

La regla d'extensió del Principi d'Indiferència per a sospesar el grau de veritat i de falsedat d'una mateixa hipòtesi.

Dr.Joaquim M. Perramon Ayza

Ponència presentada al Seminari del Grup de Recerca IAFI, 13 d'abril de 2007

Summary

They present a Rule based in the Principle of Indifference to represent the formation of beliefs in conditions of uncertainty.

Key words: Principle of indifference, believe, Keynes, economic behavior

Paraules clau: Principi d'indiferència, creences, Keynes, comportament econòmic

El Principi d'Indiferència ve a dir que, si tenim un dau amb sis cares i desconeixem quina és la probabilitat que surti una determinada cara, en principi li associaríem una sisena part de la probabilitat a cada una. Estadísticament podem comprovar que l'associació s'ha fet correctament.

L'aplicació d'aquest principi també pot comportar absurditats. Un exemple aportat per Martin Gardner (1975, p.107), popular divulgador de les matemàtiques en la seva col·laboració a la revista *Scientific American*, és el següent: hi ha vida al planeta Tità? No ho sabem. Si assignem una probabilitat del 50 per cent ($=1/2$) per representar la nostra ignorància, llavors podem fer una segona pregunta: Hi ha vida vegetal? I altre cop la probabilitat assignada és del 50 per cent ($1/2$); i que no hi hagi vida animal?, també $1/2$. Llavors, per calcular la probabilitat que no hi hagi vida a Tità, ni vegetal ni animal, hem de multiplicar les probabilitats respectives, això és $1/2 * 1/2 = 1/4$. Però si la probabilitat que no hi hagi vida és $1/4$, la probabilitat que hi hagi vida a Tità serà d' $1 - 1/4 = 3/4$, en contradicció amb la hipòtesi de partida que afirmava que era d' $1/2$.

Tanmateix, una cosa és associar una probabilitat com a grau de creença i una altra és emprar aquesta probabilitat com a procediment de decisió o com a assignació provisional en tant que hom no disposi de més informació. És incorrecte associar una probabilitat d'un mig a l'existència de vida a Tità, però és correcte que si algú ens pregunta si hi ha vida a Tità agafem una moneda, la tirem a l'aire i si surt cara responguem que sí, i si surt creu responguem que no.

Un altre exemple: imaginem un examen en el qual fan una pregunta del tipus 'sí o no' i no sabem res de res. Procedim igual: agafem la moneda i responem a l'atzar amb una probabilitat d'un mig. Amb això tenim un 50 % de probabilitats d'encertar-la. Però ha de quedar clar que és molt diferent la probabilitat d'encertar-la que el grau de creença expressat com a probabilitat que una proposició sigui vertadera.

A l'efecte de prendre decisions, el Principi d'Indiferència, considerat com aquell segons el qual davant d'una situació d'ignorància assignem probabilitats d'encert iguals als diversos esdeveniments possibles, pot funcionar. Si 1000 estudiants han actuat segons hem dit, aproximadament uns 500 l'hauran encertat.

Veiem que hi ha una diferència conceptual molt gran entre la probabilitat obtinguda a través del Principi d'indiferència, que podem anomenar inductiva, i que depèn de l'observador i de la informació que aquest disposa, i la probabilitat estadística que depèn d'una situació objectiva, com ara uns experiments. Son conceptes que poden tenir usos molt diferents.

Tanmateix, el concepte de probabilitat introduït per Jacob Bernouilli en *l'Ars Conjectandi* (1713) va derivar a partir de la Teoria Analítica de les Probabilitats de Pierre Laplace cap a l'estudi d'un tipus particular de probabilitat que és l'anomenada probabilitat additiva. La probabilitat additiva consisteix en què la suma de la probabilitat d'una hipòtesi h i la hipòtesi no h és igual a 1. Aquest per exemple és el cas d'una moneda o d'un dau: la probabilitat que surti 3 és d' $1/3$ i la probabilitat que no surti tres és igual a $5/6$.

El desenvolupament de la Teoria de Probabilitats (additives) va fer que la probabilitat estadística araconés la probabilitat inductiva. John Maynard Keynes, en el seu Tractat de Probabilitat de l'any 1921, salva la probabilitat inductiva tot considerant que el concepte inductiu s'utilitza implícitament en tots els raonaments sobre esdeveniments desconeguts tant de la ciència com de la vida ordinària.

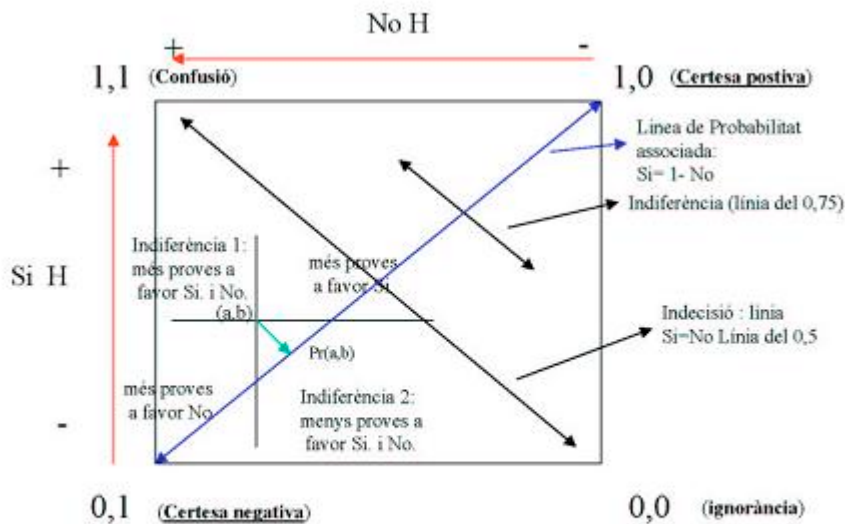
Tanmateix, la probabilitat inductiva quedà relegada per la probabilitat estadística, i és que Keynes i el seu tractat estan immersos en l'època del desenvolupament de la probabilitat additiva, i a mi em sembla que la probabilitat inductiva encaixa molt millor en l'àmbit de la probabilitat no additiva, contemplada en *l'Ars Conjectandi* de Bernouilli de l'any 1713, però que no ha estat desenvolupada fins la publicació de l'elaboració de la *Teoria Matemàtica de l'Evidència*, d'Arthur Dempster i Glenn Shafer, l'any 1975.

El Principi d'Indiferència no solament es pot limitar a situacions d'ignorància sinó que resulta molt útil com a procediment de sospesar creences sobre una determinada hipòtesi en situacions d'incertesa amb coneixement o ignorància parcial.

De la de la tesi doctoral de Didac Ramírez (1988) és desprèn que la incertesa pot sintetitzar-se com una situació en la qual tenim suport evidencial sobre una hipòtesi i sobre la contrària, per tant la probabilitat no additiva i la incertesa tenen moltíssim en comú.

Aquesta incertesa, representable com a probabilitat no additiva, molt corrent en les ciències socials, la comparem amb el que passa en les novel·les de l'Agatha Christie, on podem tenir a la vegada raons a favor i en contra d'una mateixa hipòtesi. A partir del Principi d'Indiferència derivarem una regla per a sospesar aquests arguments, tasca que segueix el propòsit iniciat per Jacob Bernouilli l'any 1713 amb el seu *Ars Conjectandi*.

Imaginem doncs que tenim una hipòtesi amb arguments a favor i arguments en contra i que podem assignar una creença subjectiva pels arguments a favor i una creença subjectiva pels arguments en contra, i ho disposem en un gràfic del tipus 'caixa d' Edgeworth' tal com es mostra a continuació.



OBTENCIÓ D'UNA PROBABILITAT ASSOCIADA AL GRAU DE CREENÇA EN H I EN NO H

En el gràfic, la cantonada inferior esquerra i la cantonada superior dreta representen les posicions oposades. A l'esquerra no tenim cap creença a favor però tenim tota la creença en

contra, per tant aquest punt representa la **certesa** que la hipòtesi és **falsa**. A la cantonada superior dreta el cas és l'oposat, per tant hi tenim la **certesa** que és veritat.

A la cantonada superior esquerra tenim tots els arguments que és vertader i també que és fals; d'això en diem **confusió**; i a la cantonada inferior dreta no tenim cap creença a favor i tampoc en contra, de manera que aquest punt correspon a la **ignorància** absoluta.

A la diagonal principal d'esquerra-dalt a dreta-baix hi ha totes les combinacions en què tenim la mateixa creença que sigui fals com que sigui cert; per tant, considerant el Principi d'Indiferència, en direm la línia d'indiferència del 50 %. El punt d'ignorància absoluta a l'extrem inferior dret correspondria a la hipòtesi sobre la vida a Tità.

De la mateixa manera que hi ha la línia del 50 per cent, podem considerar les paral·leles com a línies d'indiferència però amb una altra combinació de creences constant. Per exemple, si la creença que sigui cert és del 70 per cent i la creença que no sigui cert és del 50, per aquest punt passa una paral·lela a la diagonal que és exactament la línia d'indiferència del 60 %. A aquesta mateixa línia pertanyen els parells "creença (h) = 80% i creença de ($no\ h$) = 60 % o bé creença (h) = 30 % i creença de ($no\ h$) = 10 %. En tots els punts d'aquesta línia es manté la diferència entre la creença en h i la creença en $no\ h$. En aquest cas serà el 20 %.

La diagonal que va de esquerra-baix a dreta-dalt representa dins de la caixa d'Edgeworth el que anomenem línia de probabilitat additiva perquè els seus punts compleixen la condició que la creença en h i la creença en $no-h$ sumen 1. Els punts de la caixa més a l'esquerra de la línia de probabilitat corresponen a situacions de més confusió on la suma de les creences a favor i en contra és superior a 1; i els punts més a l'esquerra corresponen a situacions amb més ignorància on la suma de les creences a favor i en contra és inferior a 1.

La regla d'extensió del Principi d'Indiferència consisteix en associar un nivell de probabilitat a cada una de les línies d'indiferència, les quals corresponen a situacions en les que tenim uns judicis a favor i en contra desiguals, però sempre en la mateixa proporció. Així, si tenim un punt en la caixa format per una creença (h) i una creença ($no\ h$), per aquest punt passa una línia d'indiferència a la qual li associem una probabilitat que depèn d'on estigui la intersecció de la línia d'indiferència amb la línia de probabilitat.

Cal advertir, pel que respecta a l'espai de confusió, que en aquesta àrea la suma de les creences en h i en $no\ h$ és superior a 1. Això traduït en prosa significa que la informació és contradictòria.

Imaginem un Jutge que ha de determinar si un tal Dracus és culpable d'un assassinat i té dos testimonis, un dels quals diu que Dracus és culpable i l'altre que és innocent. Evidentment un dels dos menteix. La situació del Jutge és tal que en l'aplicació del Principi d'Indiferència ha de representar la seva informació amb una probabilitat del 50 %, que és exactament la mateixa que si no hi hagués cap testimoni.

Ara bé, tot i que des d'un punt de vista formal i de construcció matemàtica sigui inadmissible que la creença en h i no h sigui contradictòria, és a dir, que la suma de la creença en h i en no h sigui superior a 1, tanmateix resulta interessant la representació formal d'aquesta situació amb el gràfic descrit en tant que representa una situació habitual amb la que es troba el científic social en la seva investigació i perquè, en definitiva, en aplicar el Principi de la Indiferència en la probabilitat, queda sintetitzat el grau de coneixement independentment de si prové d'una situació de confusió o d'ignorància. Representem així amb un 50 % la ignorància total del Jutge, però considerem interessant plantejar si aquesta manca de coneixement és conseqüència d'una situació d'ignorància o de confusió.

Amb aquesta regla, l'extensió del Principi d'Indiferència, lliurem la probabilitat subjectiva de contradiccions en el sentit que el resultat sempre és matemàticament coherent i també proporcionem una base més objectiva per tal que dos científics que treballin junts s'entenguin. Per exemple, si dos científics tenen uns judicis o arguments una mica diferents a favor i en contra d'una hipòtesi, es pot extreure un valor intermedi i combinar-lo d'acord amb l'extensió del Principi d'Indiferència.

Formalització

Tot i l'esforç per fer entenedora l'explicació, és necessària la formalització dels conceptes per tal de donar precisió i evitar equívocs.

- Tenim una hipòtesi h que pot ser vertadera ($Si h$) o falsa (Noh); tenim també arguments a favor que sigui vertadera —que expressem amb un grau de Creença (h)— i arguments en contra que expressem com a Creença (noh). Creença (\cdot) designa un grau de coneixement subjectiu.
- $0 \leq \text{Creença}(h) \leq 1$ i $0 \leq \text{Creença}(noh) \leq 1$
- Prenem en préstec de la Teoria Matemàtica de l'Evidència el concepte de plausibilitat i que denotarem per Plausibilitat (h). La plausibilitat es defineix a partir de l'equació:

- Plausibilitat (h) = 1-Creença (noh)
- Plausibilitat (noh) = 1- Creença (h)

Comentari: tot havent separat les proves i indicis a favor de h i a favor de no h , hem deixat clar que podem tenir proves a favor d' h i no h a la vegada. Ara bé, la pròpia creença a favor d' h , en sí mateixa és un rebuig de la hipòtesi negativa, i viceversa. La plausibilitat vol recollir aquest aspecte. La plausibilitat per definició és l'acceptació d' h derivada del grau de creença en no h .

Cal observar que:

$$\text{Creença (h) + Plausibilitat (noh) = Creença(noH) + Plausibilitat (h) = 1}$$

En la línia de probabilitat additiva les raons a favor descarten les raons en contra i viceversa, i per tant:

$$\text{Pr(h) + Pr (nh) = 1 ; Creença (h) + Creença (noH) = 1 i Plausibilitat (h)+ Plausibilitat (nh) = 1}$$

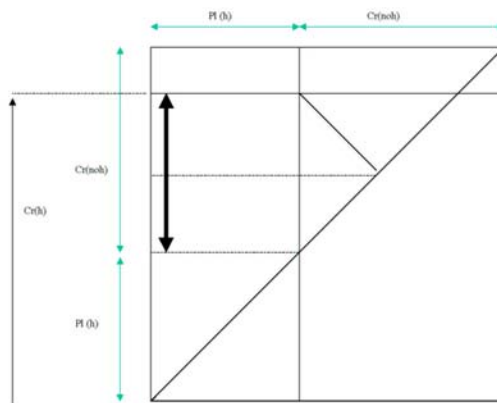
Tot i que no ho sembli la probabilitat està més propera a la certesa que a la incertesa. Així, encara que el resultat de tirar una moneda a l'aire sigui incert, el procés està regit per una llei de probabilitats absolutament certa¹.

- Definim una regla de combinació de la de la Creença (h) i Creença (noh) que denominem Extensió del Principi d'Indiferència, segons la qual de les dues probabilitats obtenim un nivell de probabilitat d' h que denominem Pr(h), tal que:

$$\text{Pr(h) = } \frac{\text{Creença (h) + Plausibilitat (h)}}{2}$$

Tal com s'ha explicat, per tal de trobar la probabilitat el que és fem cercar la intersecció de la línia d'indiferència que passa sobre un punt amb la línia de probabilitat. Geomètricament es pot veure fàcilment com obtenim aquesta fórmula.

¹ J.M.Perramon, 2003.



- A cada $Pr(h)$ li correspon una probabilitat de no h que designem per $Pr(noh)$ tal que:

$$Pr(noh) = 1 - Pr(h) = \frac{\text{Credibilitat (noh)} + \text{Plausibilitat (noh)}}{2}$$

- En la introducció hem explicat que en una línia d'indiferència, la diferència entre la creença en h i la creença en no h és constant. De fet el que és constant és la mitjana entre la credibilitat d' h i la plausibilitat d' h , és a dir, la probabilitat d' h tal i com ha estat definida.
- L'equació $Pr(h) = 1 - Pr(noh)$ defineix una **línia de probabilitat associada** que en el gràfic del tipus Edgeworth correspon a la diagonal que va de l'extrem inferior esquerra a l'extrem superior dret.

Comentaris:

- a.- Com veiem, si tenim un grau de creença a favor i un grau de creença en contra, i el nivell de probabilitat deduït és molt coherent.

b.- La probabilitat deduïda d'h ($\Pr(h)$), té un complementari $\Pr(\text{no}h)=1-\Pr(h)$. La probabilitat deduïda resultant de l'aplicació de la regla de combinació satisfà un dels axiomes bàsics de la Teoria de Probabilitats.

c.- $\Pr(h)$ es pot emprar com a probabilitat *a priori*.

Altres definicions:

Sigui (a) un grau de creença a favor d'h, i sigui (b) un grau de creença a favor de no h, i (a,b) és un punt del gràfic tipus Edgeworth (a,b).

En conseqüència, si

- 1.- Si $a+b > 1$, direm que (a,b) pertany a l' *Espai de confusió* de la caixa.
- 2.- Si $a+b < 1$, direm que (a,b) pertany a l' *Espai d'ignorància* de la caixa.

Si $a+b = 1$, direm que estan en la línia de probabilitat additiva corresponent a fenòmens regits per una llei de probabilitat.

Indicador de confusió (IC):

Tal com s'ha definit l'espai de confusió, hom pot calcular la distància a la línia de probabilitat additiva com a indicador de confusió. La distància mínima és la part de la diagonal que passi sobre (a,b) en sentit superior-esquerra cap a inferior dreta, fins que interseca la línia de probabilitat additiva.

Matemàticament:

$$IC = \sqrt{[a - \Pr(h)]^2 + [\Pr(\text{no}h) - b]^2}$$

Indicador d'ignorància (II):

Pels punts per sota de la línia de probabilitat associada, també podem definir un indicador d'ignorància com a:

$$II = \sqrt{[\text{Pr}(h) - a]^2 + [b - \text{Pr}(\text{no}h)]^2}$$

Exemples:

A continuació presentem una taula que exemplifica diverses situacions:

Cr (h)	Pl (nh)	Cr (nh)	Pl(h)	Pr(h)	Pr(nh)
0,7	0,3	0,5	0,5	0,6	0,4
0,8	0,2	0,6	0,4	0,6	0,4
0,2	0,8	0,4	0,6	0,4	0,6
0,5	0,5	0,7	0,3	0,4	0,6
0,2	0,8	0,2	0,8	0,5	0,5
0,7	0,3	0,7	0,3	0,5	0,5
0,8	0,2	0,2	0,8	0,8	0,2
0,8	0,2	0,1	0,9	0,85	0,15
0,3	0,7	0,8	0,2	0,25	0,75
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,4	0,6	0,6	0,4	0,4	0,6
0,6	0,4	0,4	0,6	0,6	0,4
0	1	0	1	0,5	0,5
1	0	1	0	0,5	0,5

Conclusions: podem extreure conclusions molt diverses, però a mi m'interessa destacar-ne tres:

- 1.- Mitjançant la regla d'extensió del principi d'indiferència, podem sospesar de manera coherent els judicis a favor i en contra d'una mateixa hipòtesi obtenint una probabilitat subjectiva matemàticament coherent basada en el grau de creença de la hipòtesi a favor i del grau de creença de la hipòtesi contrària.
- 2.- Que un cop obtingut un nivell de probabilitat associat, aquest nivell de probabilitat compleix els axiomes bàsics de la Teoria de Probabilitats, a partir de la qual cosa el podem emprar com a substitutiu provisional de la probabilitat en tant hom no avanci cap a una situació de major coneixement.
- 3.- La utilització de probabilitats subjectives té també un altre avantatge, i és que la ciència té aspectes efectivament subjectius. Amb el procediment descrit també es pot combinar d'una manera molt simple l'opinió de diversos experts.

Tot havent advertit des d'un bon començament que assignar probabilitats d'acord amb el principi d'indiferència a situacions d'ignorància podia portar a absurditats, per tal de salvar aquesta dificultat hem remarcat moltíssim que la regla d'extensió del principi d'indiferència és solament una manera coherent d'avaluar la informació relativa a una hipòtesi.

La regla no resol el problema de la incertesa. Tenir un grau de creença a favor d'una hipòtesi i de la contrària no deixa de ser una situació no desitjada per qualsevol investigador, però el cas és que, sobretot en les ciències socials, ens trobem en situacions amb una incertesa irreductible i, per tant, esdevé necessari treballar amb el coneixement que disposem, tot sospesant-lo.