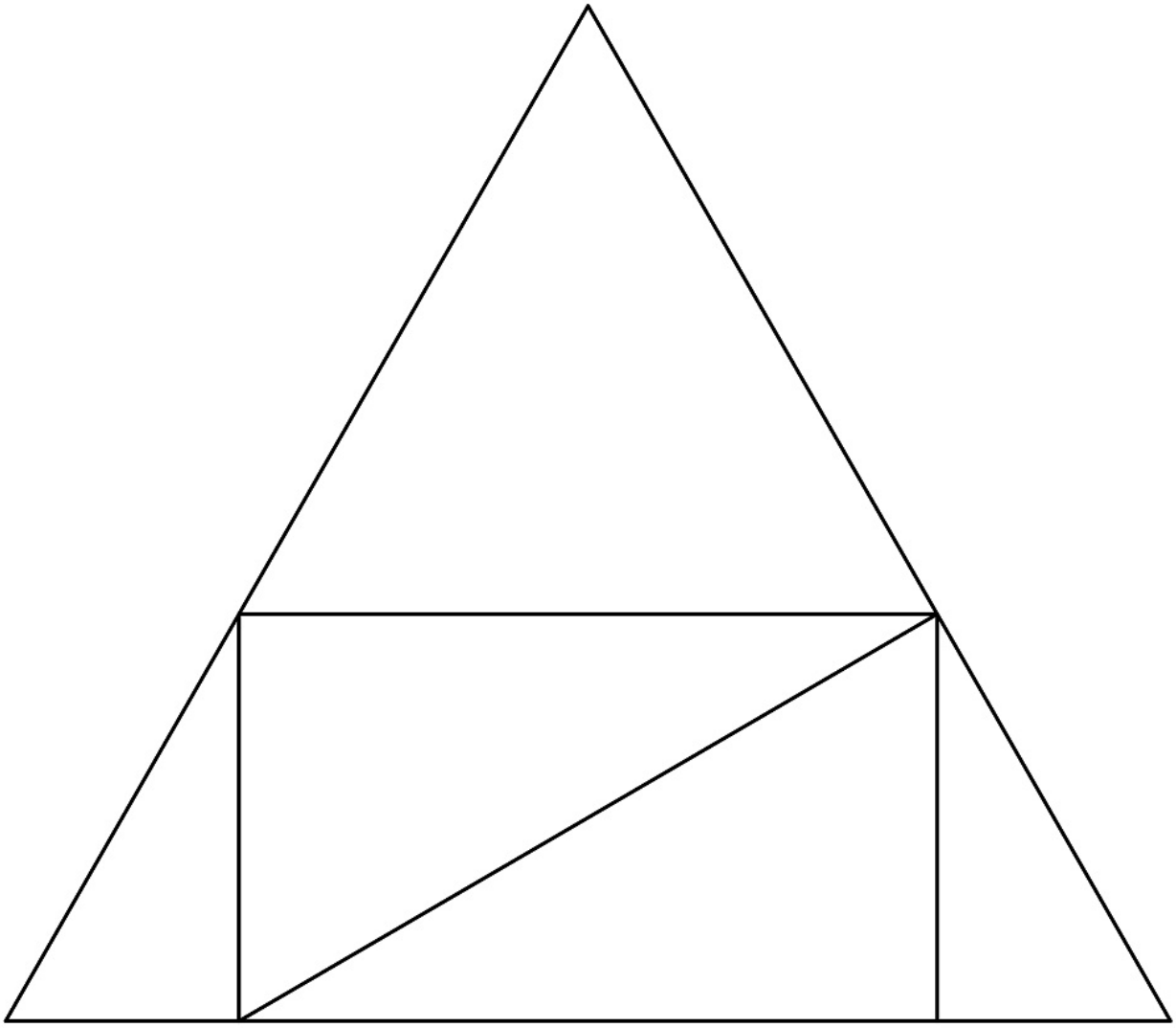
Imatge 19. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 20. Construcció real d'un triangle equilàter. Marina Agudelo (2015).

Imatge 21. Construcció real de dos triangles equilàters. Marina Agudelo (2015).



Imatge 22. Construcció real de tres triangles equilàters. Marina Agudelo (2015).

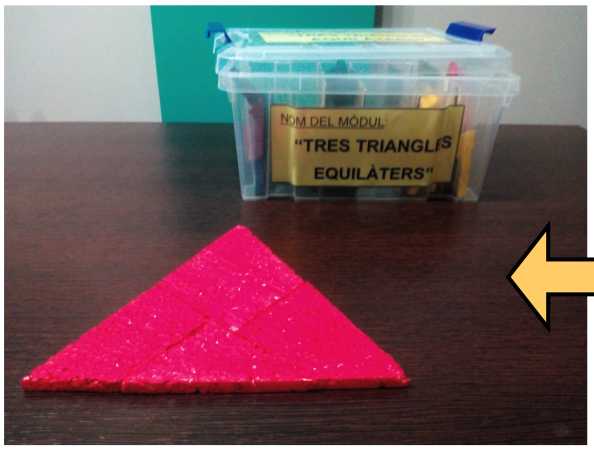


ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Hem observat que disseccionament un polígon podem trobar-ne d'altres. A continuació, proposem altres disseccions geomètriques. Aquestes disseccions consisteixen a tallar una figura en peces poligonals i refer-les per formar una nova figura.

S'adjunten les següents plantilles: **del triangle al quadrat, del pentàgon al quadrat, de l'hexàgon al quadrat** i **de l'octàgon al quadrat**; i a l'inrevés. Tots aquests materials es realitzaran de la mateixa manera que els tres triangles equilàters, amb el mateix material i el mateix procediment.

Del triangle al quadrat:



Imatge 23. Construcció real del triangle. Marina Agudelo (2015).

Imatge 24. Construcció real del quadrat. Marina Agudelo (2015).

Del pentàgon al quadrat:

Figura 25. Construcció real del pentàgon. Marina Agudelo (2015).

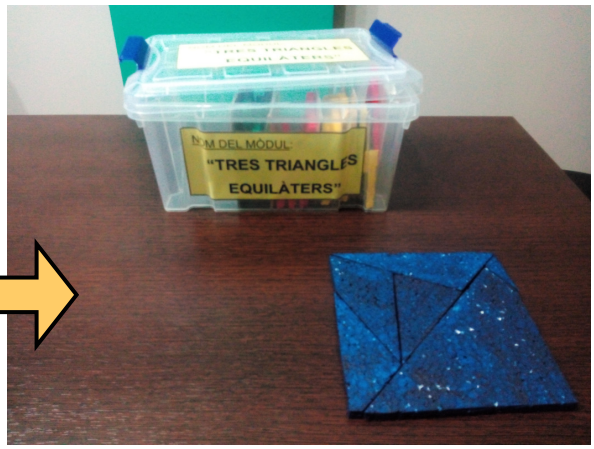


Figura 26. Construcció real del quadrat. Marina Agudelo (2015).

De l'hexàgon al quadrat:

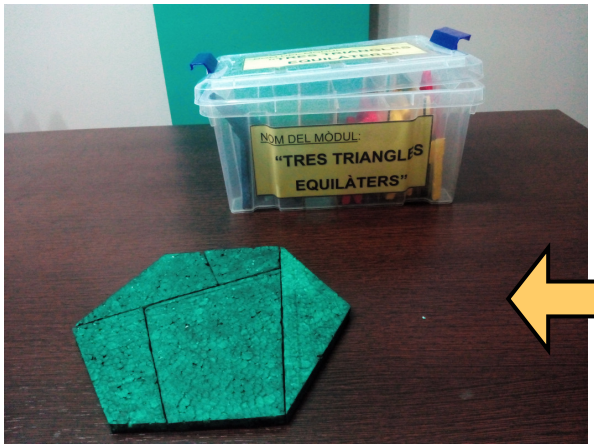


Figura 27. Construcció real de l'hexàgon.
Marina Agudelo (2015).

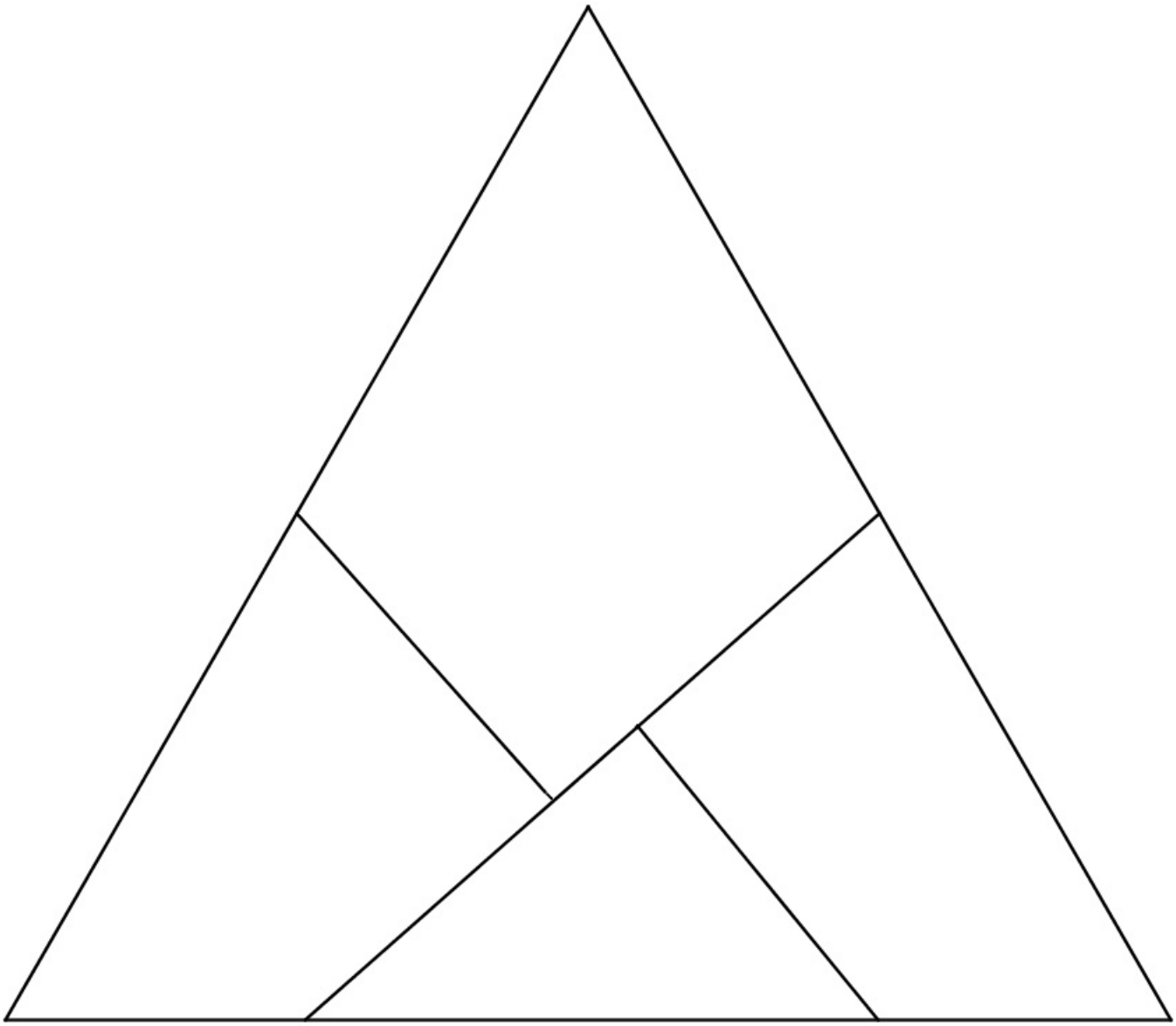
Figura 28. Construcció real del quadrat.
Marina Agudelo (2015).

De l'octàgon al quadrat:

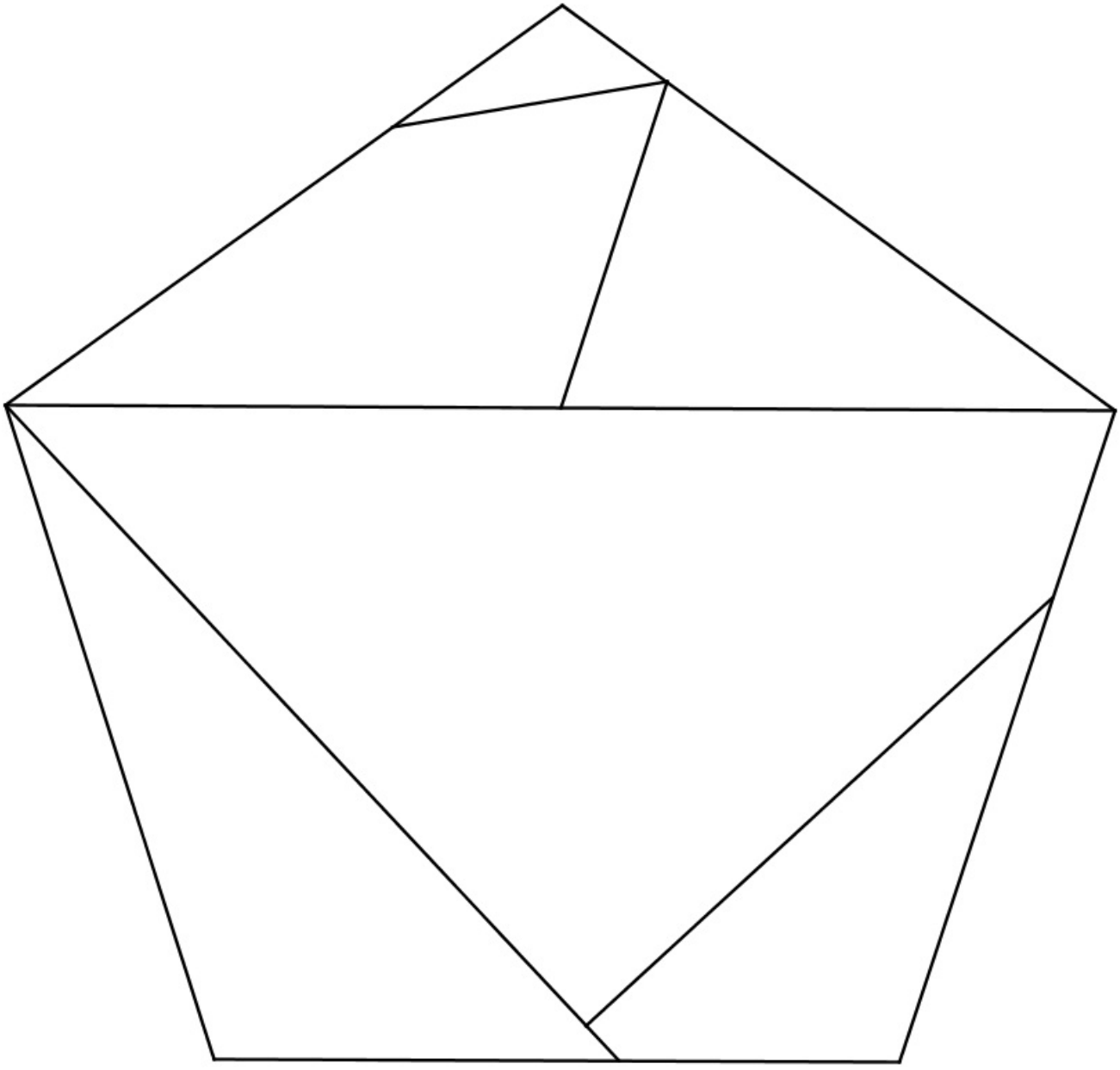
Figura 29. Construcció real de l'octàgon.
Marina Agudelo (2015).

Figura 30. Construcció real. Del quadrat
Marina Agudelo (2015).

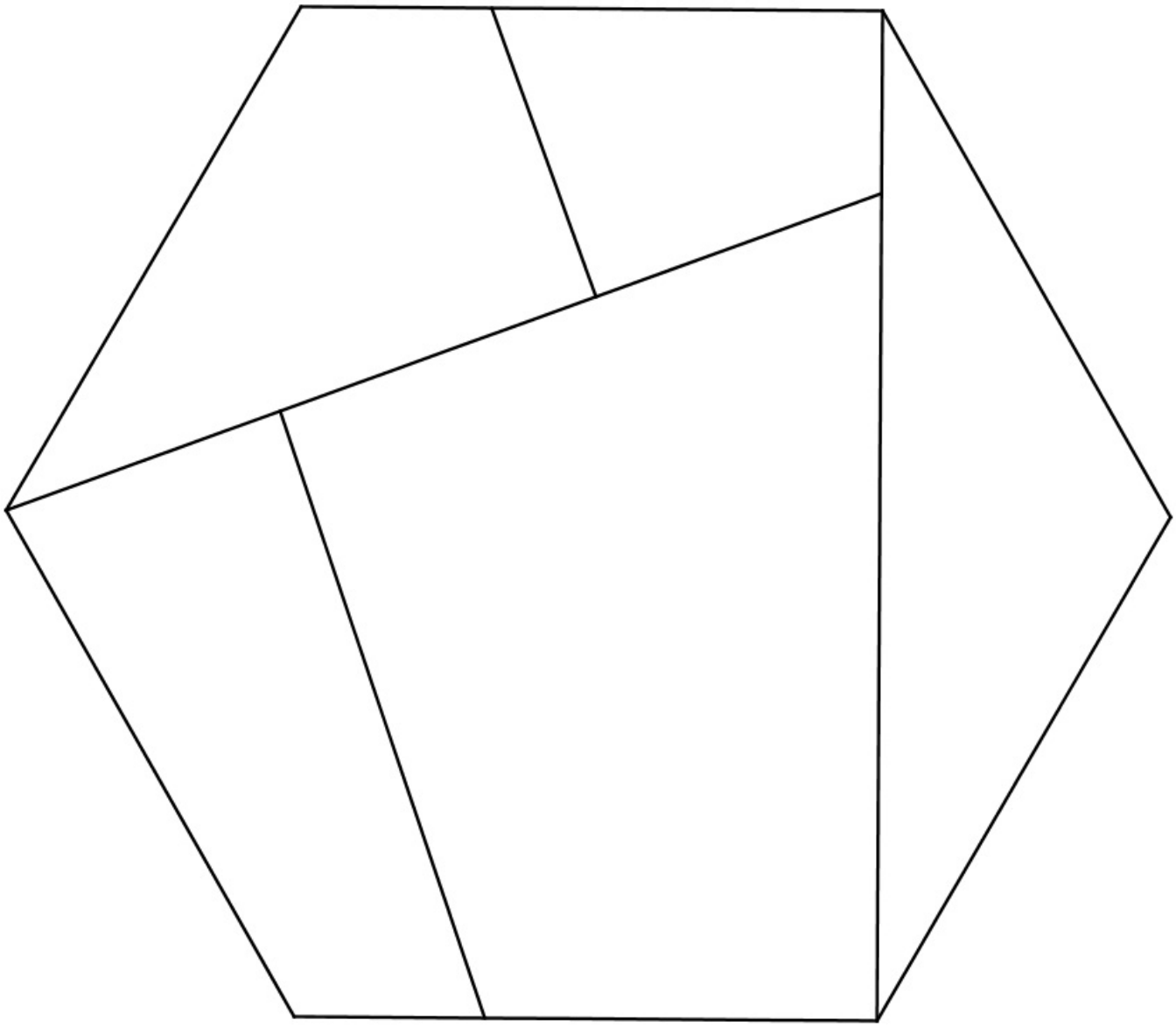
TRIANGLE:



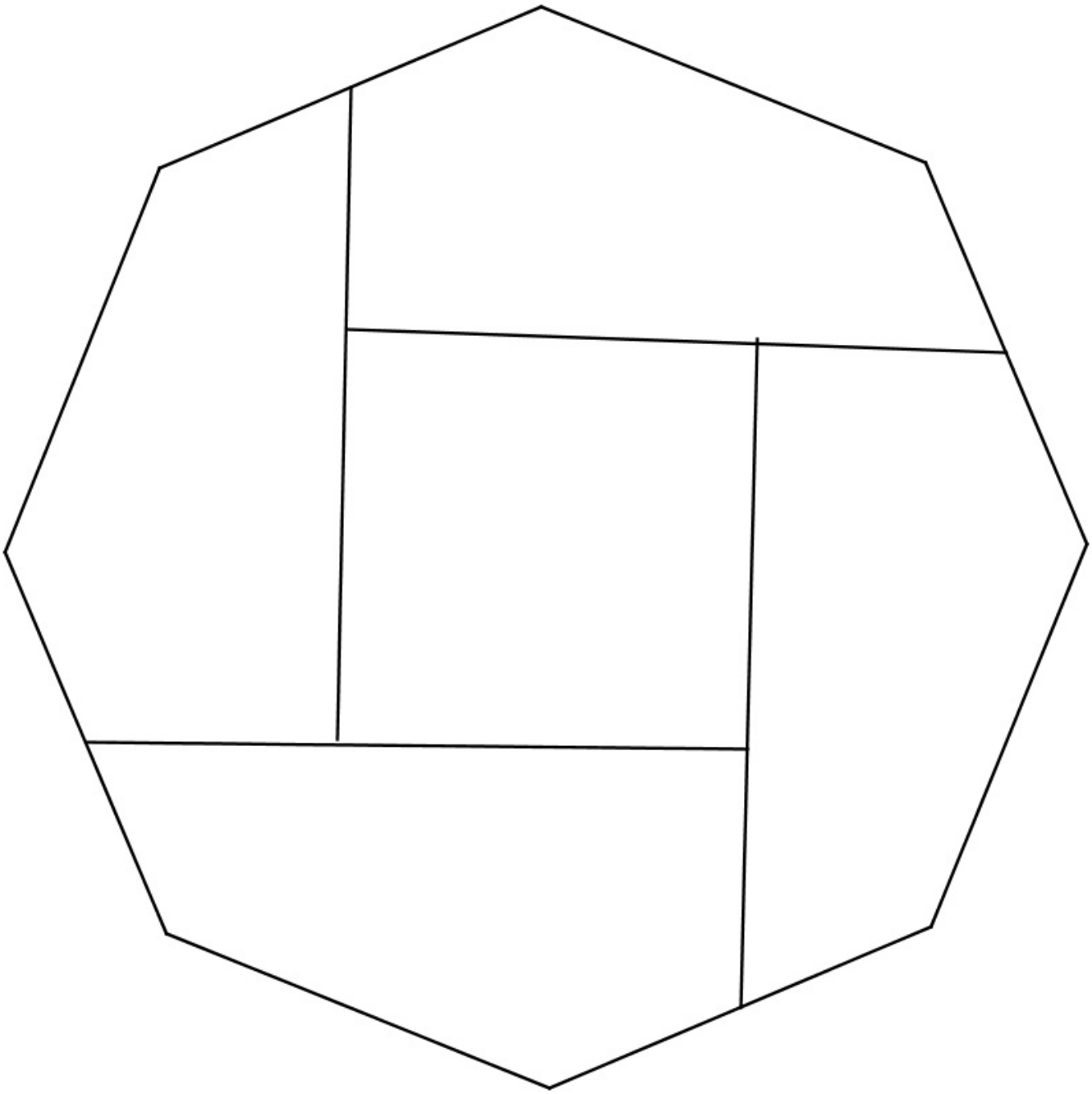
PENTÀGON:



HEXÀGON:



OCTÀGON:



PER SABER-NE MÉS:

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Vestir políedres

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

CONEIXEMENTS PREVIS:

Un políedre regular, políedre platònic o sòlid platònic és un políedre, les cares del qual són polígons regulars iguals i que formen entre ells angles diedres iguals. Hi ha cinc políedres regulars:

- Tetràedre regular: és un políedre de quatre cares, quatre vèrtexs i sis arestes, on cadascuna de les cares són triangles equilàters.
- Octàedre regular: és un políedre de vuit cares, sis vèrtex i dotze arestes, on cadascuna de les cares són triangles equilàters.
- Hexàedre regular o cub: és un políedre de sis cares, vuit vèrtexs i dotze arestes, on cadascuna de les cares són quadrats.
- Dodecàedre regular: és un políedre de dotze cares, vint vèrtexs i trenta arestes, on cadascuna de les cares són pentàgons regulars.
- Icosàedre regular: és un políedre de vint cares, dotze vèrtexs i trenta arestes, on cadascuna d eles cares són triangles equilàters.

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa, lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços d'expressar tant en oral com en escrit tots els coneixements apresos en aquesta activitat.
- Competència matemàtica.
  L'alumne ha de tenir els conceptes matemàtics clars i en ment.
- Competència d'autonomia i iniciativa personal.
  Tenir la capacitació d'estratègies de planificació i execució en els diferents activitats del mòdul.

- Competència social i ciutadana.
  El mòdul permet treballar en petits i grans grups d'alumnes

CONTINGUT HISTÒRIC:

Sòlids platònics: Reben aquest nom en honor al filòsof grec Plató, el qual se li atribueix haver-los estudiat en primer lloc. Les propietats d'aquests políedres són conegudes des de l'antiguitat clàssica, hi ha referències en unes boles neolítiques de pedra llaurada trobades a Escòcia, 1000 anys abans que Plató fes una descripció detallada dels mateixos en els elements d'Euclides. Se'ls hi va atribuir fins i tot propietats màgiques o místiques.
Els antics grecs van estudiar els sòlids platònics a fons, i fonts (com Proclo) atribueixen a Pitàgores el seu descobriment. Una altre evidència suggereix que només estava familiaritzat em el tetràedre, el cub i el dodecàedre, i que el descobriment de l'octàedre i l'icosàedre pertanyen a Teeteto, un matemàtic grec contemporani de Plató. En qualsevol cas, Teeteto va donar la descripció matemàtica dels cinc políedres i és possible que fos el responsable de la primera demostració de que no existeixen altres políedres regulars convexos.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunten uns retallables que permetran als alumnes reconstruir el mòdul original, el cub i el dodecàedre.

Cada retallable consisteix en tres plantilles:

- La primera, representa el políedre sencer, és a dir, el que s'aniria vestint. Els alumnes només hauran de retallar el contorn i les línies de punts i muntar-lo (no fa falta emprar cola, ja que porten incorporades unes pestanyes que permeten fer la construcció amb més facilitat), i per donar més cos es pot omplir amb alguna bola de paper.

- Les dues següents plantilles consisteixen en dos models diferents per vestir el políedre anterior. Només cal que els alumnes retallin cara per cara el políedre i així ja tenen les peces per muntar-lo.

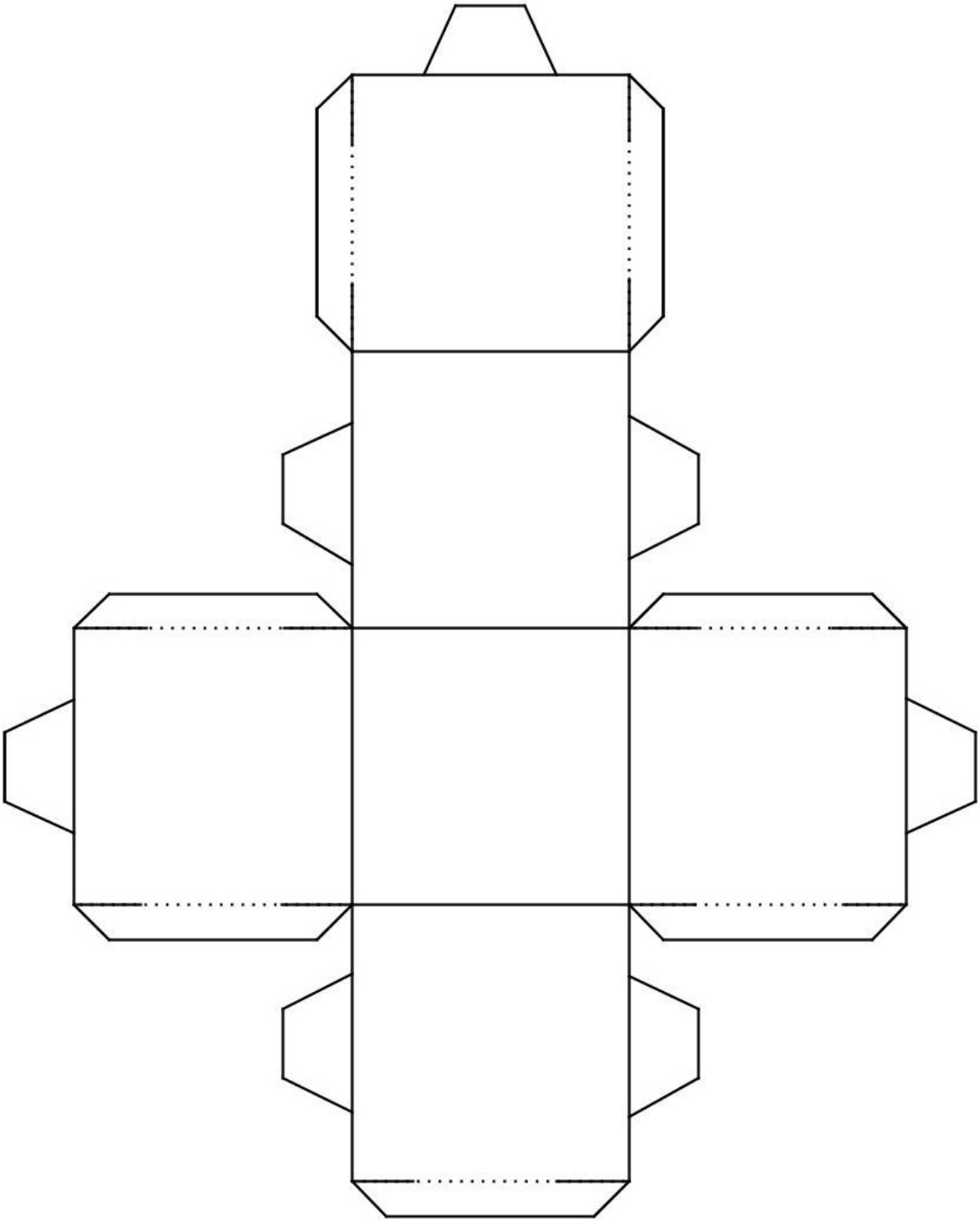
A l'hora d'ajuntar les peces, és molt pràctic fer-ho amb cinta adhesiva de velcro, ja que d'aquesta manera permet realitzar el mòdul tal qual l'original.

Imatge 22. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

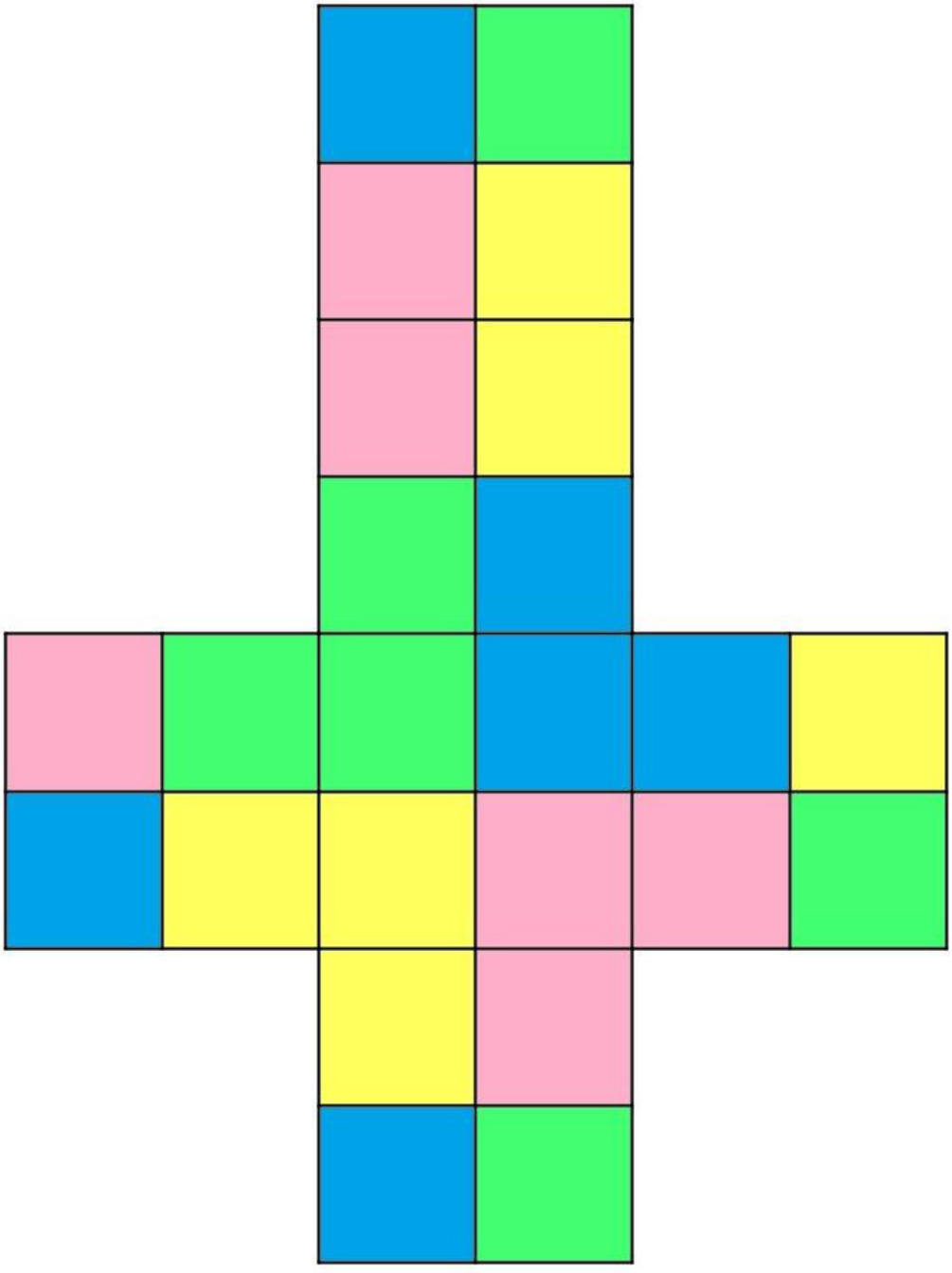
Imatge 23. Construcció real del cub. Marina Agudelo (2015).

Imatge 24. Construcció real del dodecàedre. Marina Agudelo (2015).

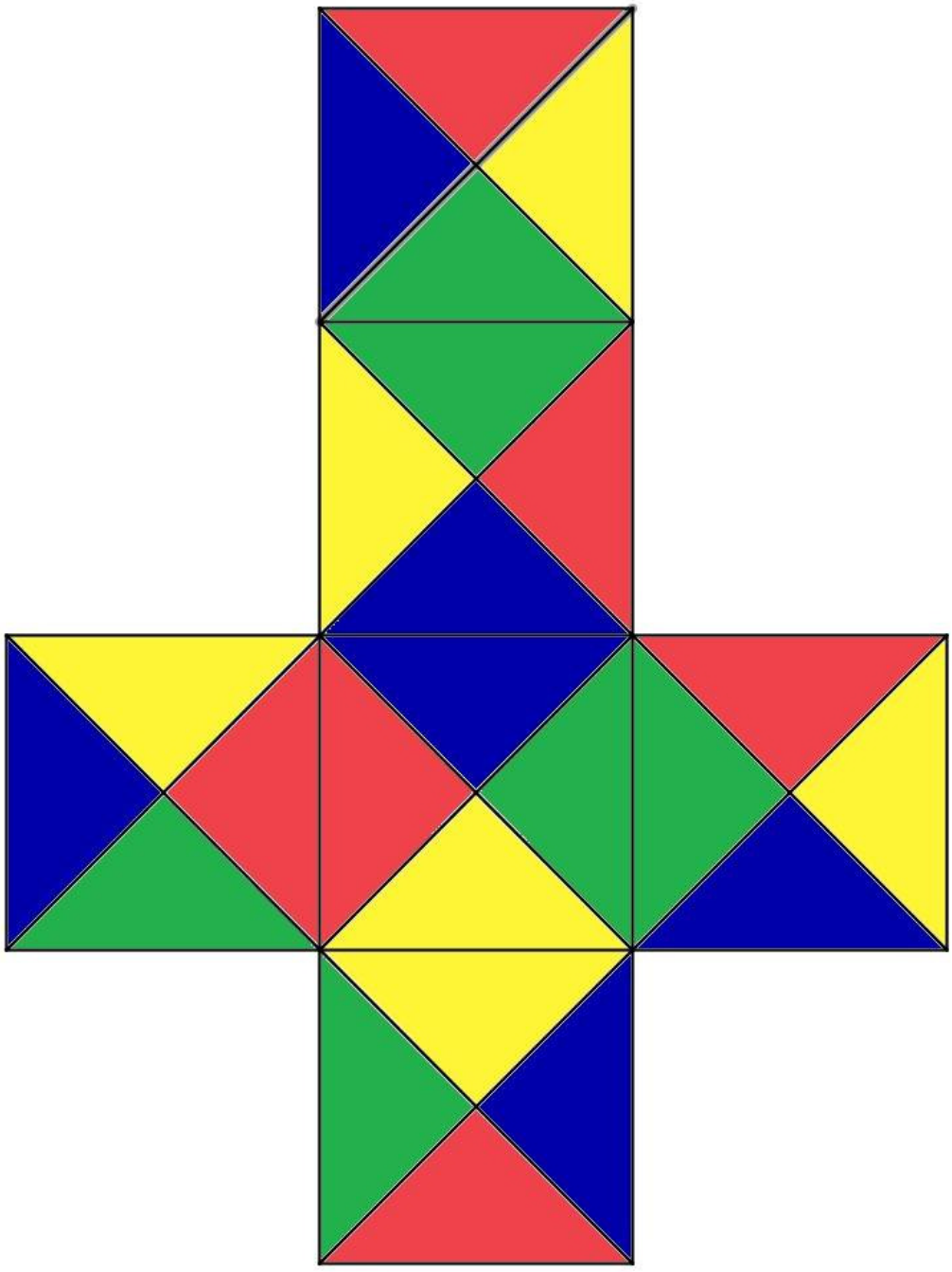
EL CUB:



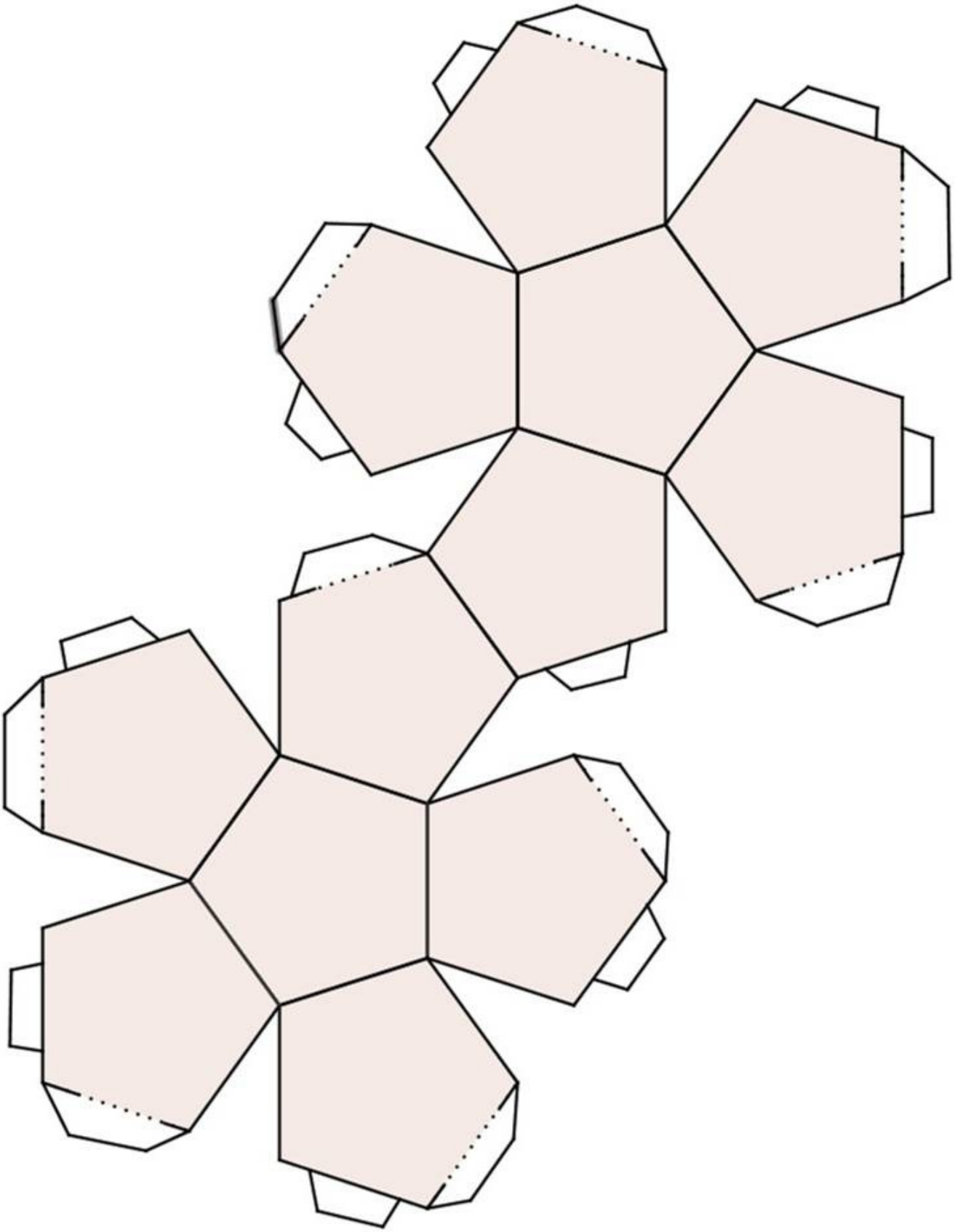
EL CUB COLOR Nº 1:



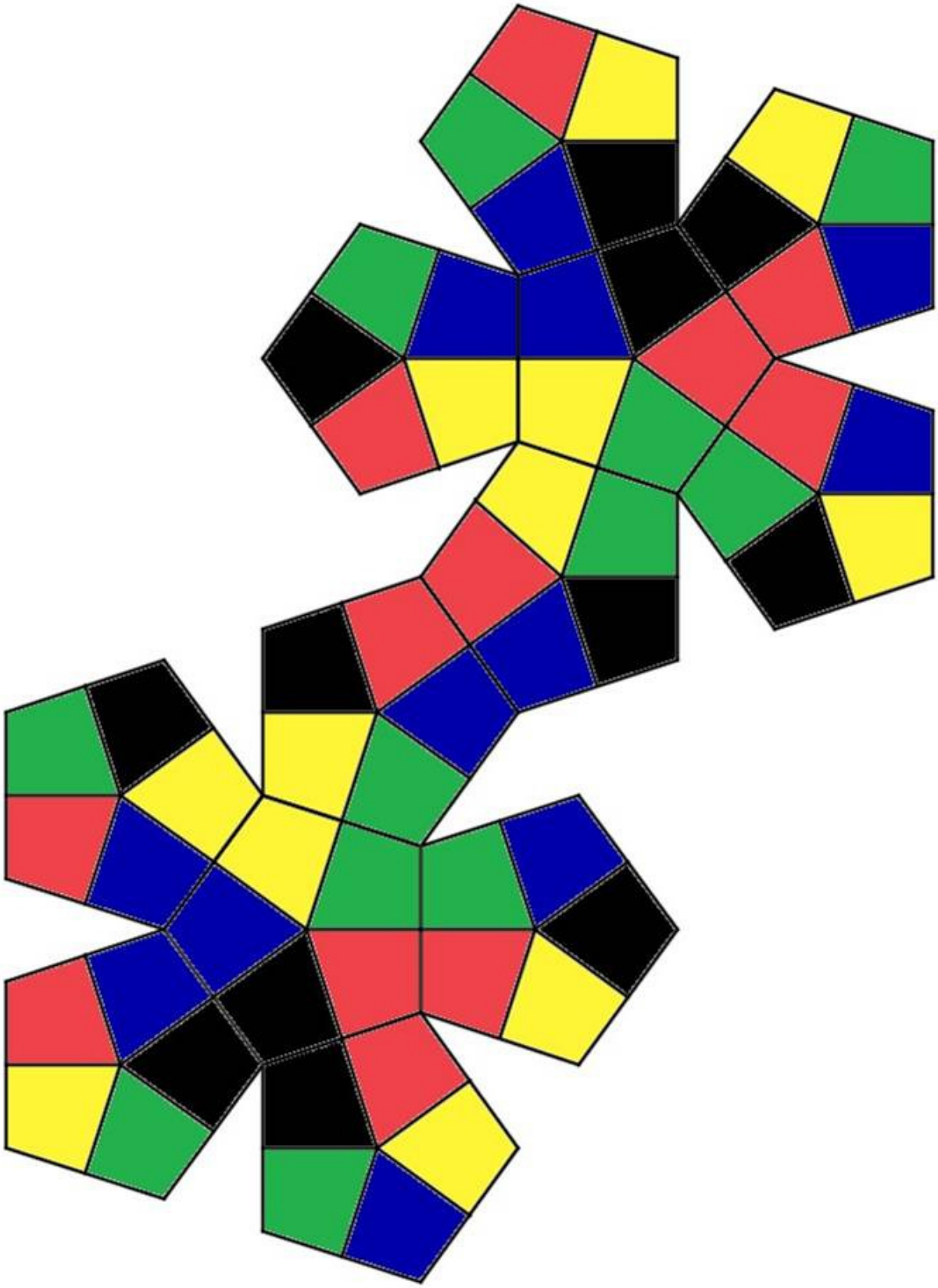
EL CUB COLOR Nº 2:



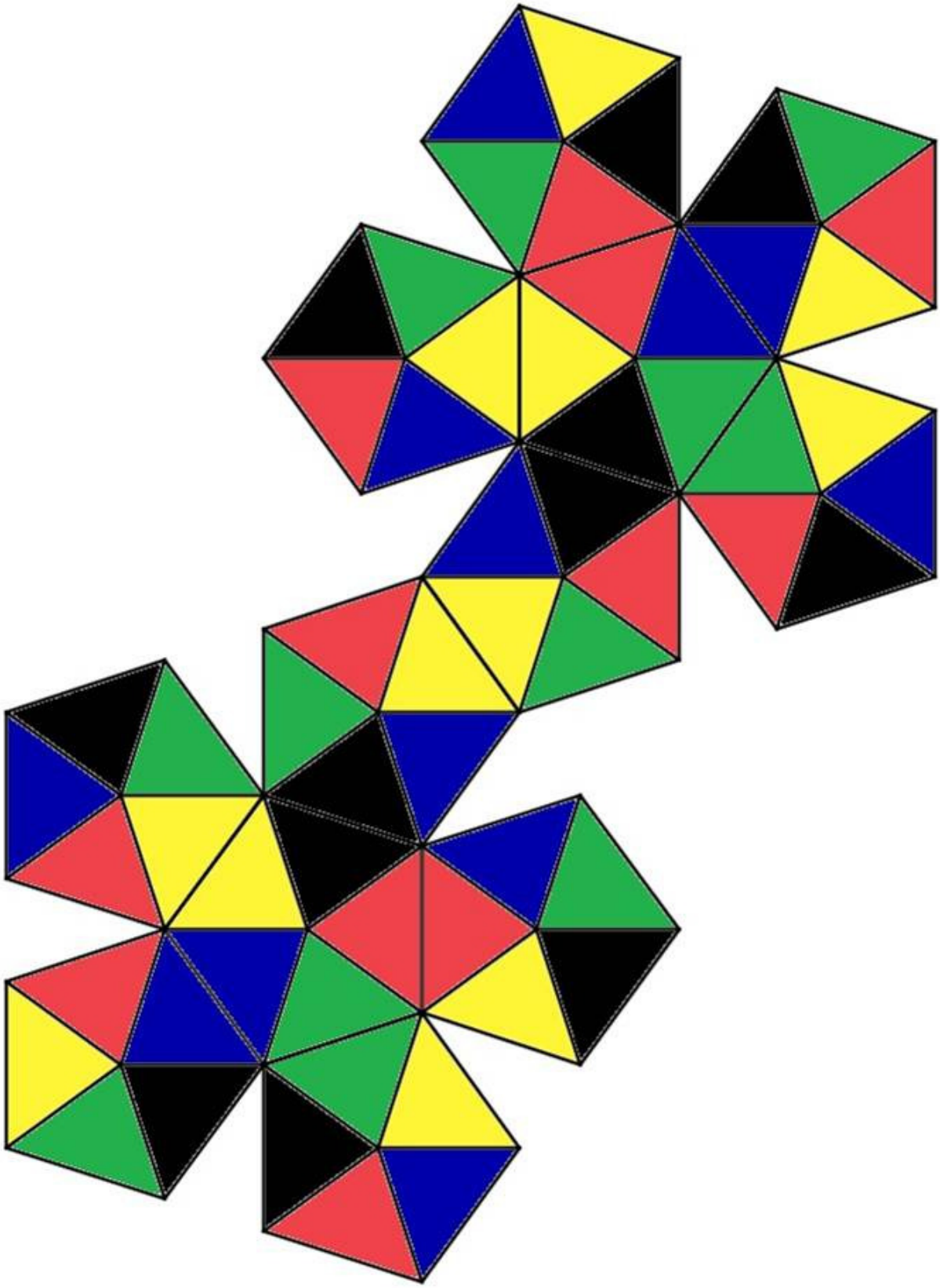
EL DODECÀEDRE:



EL DODECÀEDRE COLOR Nº 1:



EL DODECÀEDRE COLOR Nº 2:



ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us proposem dues activitats complementaries diferents, per poder seguir treballant amb aquest mòdul.

Primera proposta d'activitat:

Els alumnes poden també crear equivalències de diferents aspectes matemàtics per vestir els dos políedres anteriors (cub i dodecàedre).

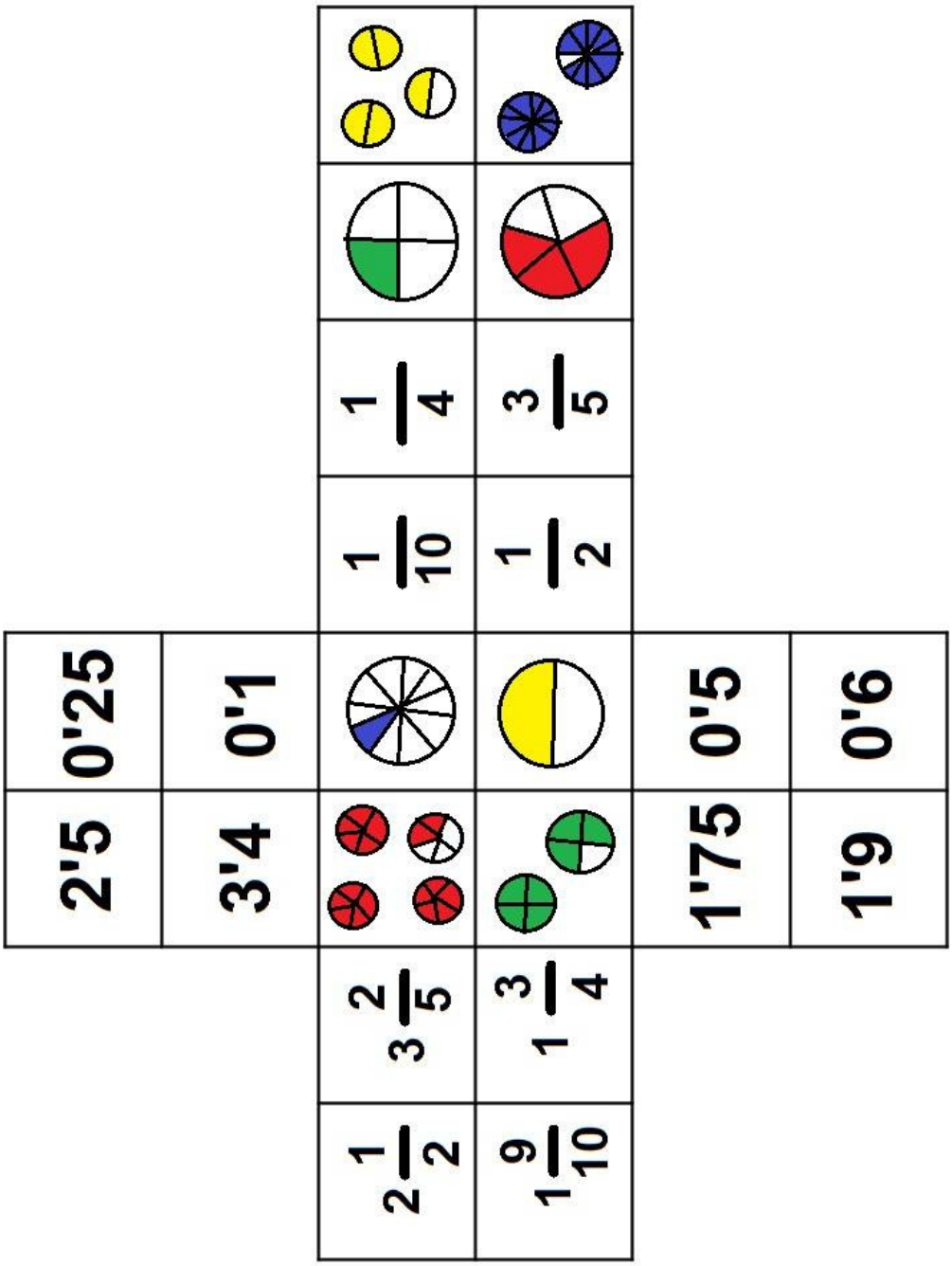
A continuació s'adjunten unes plantilles que tenen com exemple treballar el tema de les **equivalències de les fraccions**. A partir d'aquí, els alumnes poden treballar o mitjançant les seves creacions, o mitjançant aquestes plantilles, i a més es poden fer preguntes al respecte, com per exemple: *"Hi ha alguna fracció que es pugui simplificar?"*, *"Es tracten de fraccions irreductibles?"*.

Referent a les plantilles, es pot utilitzar el mateix cub i dodecàedre que hem fet anteriorment, únicament amb el canvi que es vestirà amb les fraccions. El procediment pot ser el mateix que abans, retallar cada cara del políedre i després amb cinta adhesiva de velcro.

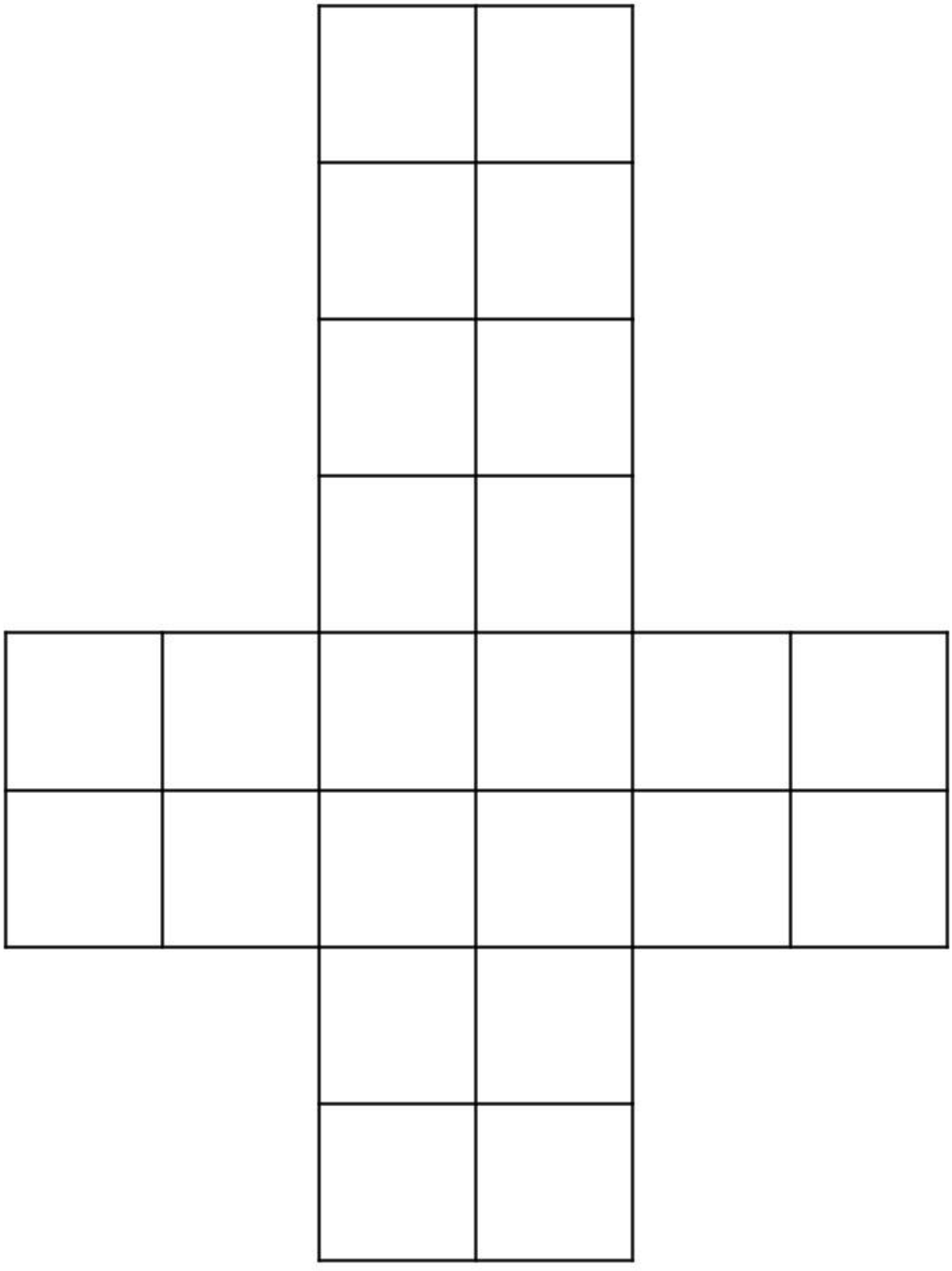
Imatge 25. Construcció real cub amb fraccions.
Marina Agudelo (2015).

Imatge 26. Construcció real dodecàedre amb fraccions.
Marina Agudelo (2015).

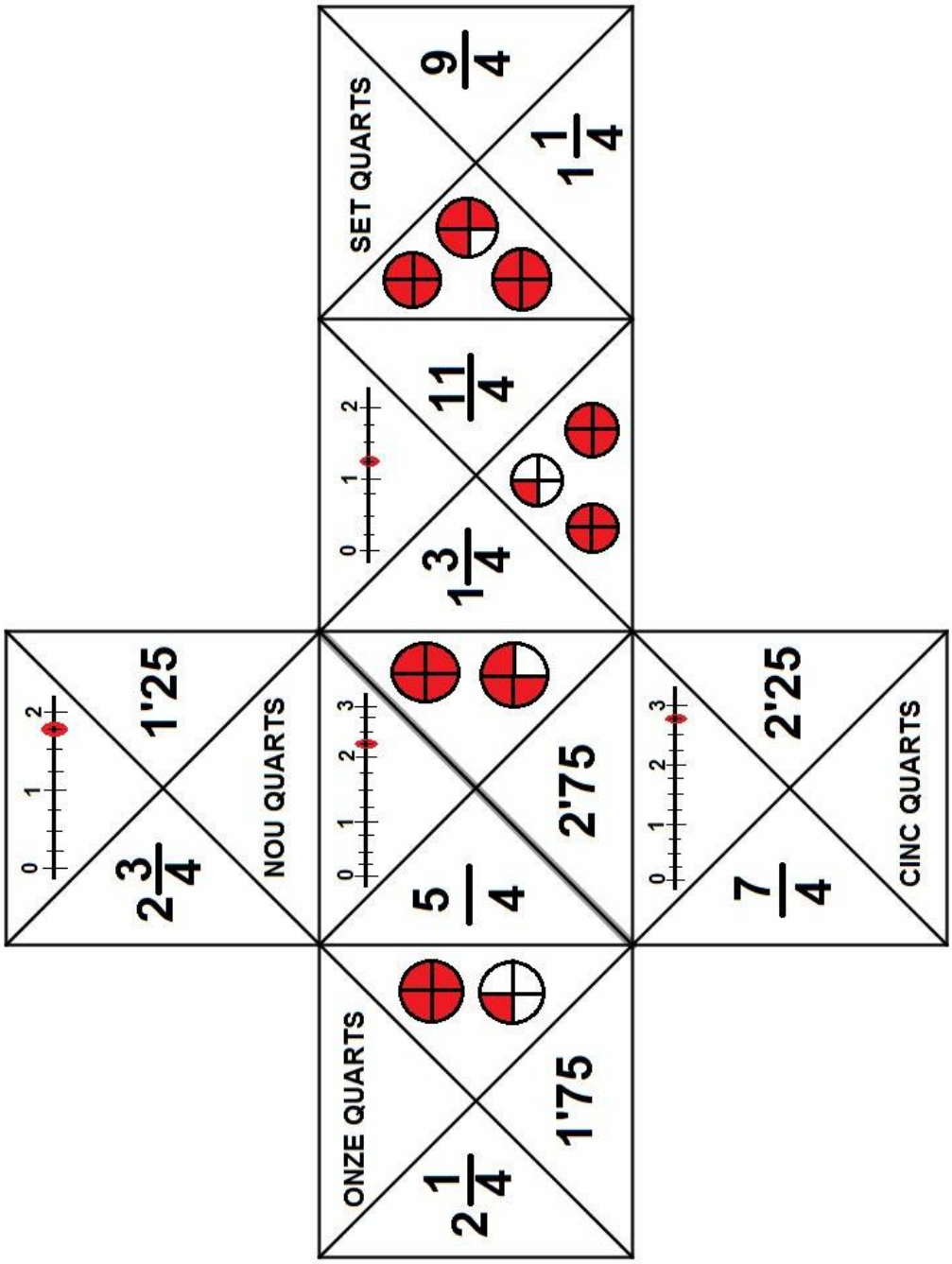
EL CUB FRACCIÓ Nº 1:



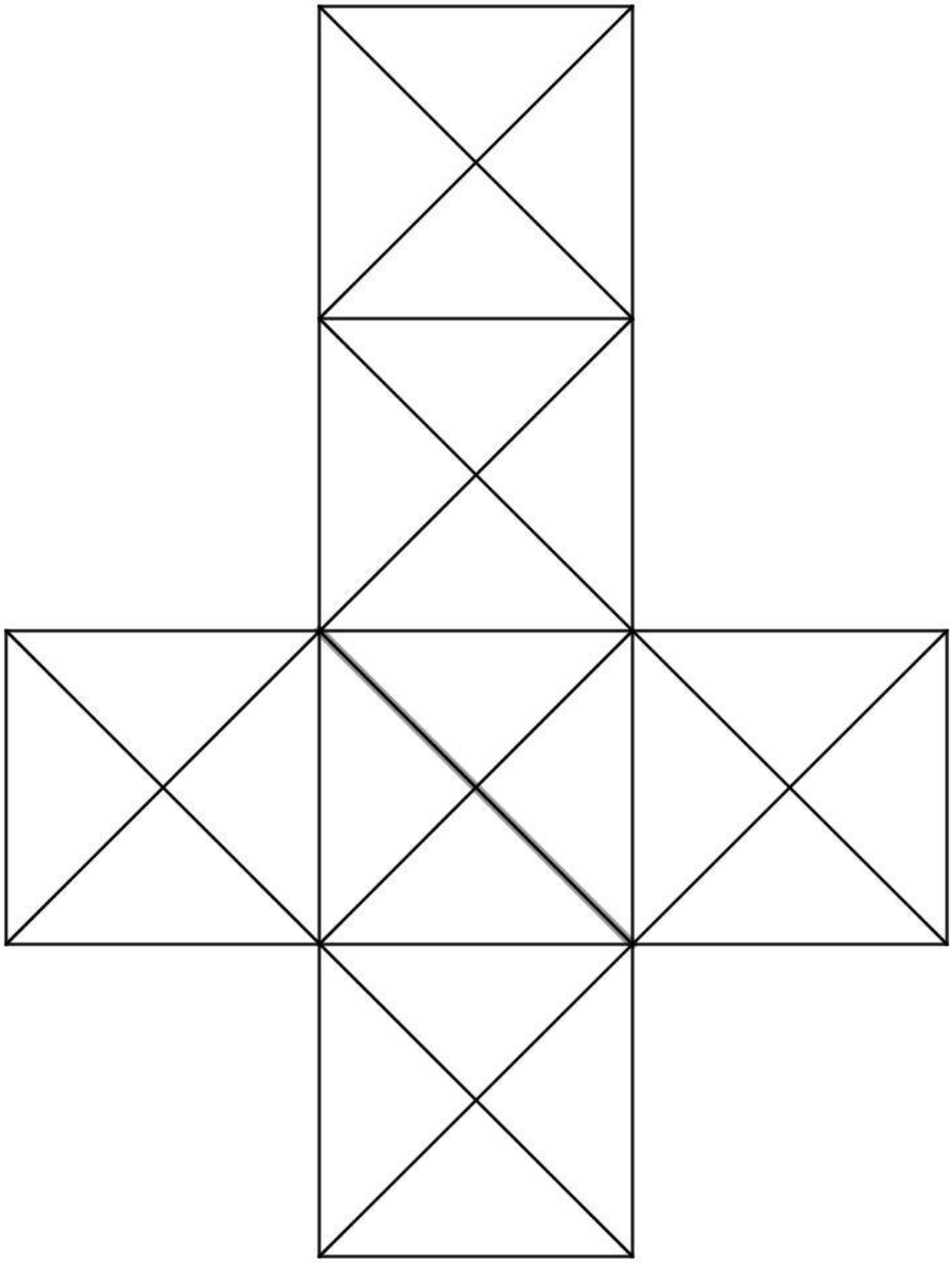
EL CUB FRACCIÓ Nº 1 (creació alumnat):



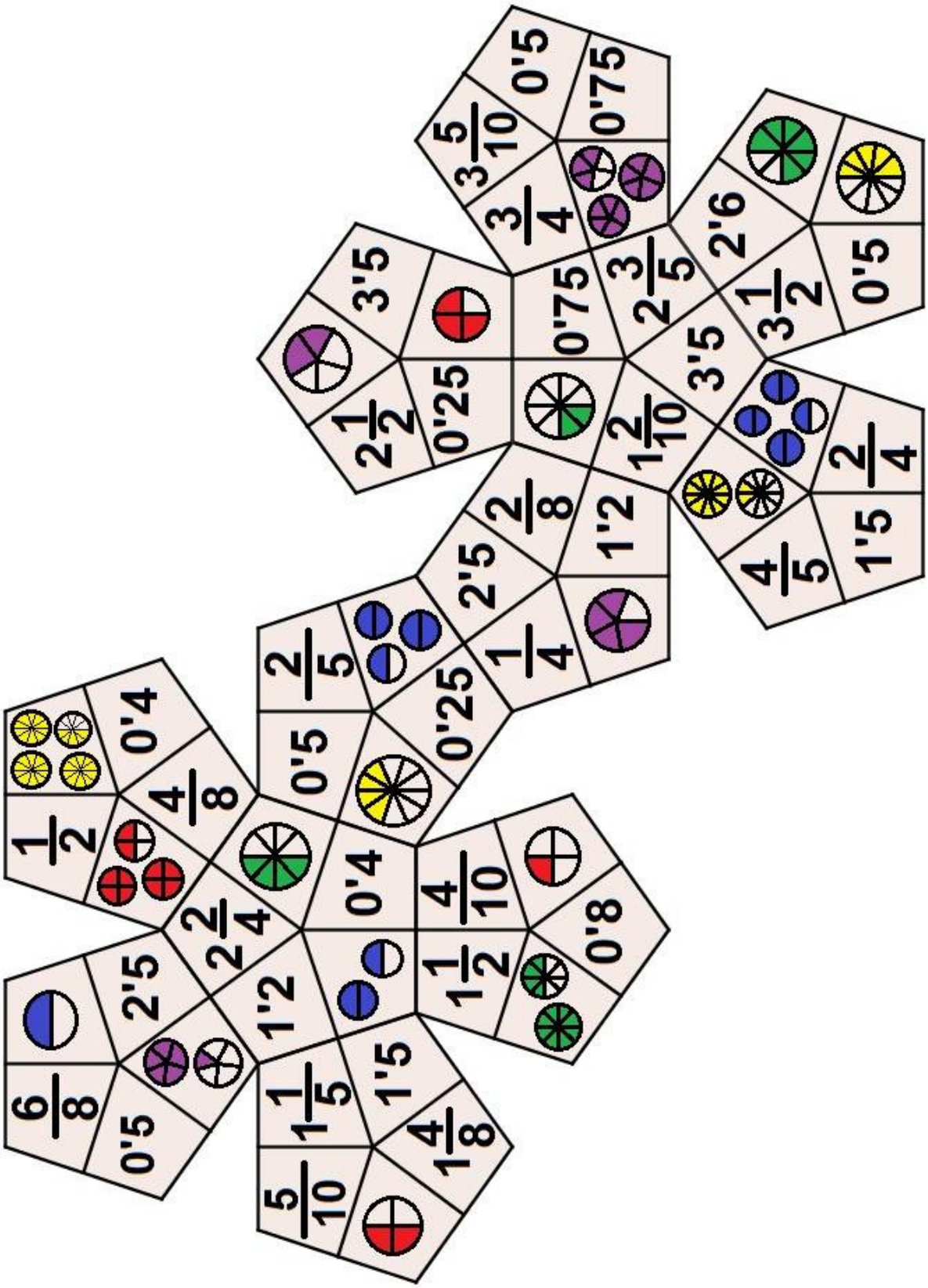
EL CUB FRACCIÓ Nº 2:



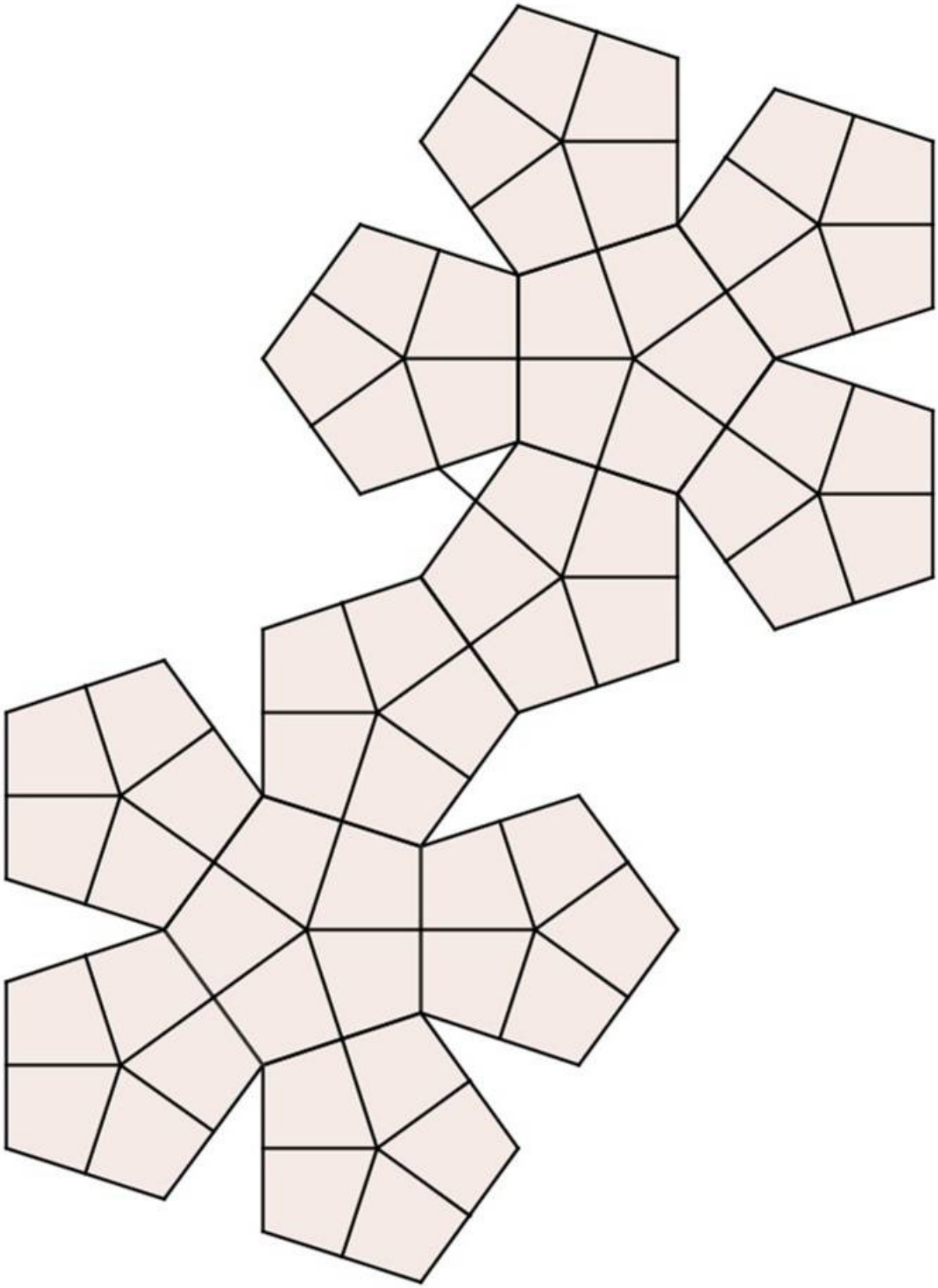
EL CUB FRACCIÓ Nº 2 (creació alumnat):



EL DODECÀEDRE FRACCIÓ Nº 1:



EL DODECÀEDRE FRACCIÓ Nº 1:/creació alumnat)



Segona proposta d'activitat:

A part dels dos políedres treballats (el cub i el dodecàedre), també es pot treballar amb la resta de políedres regular que hi ha. És a dir, el **tetràedre**, l'**octàedre** i l'**icosàedre**.

A continuació, s'adjunten uns retallables que permetran als alumnes treballar amb aquests tres políedres.

Cada retallable consisteix en tres plantilles, igual que en el del cub i el dodecàedre i el procediment és el mateix:

- La primera, representa el políedre sencer, és a dir, el que s'aniria vestint. Els alumnes només hauran de retallar el contorn i les línies de punts i muntar-lo (no fa falta cola, ja que porten incorporades unes pestanyes que permeten fer la construcció amb més facilitat).

- Les dues següents plantilles consisteixen en dos models diferents per vestir el políedre anterior. Només cal que els alumnes retallin cara per cara el políedre i així ja tenen les peces per muntar-lo.

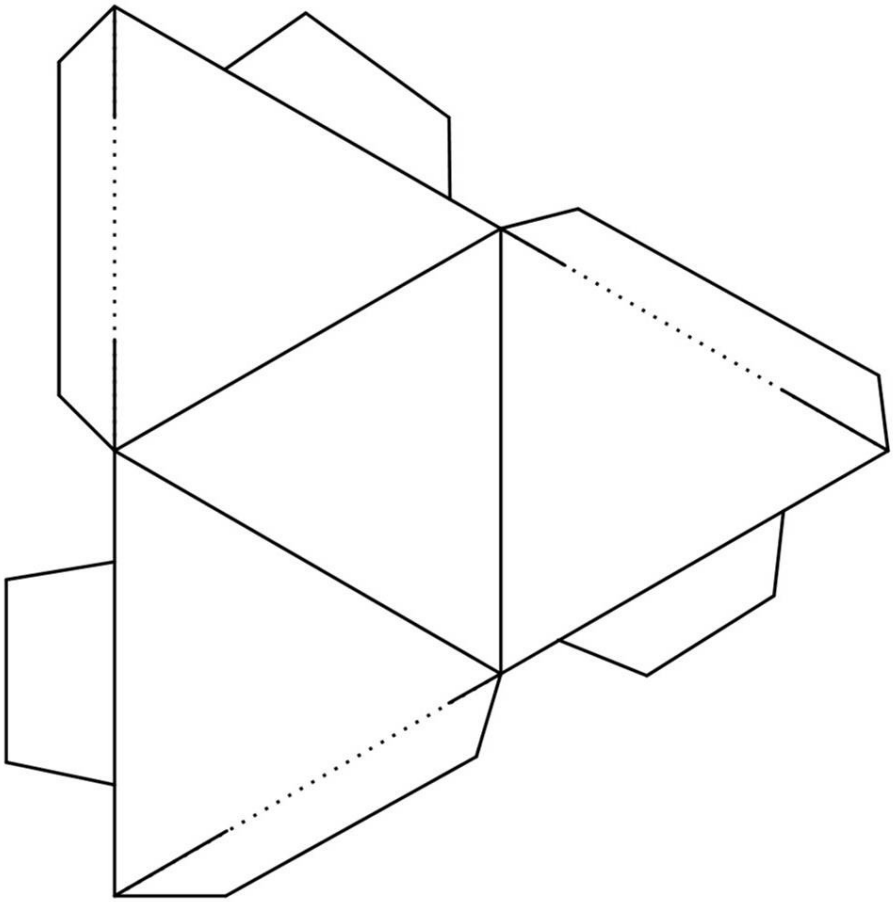
A l'hora d'ajuntar les peces, és molt pràctic fer-ho amb cinta adhesiva de velcro.

Imatge 27. Construcció real del tetràedre.
Marina Agudelo (2015).

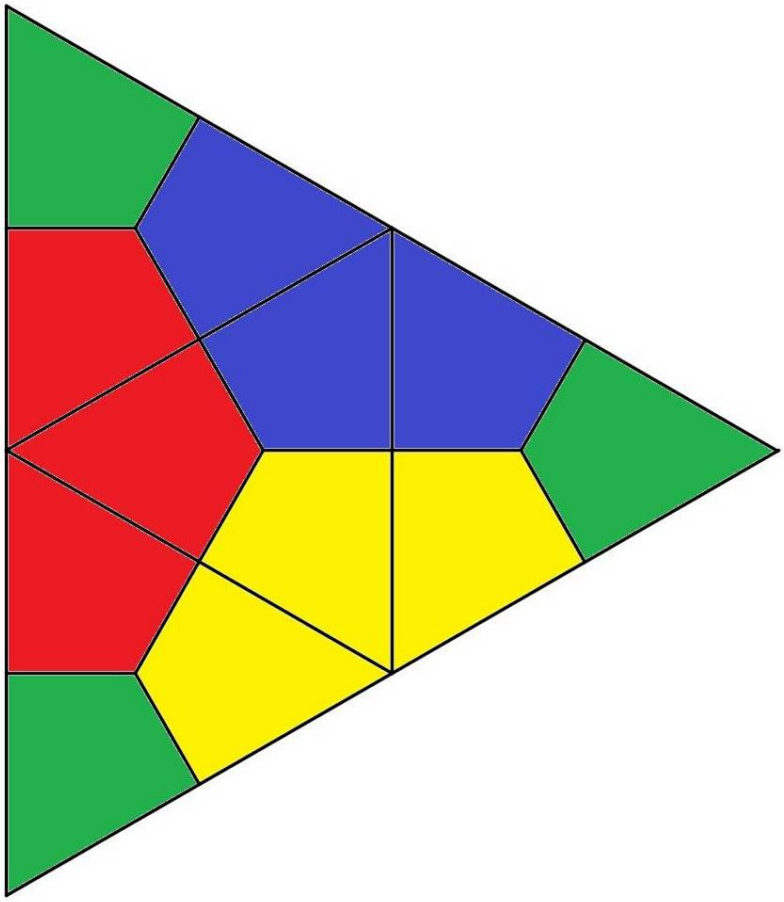
Imatge 28. Construcció real de l'octàedre.
Marina Agudelo (2015).

Imatge 29. Construcció real de l'icosàedre.
Marina Agudelo (2015).

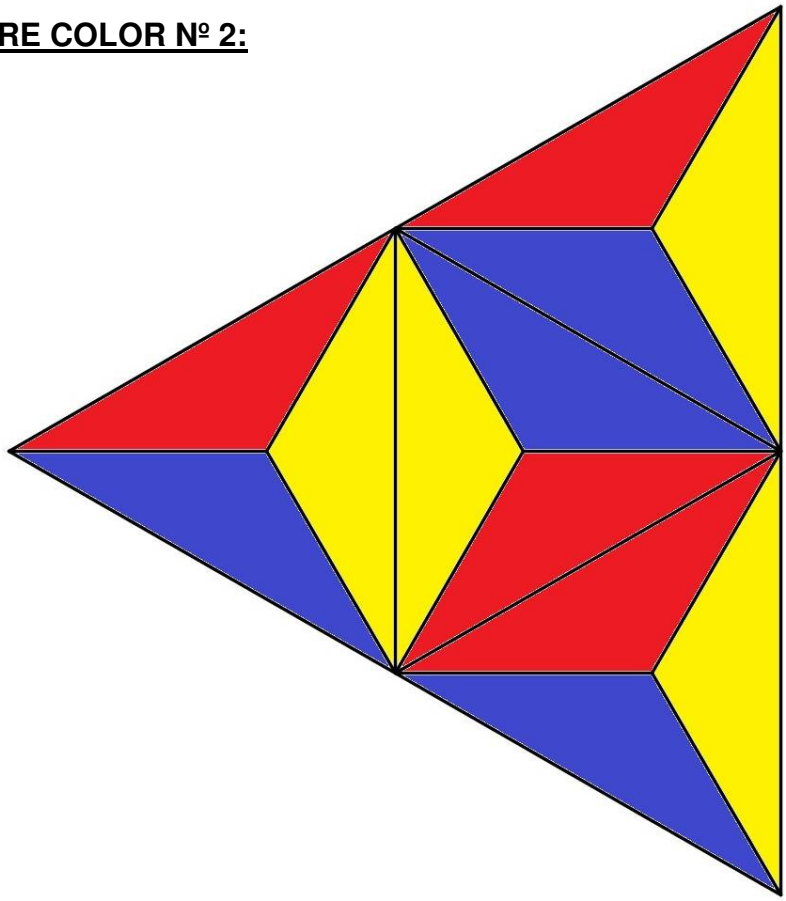
EL TETRÀEDRE:



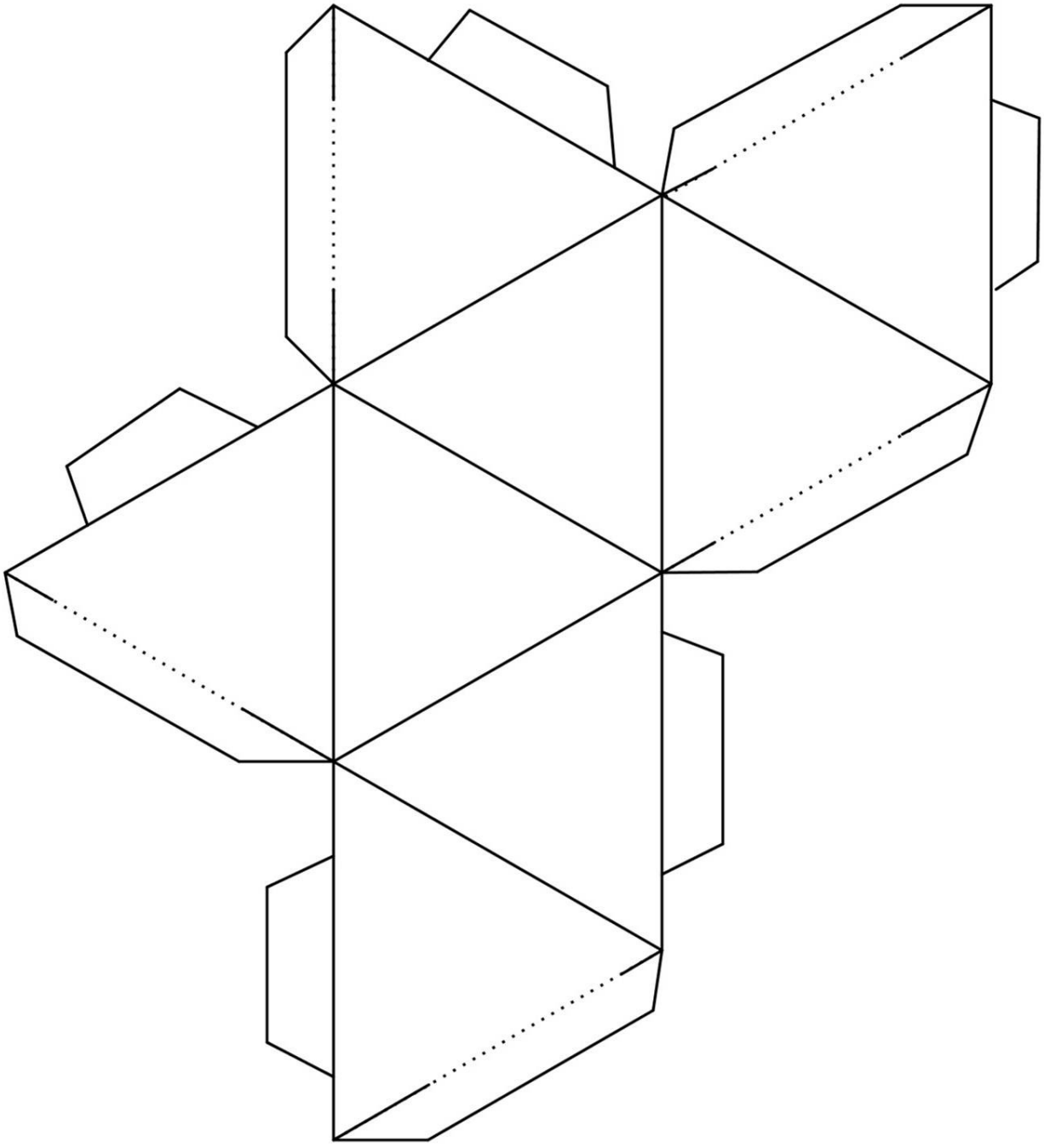
EL TETRÀEDRE COLOR Nº 1:



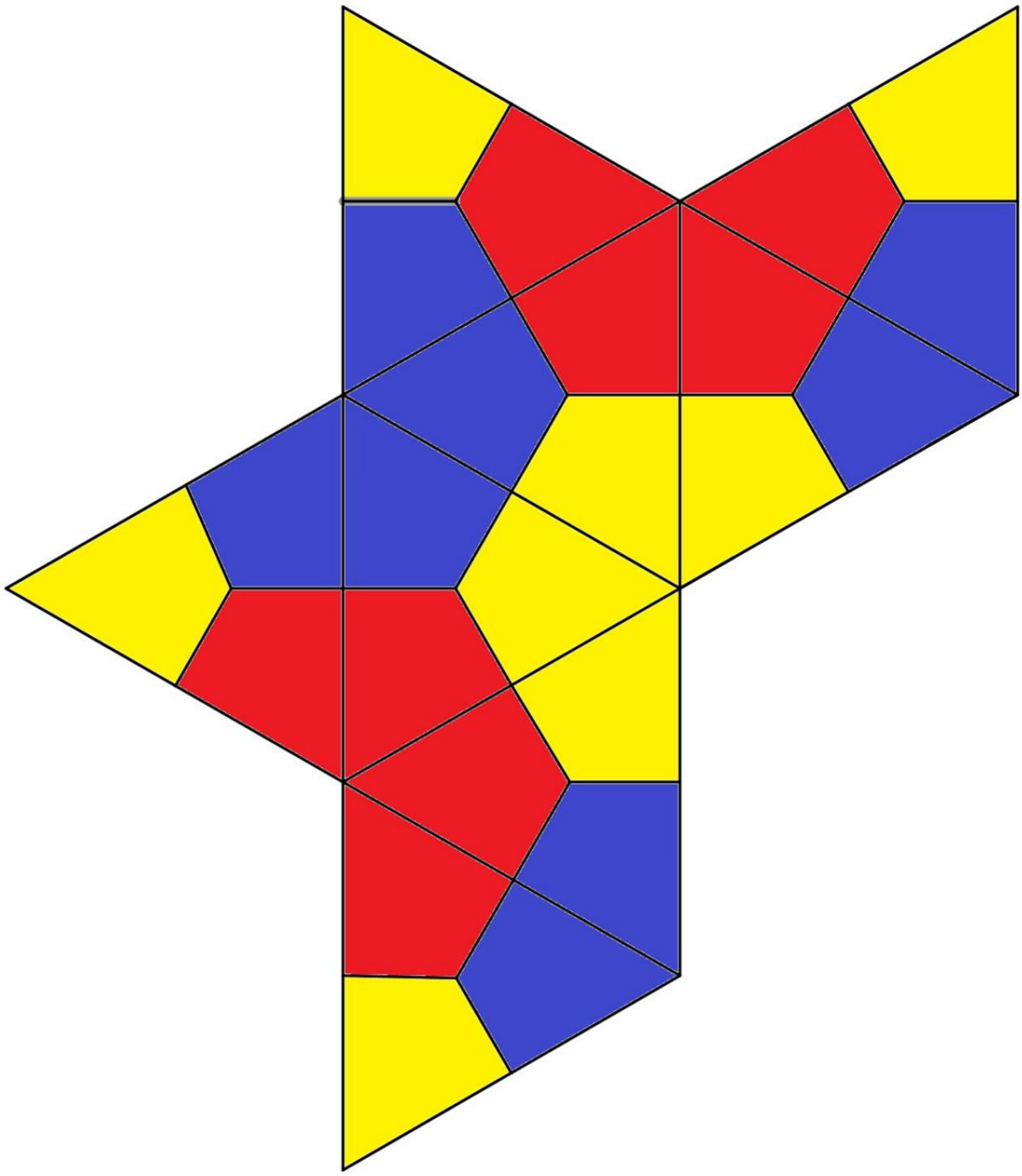
EL TETRÀEDRE COLOR Nº 2:



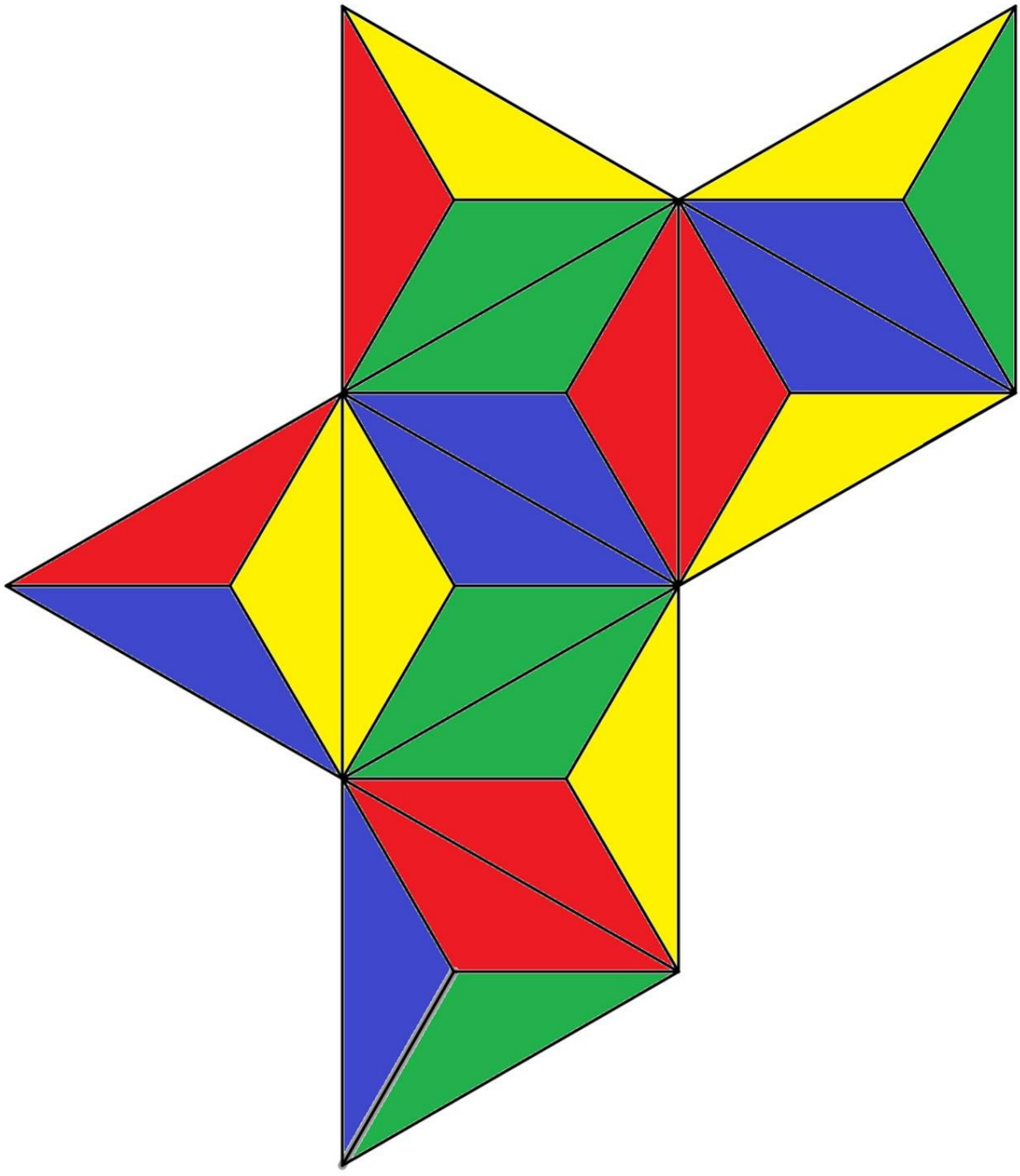
L'OCTÀEDRE:



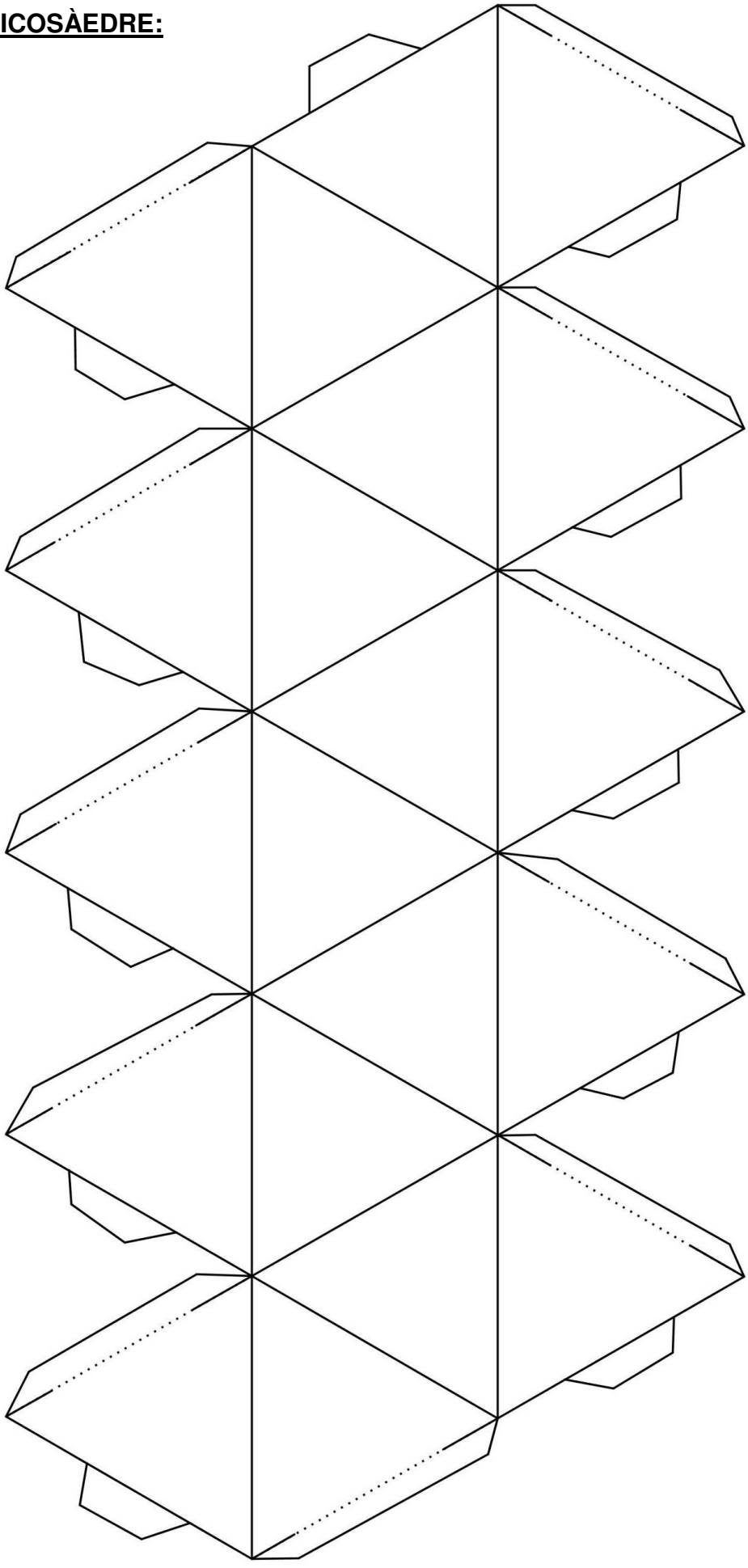
L'OCTÀEDRE COLOR Nº 1:



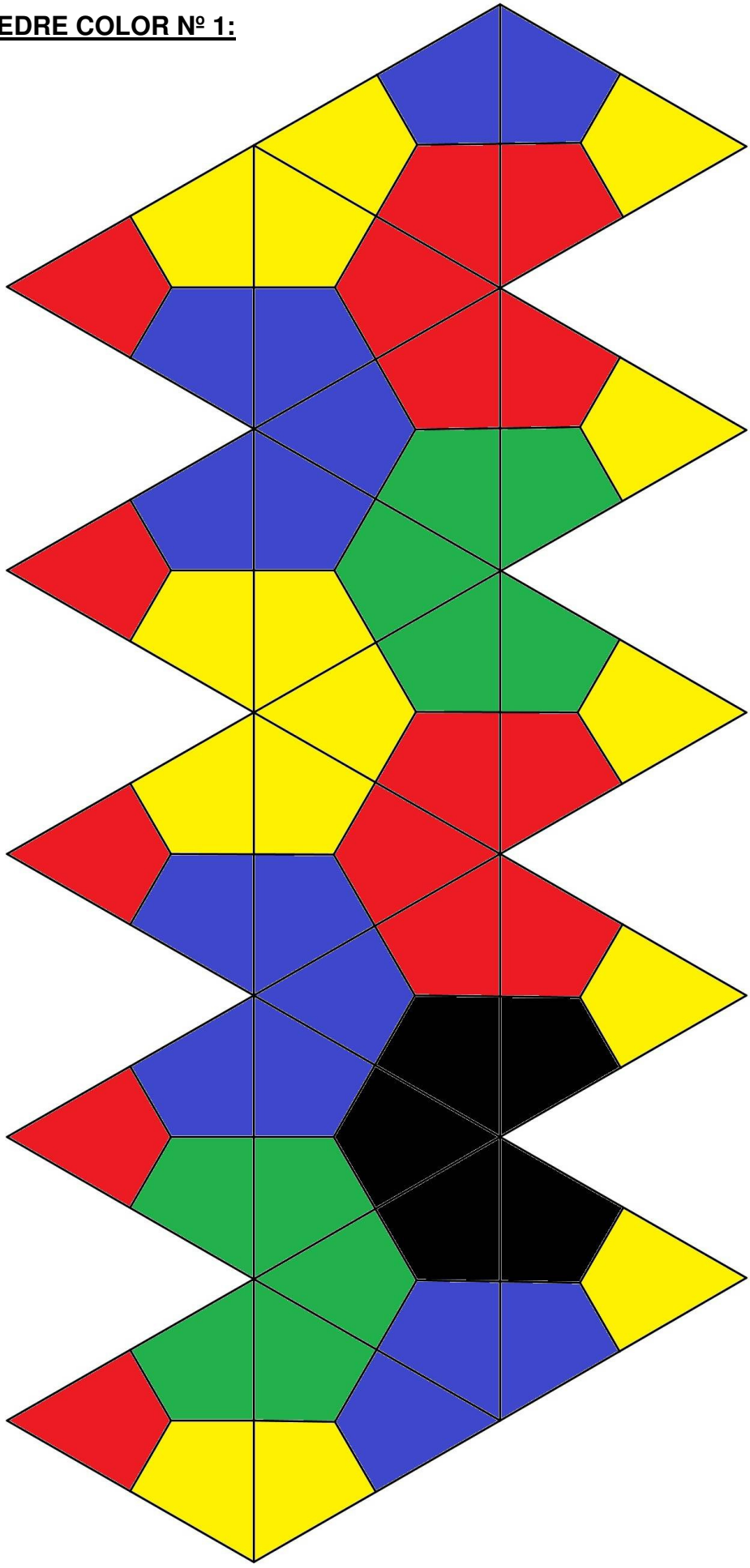
L'OCTÀEDRE COLOR Nº 2:



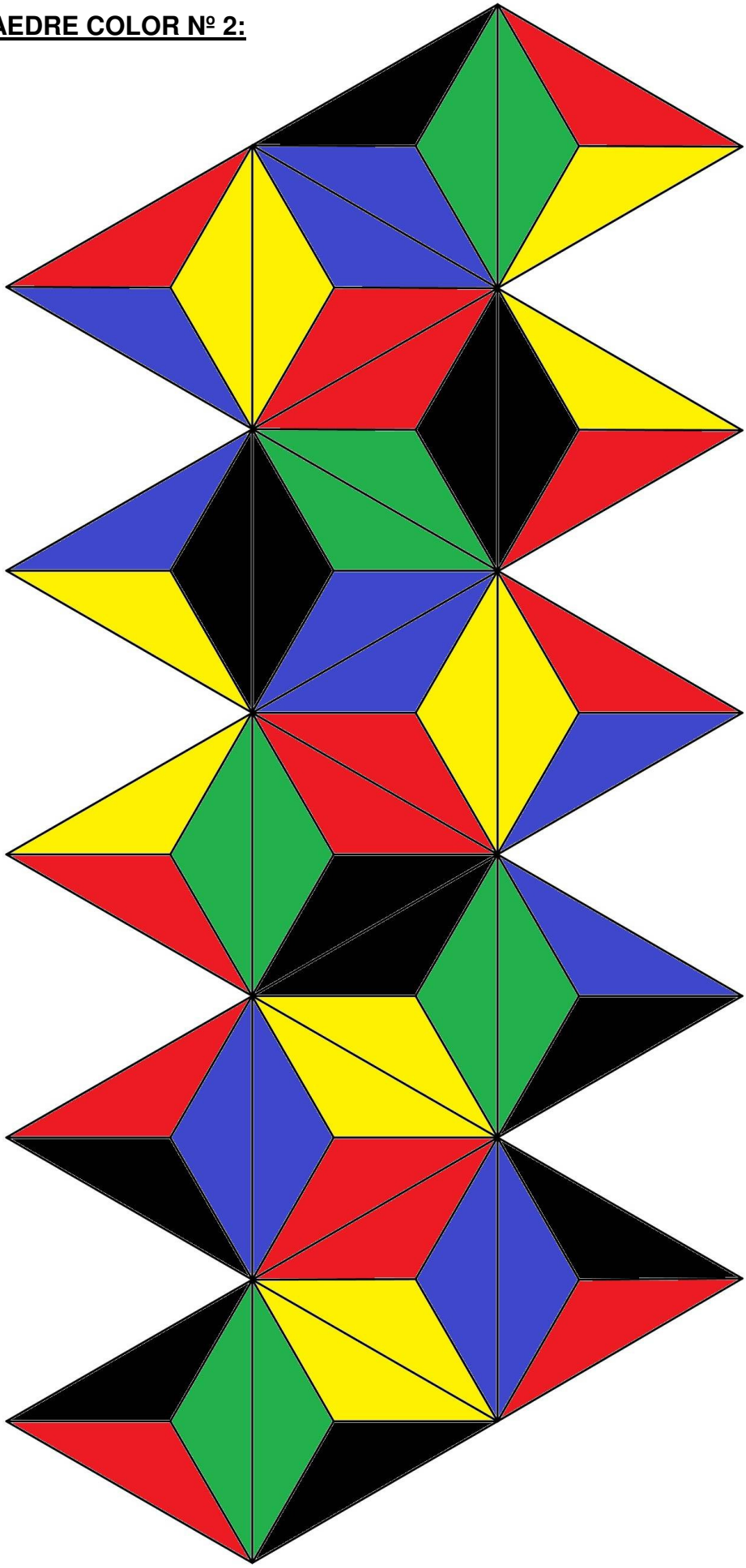
L'ICOSÀEDRE:



L'ICOSÀEDRE COLOR Nº 1:



L'ICOSÀEDRE COLOR Nº 2:



Tercera proposta d'activitat:

A continuació, s'adjunten dues plantilles una d'un **hexaminós** de sis colors diferents (vermell, negra, blanc, blau, verd i groc) que tindrà la mateixa proporció que el cub de la construcció del mòdul original; i l'altra serà una plantilla en blanc que cada professor podrà pintar de la forma que es vulgui.

L'activitat consisteix que el professor vesteix el cub amb les cares dels sis colors i l'ensenyem als alumnes. Aleshores, es mostren diferents desenvolupaments plans (hexaminós) cadascun combinant els sis colors dits d'abans (correspondrà a la plantilla en blanc).

L'objectiu d'aquesta activitat és que els alumnes diguin quin o quins desenvolupaments corresponen al cub físic que ha creat el professor.

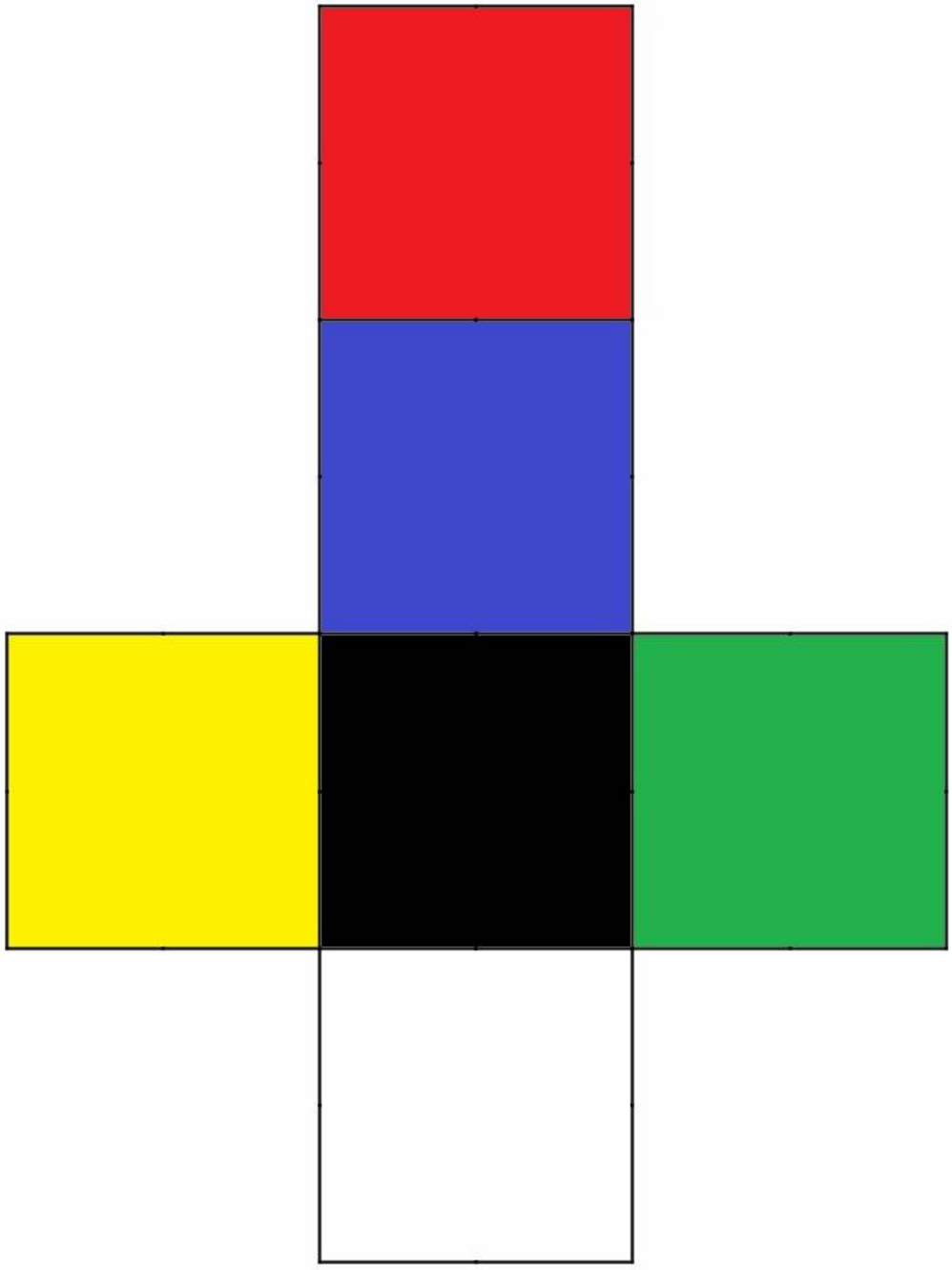
Un exemple d'aquesta activitat seria la següent:

Imatge 30. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

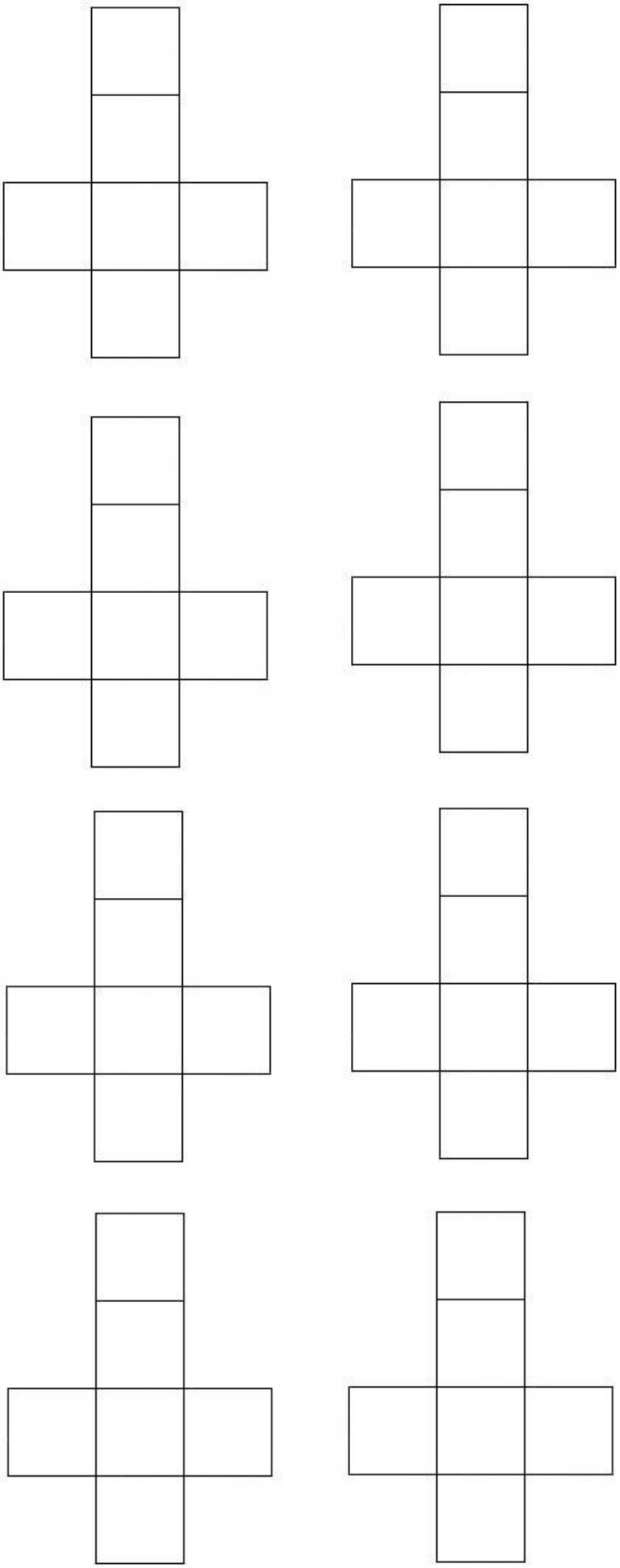
Imatge 31. Exemple de la mostra de 3 costats. Marina Agudelo (2015).

Imatge 32. Exemple de la mateixa mostra dels altres 3 costats. Marina Agudelo (2015).

EL CUB DE SIS COLORS:



Quines són la o les representacions corresponents al cub representat?



PER SABER-NE MÉS:

- Sòlids platònics →

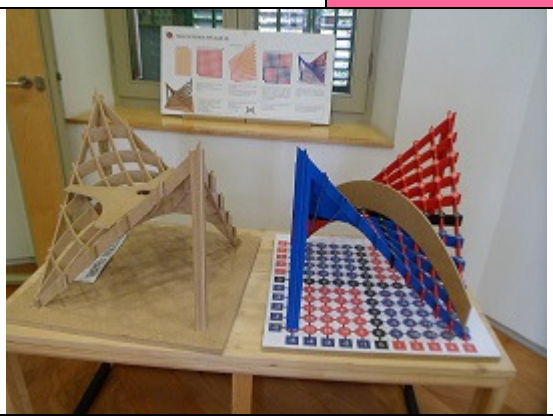
https://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_plat%C3%B3nicos

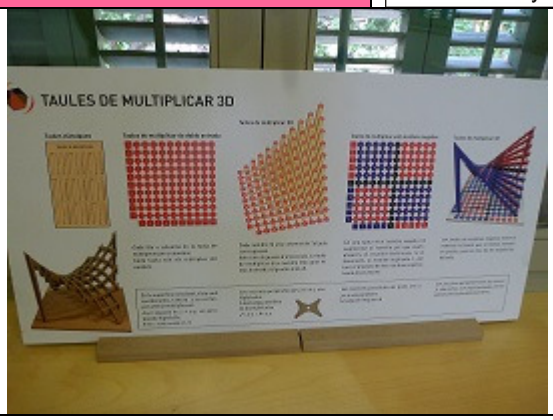
Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

Taules de multiplicar 3D

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya





CONEIXEMENTS PREVIS:

Definirem el següent vocabulari utilitzat en aquest mòdul:

- Recta: és un objecte geomètric format per un conjunt d'infinits punts infinitament llarg que no té curvatura.

$$y = ax + b$$

- Paràbola: és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten alhora d'un determinat punt fix anomenat focus i d'una determinada recta anomenada directriu. La recta perpendicular a la directriu que passa pel focus de la paràbola s'anomena **eix** de la paràbola. El punt de la paràbola que talla l'eix s'anomena **vèrtex** de la paràbola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Hipèrbola: es defineix com el lloc geomètric dels punts del pla per als quals és constant la diferència de les distàncies a dos punt fixos denominats focus.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Paraboloide hiperbòlic: és la superfície resultat d'aquest mòdul, vista amb coordenades, l'altura z es correspon amb la multiplicació ($z = x \cdot y$). És una superfície guerxa de seccions parabòliques que és el resultat del desplaçament d'una línia recta damunt d'altres dues que es creuen a l'espai. Generalment, resta limitada per quatre línies rectes.

  Les seccions perpendiculars a l'eix z són **hipèrboles** ($2 = x \cdot y$ i $4 = x \cdot y$).

  Les seccions paral·leles als plans $y = x^2$ o $y = -x^2$ són **paràboles**.

  Les seccions perpendiculars als eixos x i y són **rectes**. Les representades corresponen a les taules dels nombres.

- Regla del signes: quan dos nombres enters es multipliquen passa el següent:

nº positiu · nº positiu = nº positiu
nº negatiu · nº negatiu = nº positiu
nº positiu · nº negatiu = nº negatiu
nº negatiu · nº positiu = nº negatiu

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços d'expressar tant en oral com en escrit tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència matemàtica.
  L'alumne ha de tenir els conceptes matemàtics clars i al cap.

- Competència d'autonomia i iniciativa personal.
  Treballar de manera individual tot prenent decisions per portar a terme el mòdul.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Paraboloide hiperbòlic: és una de les superfícies regalades més utilitzades pel Antoni Gaudí.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

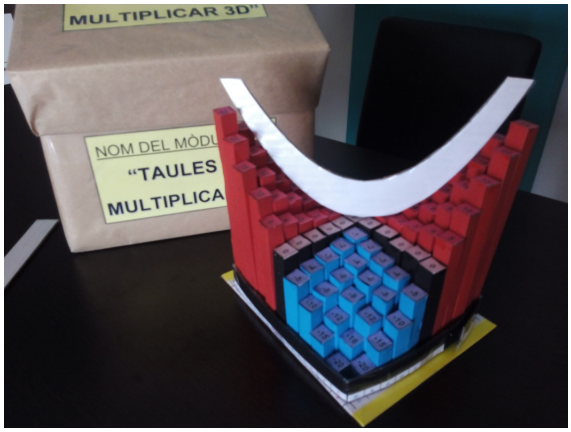
CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

Per a realitzar la construcció del mòdul de les taules de multiplicar en 3D, és bastant complexa. Però la veritat és que es poden treure vàries variants. És a dir, el mòdul del museu, és les taules de multiplicar de 11 nombres per 11 nombres; els cinc primers nombres positius, els cinc primers nombres negatius i el zero. Aleshores també es pot crear només la part positiva o la part negativa, encara que es perdria la possibilitat de treballar la regla dels signes.

A continuació s'adjunten els taulers de la part negativa, de la positiva i des les dues (tauler sencer), respectivament, utilitzar el que més convingui. També s'adjunten les plantilles de les diferents seccions: la recta, que es pot substituir perfectament per un regla; la paràbola i la hipèrbola. Aquestes dues últimes s'ha de dir que els alumnes també poden intentar fer-les amb el GeoGebra.

Imatge 33. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

Imatge 34. Construcció real amb la recta. Marina Agudelo (2015).



Imatge 35. Construcció real amb la paràbola. Marina Agudelo (2015).

Imatge 4. Construcció real amb la hipèrbola. Marina Agudelo (2015).

PART NEGATIVA: la multiplicació d'un nombre positiu i un de negatiu és un nombre negatiu

0	0	0	0	0	0	0
0	-1	-2	-3	-4	-5	-1
0	-2	-4	-6	-8	-10	-2
0	-3	-6	-9	-12	-15	-3
0	-4	-8	-12	-16	-20	-4
0	-5	-10	-15	-20	-25	-5
0	1	2	3	4	5	

PART POSITVA:

La multiplicació de dos nombres negatius és un de positiu.

0	0	0	0	0	0	0
-1	5	4	3	2	1	0
-2	10	8	6	4	2	0
-3	15	12	9	6	3	0
-4	20	16	12	8	4	0
-5	25	20	15	10	5	0
	-5	-4	-3	-2	-1	0

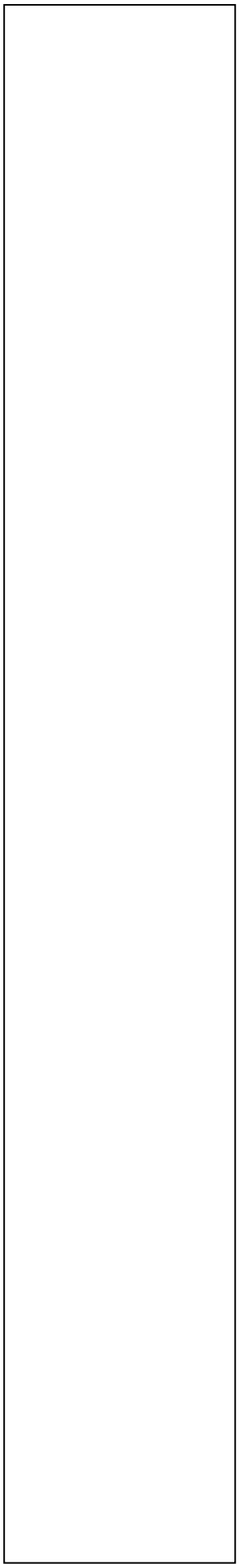
La multiplicació de dos nombres positius és un de positiu.

0	1	2	3	4	5	
0	5	10	15	20	25	5
0	4	8	12	16	20	4
0	3	6	9	12	15	3
0	2	4	6	8	10	2
0	1	2	3	4	5	1

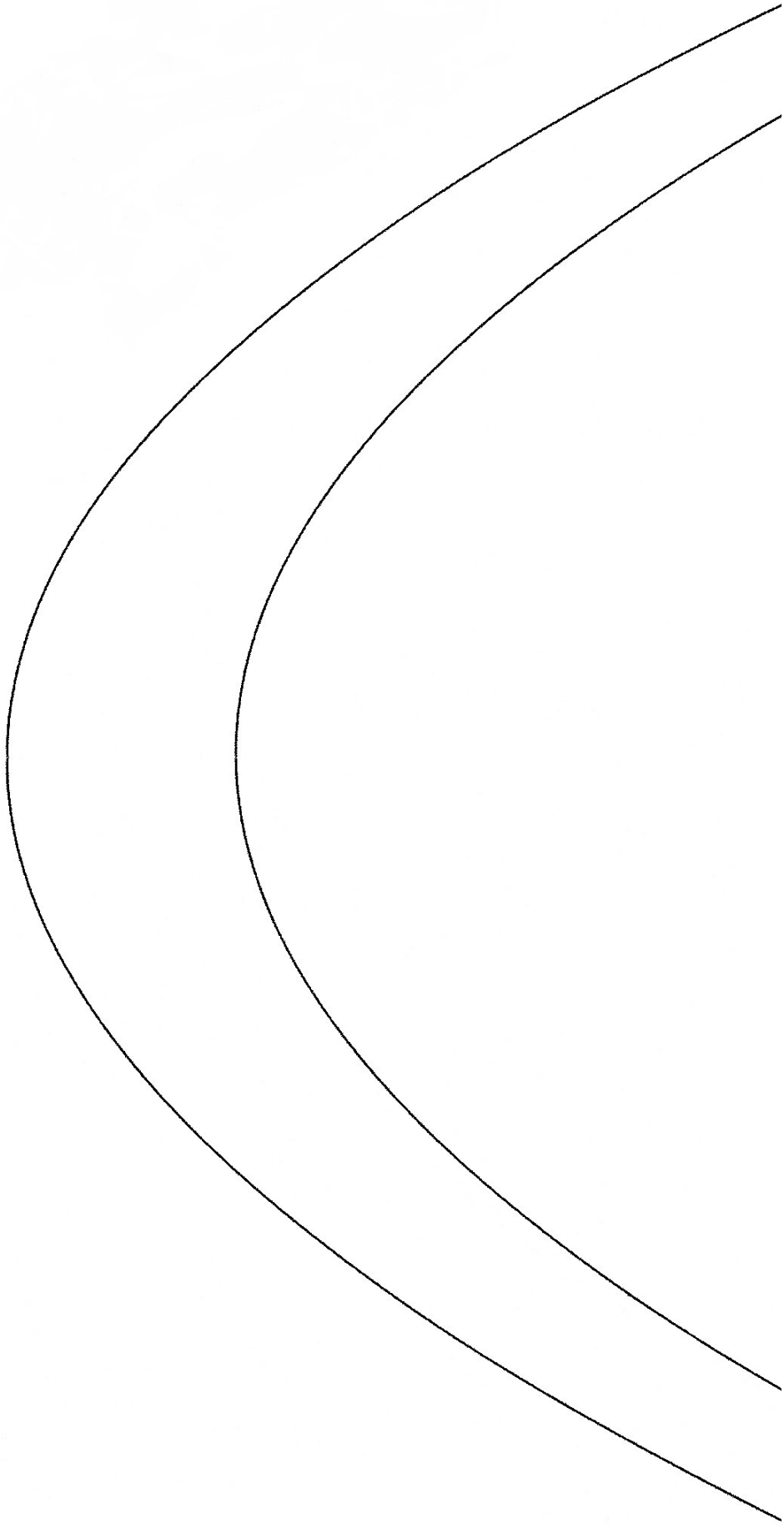
EL TAULER SENCER (part positiva i negativa):

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
5	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	5
4	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20	4
3	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	3
2	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	2
1	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-1
-2	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-2
-3	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-3
-4	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-4
-5	25	20	15	10	5	0	-5	-10	-15	-20	-25	-5
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	

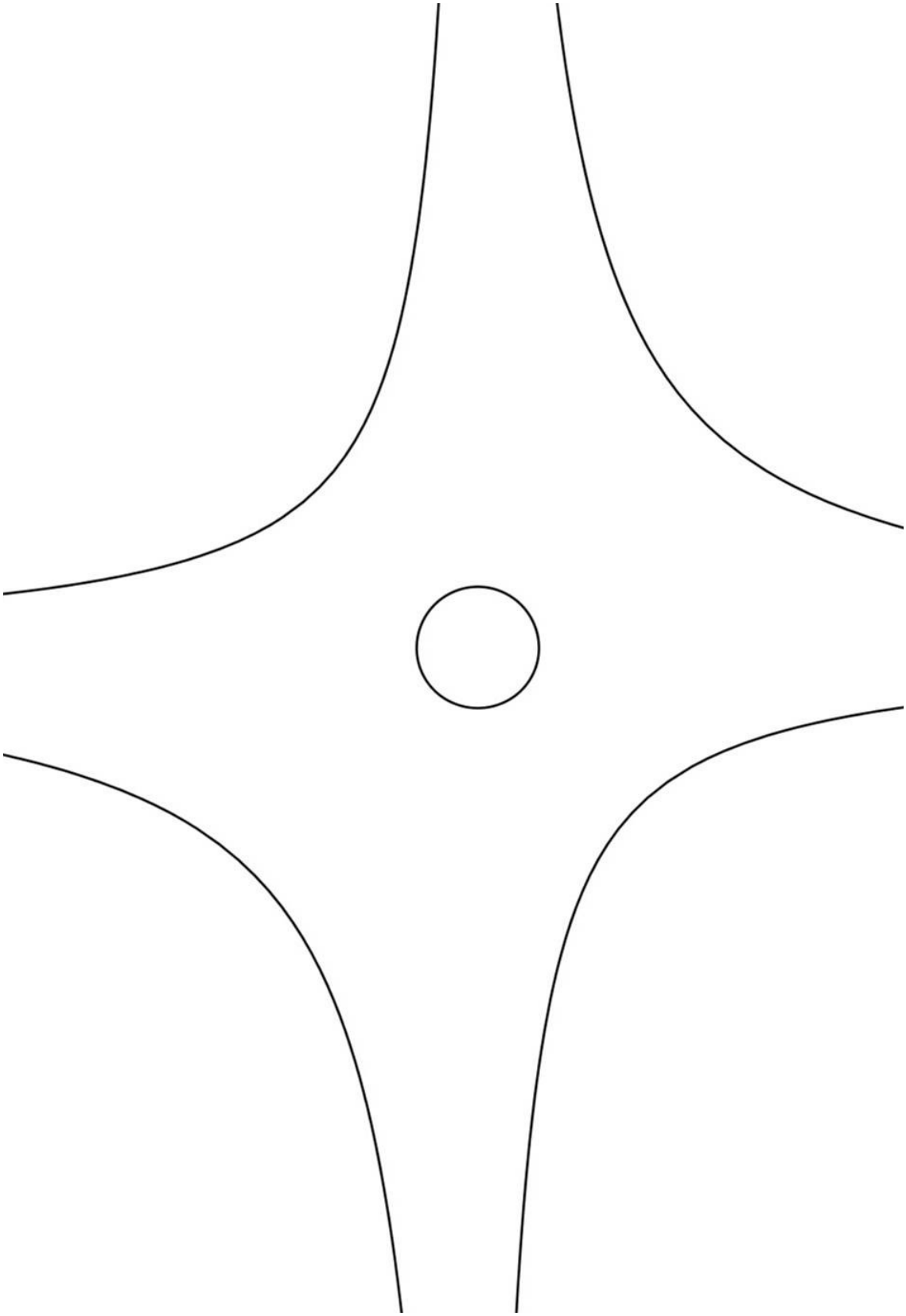
SECCIÓ → LA RECTA:



SECCIÓ → LA PARÀBOLA:



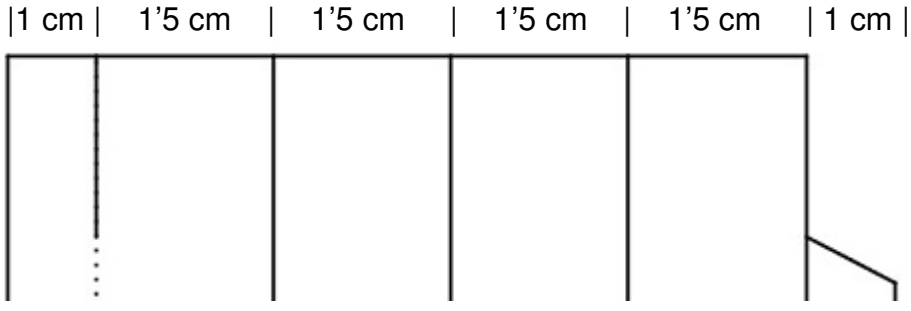
SECCIÓ → LA HIRPÈRBOLA:

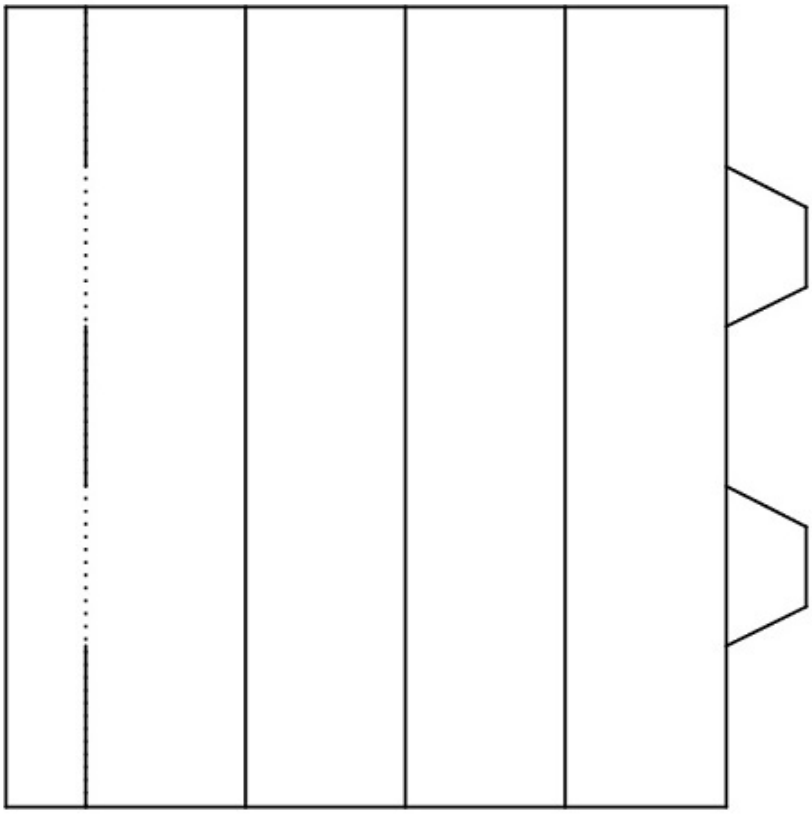


Una vegada tingueu el tauler escollit imprès, només cal fer cadascun dels resultats de les multiplicacions, és a dir les alçades. A continuació es mostra un exemple dels resultats de les multiplicacions amb la seva corresponent mesura i el nombre de peces que caldrà fer de cadascuna d'elles.

-25	→	0 cm	→	2 unitats	**0**	→	10 cm	→	21 unitats
-20	→	2 cm	→	4 unitats	**1**	→	10'4 cm	→	2 unitats
-16	→	3'6 cm	→	2 unitats	**2**	→	10'8 cm	→	4 unitats
-15	→	4 cm	→	4 unitats	**3**	→	11'2 cm	→	4 unitats
-12	→	5'2 cm	→	4 unitats	**4**	→	11'6 cm	→	6 unitats
-10	→	6 cm	→	4 unitats	**5**	→	12 cm	→	4 unitats
-9	→	6'4 cm	→	2 unitats	**6**	→	12'4 cm	→	4 unitats
-8	→	6'8 cm	→	4 unitats	**8**	→	13'2 cm	→	4 unitats
-6	→	7'6 cm	→	4 unitats	**9**	→	13'6 cm	→	2 unitats
-5	→	8 cm	→	4 unitats	**10**	→	14 cm	→	4 unitats
-4	→	8'4 cm	→	6 unitats	**12**	→	14'8 cm	→	4 unitats
-3	→	8'8 cm	→	4 unitats	**15**	→	16 cm	→	4 unitats
-2	→	9'2 cm	→	4 unitats	**16**	→	16'4 cm	→	2 unitats
-1	→	9'6 cm	→	2 unitats	**20**	→	18 cm	→	4 unitats
					25	→	20 cm	→	2 unitats

Cada peça té forma ortoèdrica, columnes de base rectangular que s'aixequen sobre el resultat fins a l'alçada corresponent. A continuació us mostrarem una plantilla de com s'ha de realitzar cadascuna de les 121 peces que s'haurien de fer. Per tal que coincideixi amb el quadradet del tauler, cal que cada lateral mesuri 1'5 cm. Per tant, caldrà fer les següents mesures i aplicar-li l'alçada corresponent a les dades dites anteriorment.





ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

PER SABER-NE MÉS:

Experiències: matemàtiques

Guia didàctica:

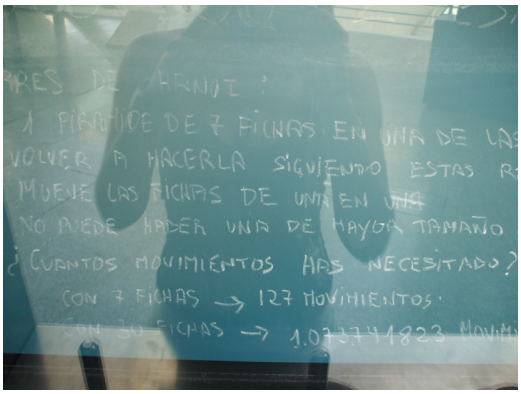
Torres de Hanoi

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

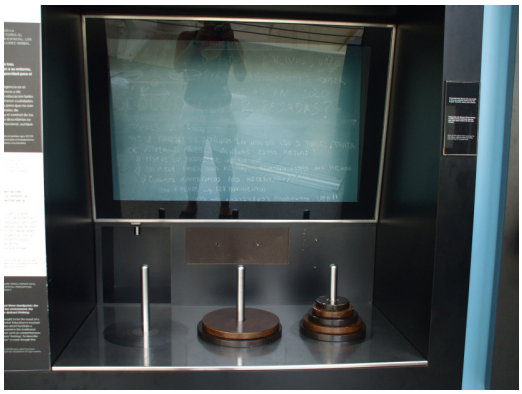
CONEIXEMENTS PREVIS:

- Recursivitat: és la forma en la qual s'especifica un procés basat en la seva pròpia definició.

- Torres de Hanoi: és un joc matemàtic, usat típicament com a exemple de recursivitat. Consisteix en tres pals verticals i un nombre indeterminat de discs de mides diferents que determinen la complexitat de la solució.
  A l'inici estan col·locats de més gran a més petit en el primer pal. El joc consisteix a passar tots els discs al tercer o segon pal, tenint en compte que només es pot canviar de pal un disc cada vegada i que mai no podem tenir un disc col·locat sobre un que sigui més petit.



Imatge 31. Museu de les Ciències de València. Marina Agudelo (2008).



Imatge 32. Museu de les Ciències de València. Marina Agudelo (2008).

COMPETÈNCIES BÀSIQUES QUE ES TREBALLEN:

- Competència comunicativa lingüística.
  Els alumnes han de ser capaços de descriure, explicar, interpretar, justificar, argumentar... tots els coneixements apresos en aquesta activitat.

- Competència matemàtica.
  Pels conceptes i metodologies matemàtiques que es treballen.

- Competència d'aprendre a aprendre.
  Per la necessitat de ser conscient del procés de resolució i estratègia usades, aprenent dels èxits i els errors a cada pas.

- Competència d'autonomia i iniciativa persona.
  Comporta la presa de decisions per arribar a completar el repte, a més, amb l'ajuda dels monitors, es poden plantejar preguntes i ampliar coneixements.

- Competència social i ciutadana.
  El mòdul permet treballar en petits i grans grups d'alumnes.

CONTINGUT HISTÒRIC:

Torres de Hanoi: la llegenda explica que en un temple de Benarés hi havia una cúpula que assenyalava el centre del món. Allà hi havia una safata on hi havia tres agulles de diamant. En un matí plujós, un rei va manar posar-hi 64 discs d'or, que estiguessin ordenats per mida, de major a menor.
Després de col·locar-los, els sacerdots del temple van intentar moure els discos entre les agulles, seguint les normes que havien dit: *" el sacerdot no pot moure més d'un disc alhora, i no pot posar un disc de més diàmetre damunt d'un altre de diàmetre més petit"*.

Una altra llegenda explica que quan déu va crear el món, va posar tres barnilles de diamant amb 64 discos a la primera. També va crear un monestir amb monjos, que tenien la funció de resoldre aquesta Torre de Hanoi divina. El dia que aquests monjos aconseguissin acabar el joc el món s'acabaria.

Edouard Lucas: reconegut matemàtic francès pels seus treballs sobre la *sèrie de Fibonacci*, va publicar el joc de "La Torre de Hanoi" el 1883 sota el pseudònim de Professor N. Claus de Siam.

PROPOSTA D'ACTIVITATS DIDÀCTIQUES:

CONSTRUCCIÓ DEL MÒDUL ORIGINAL:

A continuació, s'adjunten unes plantilles per poder construir les Torres de Hanoi de sis discs, que únicament caldrà imprimir a mida DIN A3, per tal que les peces siguin més grans.

Per a la construcció del mòdul original necessitarem el següent material:

Pels discs, necessitarem:
- una placa de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN" amb un gruix d'un centímetre;
- agulles de cap de cosir, per subjectar la plantilla de paper;
- un cúter, per tallar la placa; i
- unes pintures acríliques, per pintar les peces.

Pel tauler, necessitarem:

- tres plaques quadrades o bé una que tingui espai suficient per les tres torres amb els corresponents discs, de poliestirè expandit, conegut com "POREXPAN" amb un gruix d'uns 4 centímetres, perquè siguin estables; i
- un tub de cartró, no massa gran, per exemple del paper d'alumini.

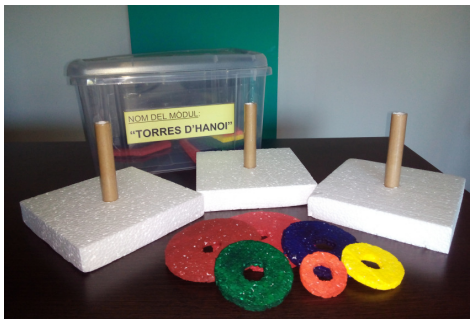
Passos que s'han de seguir:

- Donar a cada alumne una plantilla dels discs, i retallar-los.
- Clavar amb les agulles de cap la plantilla a la placa de porexpan.
- Amb l'ajuda del cúter tallar el contorn de cada disc i fer un forat al centre del disc de la mateixa mida que el tub de cartró.
- Seguidament, pintar les peces com el mòdul original.
- Mentre les peces s'assequen, tallar en tres parts iguals el tub de cartró, i clavar-ho al mig de cada placa amb cola blanca o bé distribuïdes en el cas que sigui una placa sola.

Comentaris:

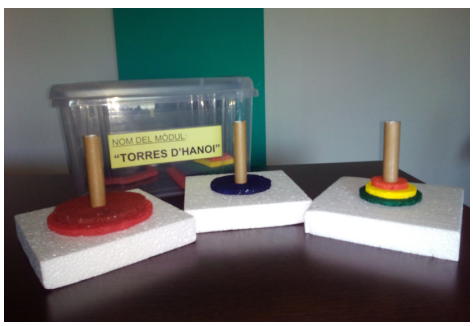
- Per tal que els discs llisquin millor pel tub de cartró, és aconsellable folrar-los amb folre transparent.

Es podria fer la construcció com a treball interdisciplinari amb el professorat de l'àrea de tecnologia.

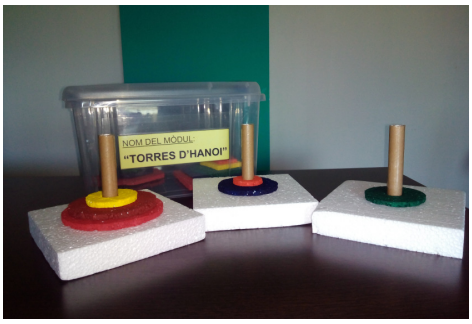


Imatge 33. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

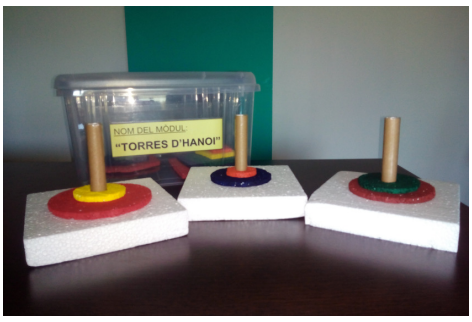
Imatge 34. Inici del procés. Marina Agudelo (2015).



Imatge 35. Algun pas del procés. Marina Agudelo (2015).

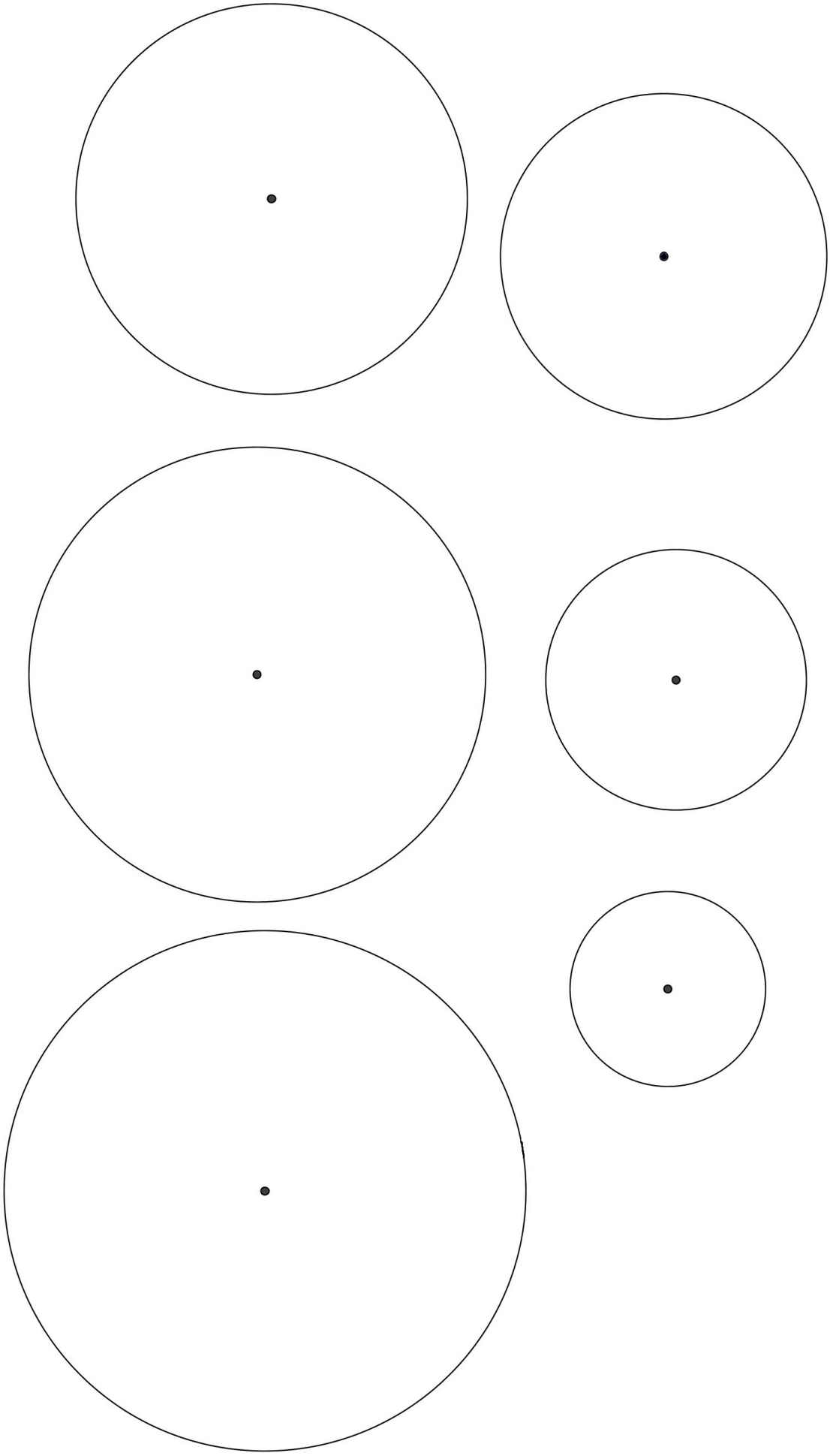


Imatge 36. Algun pas del procés. Marina Agudelo (2015).



Imatge 37. Algun pas del procés. Marina Agudelo (2015).

Imatge 38. Final del procés. Marina Agudelo (2015).



ACTIVITATS COMPLEMENTÀRIES:

Us plantegem una sèrie d'activitats perquè els alumnes aprofundeixin amb aquest mòdul.

- Una manera de jugar amb aquest joc, és que els alumnes s'agrupin per parelles. Aleshores, consisteix que un alumne faci el mòdul mentre l'altre va comptant tots els moviments que realitza. I l'inrevés.

  També, es poden comparar tots els resultats obtinguts a la classe, i veure l'alumne que menys moviments ha fet i el que més.

  I a més, es poden fer tres preguntes més:

  a) Quin és el mínim nombre de moviments que s'ha de fer per obtenir l'objectiu d'aquest mòdul?

  b) Quina és l'expressió genèrica per saber el nombre mínim de moviments per n peces? (***Indicació:*** *calcula primer el nombre mínim de moviments que s'ha de fer per les torres de Hanoi formades per 1, 2, 3, 4, 5 i 6 peces, i després busca una relació entre ells).*

  c) Ara que ja saps el nombre mínim de moviments que s'ha de fer. Calcula el temps que tardes per fer un moviment. Quan tardaries aproximadament per finalitzar el mòdul de 6 peces?

- Per la representació de les Torres de Hanoi sempre s'han utilitzat discs, és a dir, cercles per realitzar-ho. Us proposem que en lloc de cercles, feu les peces de les torres de Hanoi, amb qualsevol altre polígon i amb el nombre de peces que es vulgui.

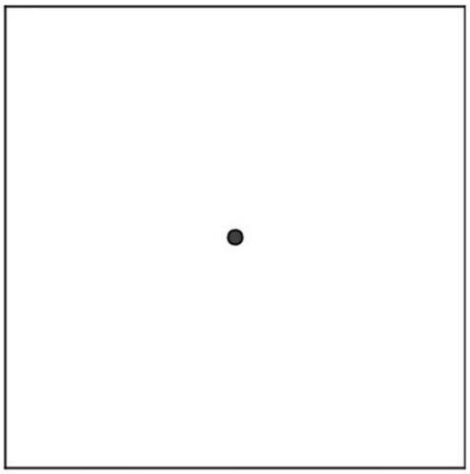
  A continuació, s'adjunten dues plantilles; una de **cinc quadrats** i l'altra de **quatre hexàgons**. Cal fer servir els mateixos materials que abans i el mateix procediment (es pot aprofitar el tauler construït).

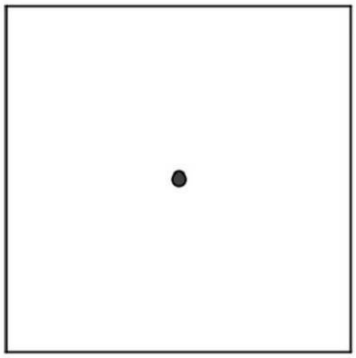
Imatge 39. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

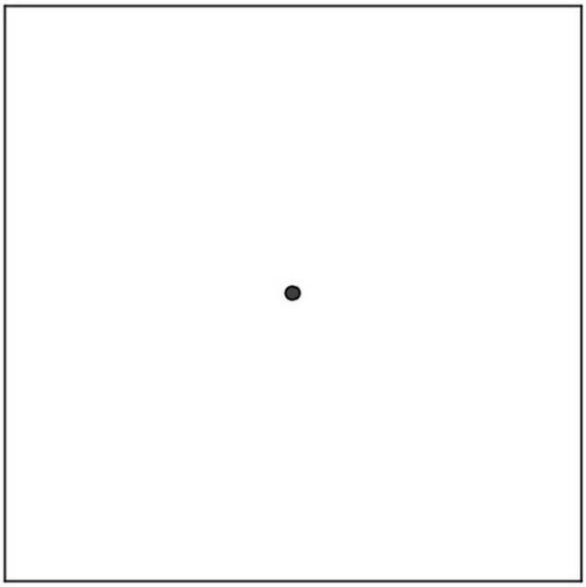
Imatge 40. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

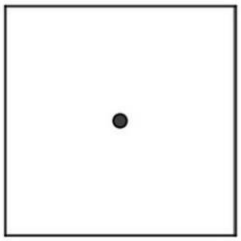
Imatge 41. Construcció real. Marina Agudelo (2015).

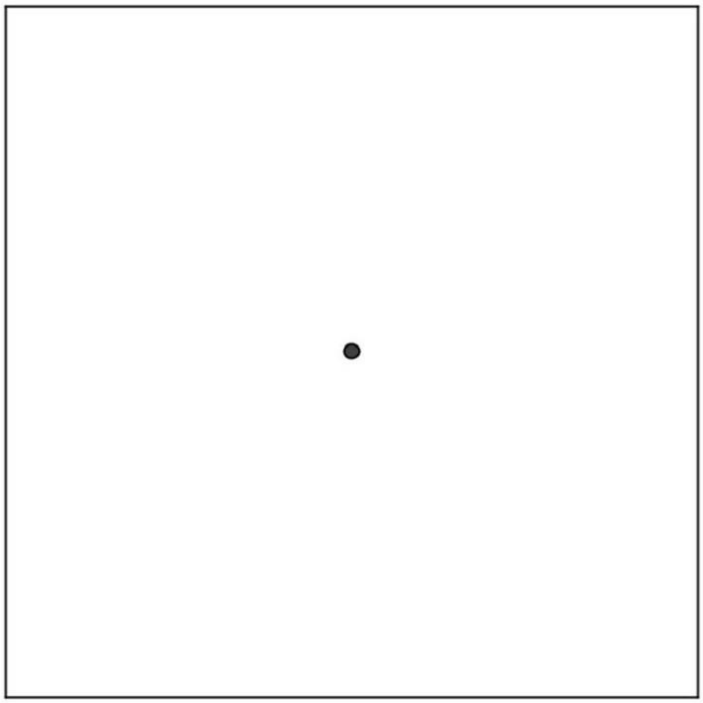
QUADRATS:



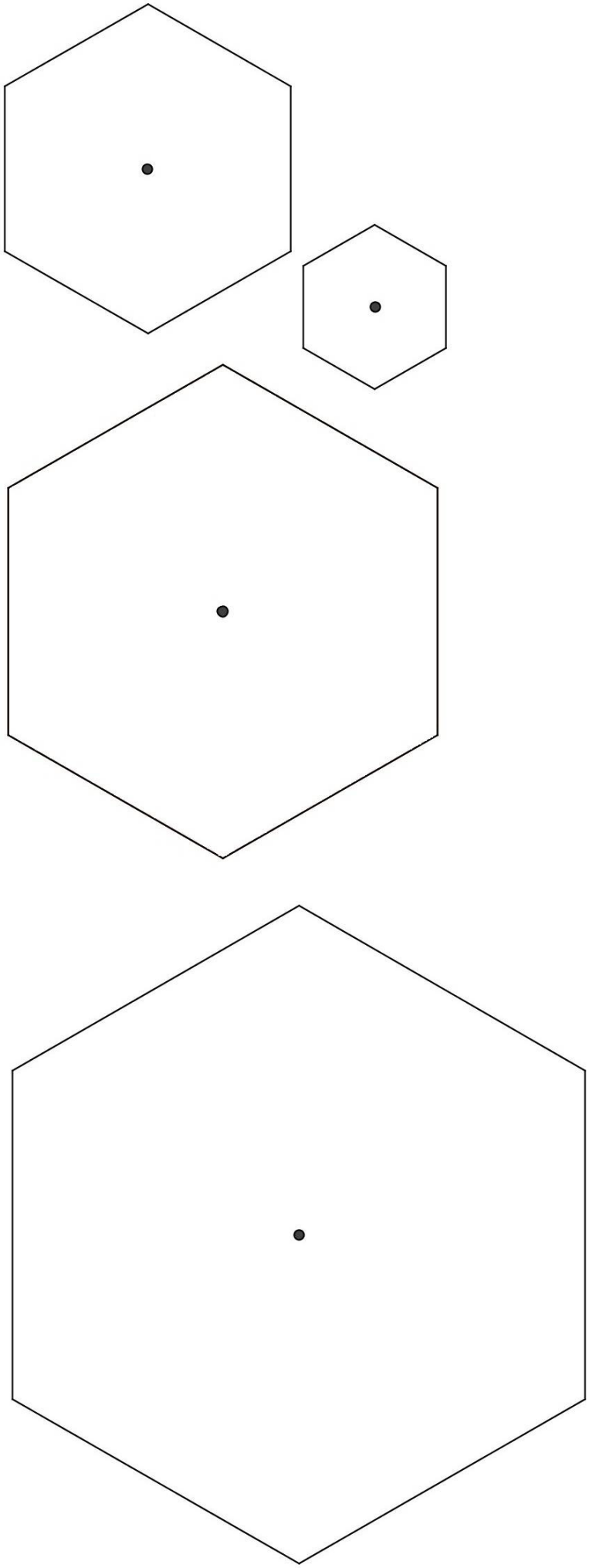








HEXÀGONS:



- Un problema relacionat amb aquest mòdul seria el de les gerres d'aigua. Es tracta que, donades unes gerres de diferents capacitats, amb una d'elles plena d'aigua (generalment la de més capacitat), cal arribar a un objectiu amb condicions concretes.

  A continuació, s'adjunten tres tipus de problemes,

Activitat 1

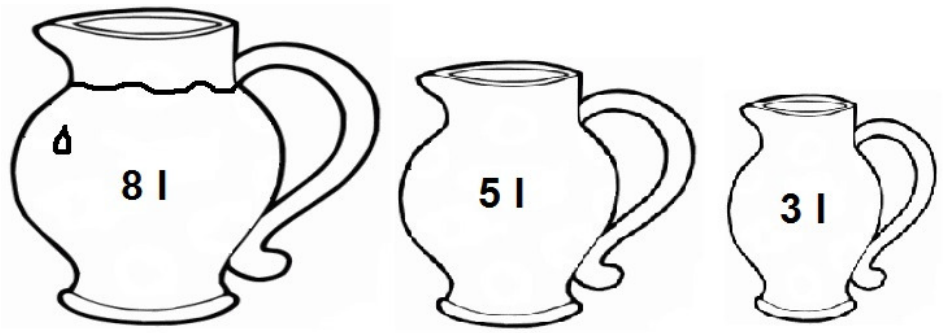
Tenim una gerra de quatre litres plena d'aigua i disposem de dos gerres més buides, una de dos litres i mig i l'altre d'un litre i mig. Cap d'aquestes gerres té cap marca que ens indiqui una quantitat en concret. Com podem separar els quatre litres d'aigua amb dues parts iguals utilitzant únicament aquestes tres gerres?

Activitat 2

Disposem de dues gerres de 3 i 5 litres de capacitat, sense cap marca que indiqui una quantitat en concret. Tenim una aixeta on podem omplir les gerres de la manera que vulguem. Podem passar l'aigua d'una gerra a una a altra tantes vegades com vulguem i també buidar-les, però no tenim cap gerra més. Series capaç d'obtenir exactament 4 litres en alguna d'elles?

Activitat 3

Un pagès té una gerra de 8 litres d'aigua potable. Un senyor li vol comprar només 4 litres d'aigua. El pagès disposa de dues gerres buides de 5 i 3 litres, respectivament. De quin forma el pagès mesurarà exactament els 4 litres d'aigua utilitzant aquestes tres gerres?



PER SABER-NE MÉS: