Trabajo final de grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas
Universitat de Barcelona

MEDIDAS MONETARIAS DE RIESGO Y SU APLICACIÓN A LA CONIC-FINANCE

Autor: Guillermo Bernárdez Gil

Director: Dr. José M. Corcuera Valverde
Realizado en: Departamento de Probabilidad, Lógica y Estadística

Barcelona, 18 de enero de 2016

Abstract

The Conic-finance is a new theory for modeling financial markets with many implementations at present, but its rigorous theoretical substantiation might not be easy to find. In this work, we try to present, in a clear and well-argued way, both a general model of Conic-finance and a parametric version, using to this end the well-known theory of monetary measures of risk. Thus, we will introduce and develop thoroughly this theory, focusing on those measures that satisfies the properties of convexity or coherence, as well as, finally, the law-invariance one. Furthermore, in order to gain a better understanding of the Conic-finance's theory, we will clarify the terminology of financial markets' modeling by exhibiting the mathematical estructure of a simple one-period model, which at the same time will allow us to introduce some notions of arbitrage theory.

Resumen

La Conic-finance es una nueva teoría de modelización de mercados financieros que cuenta con un gran número de aplicaciones en la actualidad, pero cuya fundamentación teórica rigurosa puede ser difícil de encontrar. En este trabajo tratamos de presentar y justificar, de forma clara y bien argumentada, tanto un modelo general de Conic-finance como una versión paramétrica del mismo, apoyándonos para lograrlo en la bien conocida teoría de medidas monetarias de riesgo. Por tanto, introduciremos y desarrollaremos exhaustivamente dicha teoría, centrándonos en el estudio de aquellas medidas con las propiedades de convexidad o coherencia, así como finalmente de invariancia en ley. Asimismo, para una mayor comprensión de la teoría de Conic-finance, aclararemos la terminología relacionada con la modelización de mercados financieros definiendo la estructura matemática de un modelo sencillo de un periodo, lo cual a su vez nos permitirá introducir nociones de teoría de arbitraje.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera mencionar al Dr. Corcuera por su ayuda y orientación en este trabajo; le estoy muy agradecido por introducirme en este apasionante tema con el que tanto he disfrutado y aprendido.

No puedo olvidarme tampoco de mis padres, mis abuelos y mi novia, quienes han estado siempre a mi lado apoyándome y dándome fuerzas; es a ellos a quienes dedico todas y cada una de estas páginas.

Índice de contenidos

1. Introducción

El proyecto

La teoría de modelización de mercados financieros a la que nos referimos con el nombre de Conic-finance es relativamente joven (las primeras ideas al respecto datan de inicios del presente siglo) y surge con la intención de generar nuevos modelos capaces de reproducir una diferencia entre el precio al que el mercado compra y el precio al cual el mercado vende; esta diferencia, visible en la vida real, no podía ser justificada a través de los modelos clásicos basados en la ley de un único precio. La mayoría de trabajos relacionados con la Conic-finance, no obstante, se realizan con un enfoque pragmático en el que se ponen de manifiesto algunas de sus numerosas aplicaciones, en detrimento de una fundamentación matemática de la misma más rigurosa. En esta memoria, dejaremos de lado las múltiples y útiles aplicaciones de esta teoría, y en su lugar trataremos de ofrecer una justificación precisa de sus bases.

Nuestro objetivo será fundamentar la Conic-finance a través de la bien conocida teoría de medidas monetarias de riesgo. Así, nuestra primera meta será introducir y desarrollar matemáticamente esta teoría, analizando las relaciones de las medidas de riesgo con sus conjuntos de aceptación y, lo que constituirá la parte más extensa del trabajo, tratando de caracterizar exhaustivamente aquellas con las propiedades de convexidad, coherencia, y finalmente invariancia en ley. También presentaremos un modelo sencillo de mercado financiero a partir del cual intentaremos dejar claros conceptos importantes relacionados con la modelización de mercados, cosa que nos permitirá una mayor comprensión de la teoría de Conic-finance que expondremos. De esta manera, utilizando los resultados que habremos obtenido de la teoría de medidas monetarias de riesgo, así como nuevos instrumentos matemáticos como los índices de aceptabilidad, trataremos finalmente de cerrar esta memoria dando la fundamentación deseada tanto del modelo general de la Conic-finance como de un modelo paramétrico particular, mostrando en ambos casos un procedimiento preciso de obtención de las expresiones de los precios de compra y de venta.

Estructura de la Memoria

En la Sección 2 introduciremos el concepto de medida monetaria de riesgo desde una perspectiva axiomática, a partir de la cual presentaremos las propiedades de convexidad y coherencia. Posteriormente, en la Sección 3, desarrollaremos una exhaustiva caracterización de las medidas de riesgo convexas; en dicha caracterización, acabaremos estableciendo un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y considerando L^∞ el espacio de definición de estas medidas, un marco de trabajo que nos permitirá profundizar en el desarrollo de esta teoría hasta llegar al estudio de una nueva propiedad: la invariancia en ley. Una vez realizado todo este análisis, y antes de abordar la Conic-finance, mostraremos en la Sección 4 terminología y conceptos básicos relacionados con la modelización de mercados financieros, haciendo especial hincapié en la teoría de arbitraje. Finalmente, en la Sección 5 presentaremos la teoría de Conic-finance y buscaremos las expresiones de los precios de venta y de compra, primero de manera general y después en un caso más particular en el que nos interesará obtener un modelo paramétrico que nos acabe facilitando un cálculo explícito de dichos precios; en ambos casos, trataremos de fundamentar cada paso a través de los resultados obtenidos en las secciones anteriores. En la Sección 6 expondremos las conclusiones.

2. Medidas monetarias de riesgo

En esta primera sección, iniciaremos una aproximación axiomática a las medidas monetarias de riesgo; dicha axiomática, como comprobaremos, estará motivada por ciertos comportamientos del sector financiero que queremos modelar. Definiremos también conceptos fundamentales relacionados, viendo algunas propiedades generales que satisfacen. Por último, presentaremos algunos ejemplos. El marco matemático en el que trabajaremos desde un inicio es el que se detalla a continuación.

Sea Ω un conjunto de escenarios fijo. Una *posición financiera* se describe a través de una aplicación $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $X(\omega)$ es el valor neto descontado de la posición al final del periodo de negociación si el escenario $\omega \in \Omega$ tiene lugar. Nuestro objetivo es cuantificar el riesgo de X a partir de un número $\rho(X)$, donde X pertenece a una clase dada $\mathcal{X}$ de posiciones financieras. Empezaremos suponiendo que $\mathcal{X}$ es un espacio lineal de funciones acotadas que contiene las constantes. Por contra, no asumiremos en este inicio que haya sido dada una medida de probabilidad en Ω.

2.1. Conceptos generales

Definición 2.1. Se define como *medida monetaria de riesgo* a una aplicación $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones para todo $X, Y \in \mathcal{X}$.

- *Monotonía:* Si $X \leq Y$, entonces $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- *Invariancia monetaria:* Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

Analicemos el significado financiero de estas propiedades. En cuanto a la monotonía, está claro que el riesgo de una determinada posición debería reducirse si el perfil de pagos final se ve incrementado. La invariancia monetaria, también denominada *invariancia por traslación*, está motivada por la interpretación de $\rho(X)$ como la cantidad que tendría que ser añadida a la posición X para hacerla aceptable desde el punto de vista de una agencia supervisora; así, si una cierta cantidad m se añade a la posición y se invierte sin riesgo alguno, dicho capital necesario debería verse reducido en esa misma cantidad. En particular, esta última propiedad implica que

$$\rho(X + \rho(X)) = 0, \tag{2.1}$$

así como que

$$\rho(m) = \rho(0) - m \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Observación 2.2. Para muchas situaciones, no hay pérdida de generalidad al asumir que la medida monetaria de riesgo dada cumpla también la condición de

- *Normalización:* $\rho(0) = 0$

En particular, toda medida monetaria de riesgo ρ que satisfaga la propiedad de

- *Homogeneidad positiva:* Si $\lambda \geq 0$, se tiene que $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$,

está normalizada. $\Diamond$

Observación 2.3. Estamos considerando que X describe el valor neto descontado de una posición financiera al final de un periodo; no obstante, también podríamos pensar en su valor nominal $\tilde{X}$. Si, por ejemplo, consideramos el factor de descuento $1/(1+r)$, donde r es la tasa de interés simple, tendríamos que

$$\tilde{X} = (1+r)X.$$

Así, podemos definir la correspondiente medida de riesgo $\tilde{\rho}(\tilde{X}) := \rho(X)$, también monótona, pero que en lugar de cumplir la invariancia monetaria satisfaría la siguiente propiedad: $\tilde{\rho}(\tilde{X} + (1+r)m) = \tilde{\rho}(\tilde{X}) - m$. $\diamondsuit$

Lema 2.4. *Toda función monetaria de riesgo ρ es continua Lipschitz con respecto a la norma del supremo $\|\cdot\|$*

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$$

Demostración. Tenemos que $X \leq Y + \|X - Y\|$; por monotonía e invariancia monetaria tenemos que $\rho(Y + \|X - Y\|) = \rho(Y) - \|X - Y\| \leq \rho(X)$. Cambiando la relación entre X e Y obtenemos la afirmación. $\square$

Definición 2.5. Una medida monetaria de riesgo ρ induce la clase

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\}$$

de posiciones aceptables (en el sentido de que no necesitan capital extra). La clase $\mathcal{A}_\rho$ se define como el *conjunto de aceptación* de ρ.

Recíprocamente, considerando una determinada clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ de posiciones aceptables, ésta induce la siguiente medida de riesgo

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathcal{A}\}. \tag{2.2}$$

Podemos definir, entonces, el *requisito de capital* de una posición $X \in \mathcal{X}$ como la mínima cantidad m para la cual $m + X$ se vuelve aceptable.

Las siguientes dos proposiciones resumen las relaciones entre las medidas monetarias de riesgo y sus conjuntos de aceptación.

Proposición 2.6. *Supongamos que ρ es una medida monetaria de riesgo con conjunto de aceptación $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\rho$.*

(a) *$\mathcal{A}$ es no vacío, y satisface las dos siguientes condiciones:*

$$\inf\{m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathcal{A}\} > -\infty, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{X} \in \mathcal{A}, \ \ Y \in \mathcal{X}, \ Y \geq X \quad \Longrightarrow \quad Y \in \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

Además, $\mathcal{A}$ tiene la siguiente propiedad de clausura: para $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{X}$,

$$\{\lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}\} \textit{ es cerrado en } [0,1]. \tag{2.5}$$

(b) *Se puede recuperar ρ a partir de $\mathcal{A}$:*

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathcal{A}\}. \tag{2.6}$$

(c) *ρ es homogéneamente positiva si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es un cono.*

Demostración. (a) Las condiciones (2.3) y (2.4) son fáciles de comprobar teniendo en cuenta el contexto financiero y las propiedades de monotonía e invariancia monetaria de ρ. En cuanto a la propiedad de clausura (2.5), vemos en primer lugar que, fijadas $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{X}$, y considerando $\lambda \in [0,1]$ y $\lambda + \epsilon$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$, por la continuidad Lipschitz de ρ que nos proporciona el Lema 2.4

$$|\rho((\lambda+\epsilon)X + (1-(\lambda+\epsilon))Y) - \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)| \leq \|\epsilon(X-Y)\| = |\epsilon|\|X-Y\|,$$

lo cual, centrándonos en el caso en que ϵ tienda a 0, nos permite asegurar la continuidad de la función $\lambda \mapsto \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)$. La continuidad de esta función, a su vez, nos permite comprobar finalmente que el conjunto de $\lambda \in [0,1]$ tales que $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq 0$ es cerrado.

(b) La invariancia monetaria implica que, para $X \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}\inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathcal{A}_\rho\} &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \rho(m+X) \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \rho(X) \leq m\} \\ &= \rho(X).\end{aligned}$$

(c) La homogeneidad positiva de ρ conlleva directamente que $\mathcal{A}$ es un cono. La implicación contraria vendrá dada por la Proposición 2.8 teniendo en cuenta la Observación 2.7.

□

Observación 2.7. Con la notación que hemos introducido en la Definición 2.5, notamos que (2.6) toma la expresión

$$\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$$

◇

Proposición 2.8. *Consideramos que $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío de $\mathcal{X}$ que satisface* (2.3) *y* (2.4). *El funcional $\rho_{\mathcal{A}}$ tiene entonces las siguientes propiedades:*

(a) *$\rho_{\mathcal{A}}$ es una medida monetaria de riesgo.*

(b) *$\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$. Si $\mathcal{A}$ satisface la propiedad de clausura* (2.5), *se tiene la igualdad $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$*

(c) *Si $\mathcal{A}$ es un cono, $\rho_{\mathcal{A}}$ es homogeneamente positiva.*

Demostración. (a) Por la definición de $\mathcal{A}$ es evidente verificar que $\rho_{\mathcal{A}}$ satisface las propiedades de monotonía e invariancia monetaria. Para acabar, tenemos que ver que $\rho_{\mathcal{A}}$ solo toma valores finitos. Fijamos una posición $Y \in \mathcal{A}$; dada $X \in \mathcal{X}$ existe un número finito m tal que $m + X > Y$ ya que X e Y están acotadas. Así,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) - m = \rho_{\mathcal{A}}(m+X) \leq \rho_{\mathcal{A}}(Y) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq m < \infty.$$

Para ver que $\rho_{\mathcal{A}}(X) > -\infty$ para cualquier $X \in \mathcal{X}$, tomamos otro número finito m' tal que $X + m' \leq 0$; sabiendo que $\rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$ por (2.3), y aplicando monotonía e invariancia monetaria, obtenemos finalmente

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) + m' > -\infty.$$

(b) La inclusión $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ es directa. Supongamos que $\mathcal{A}$ cumple (2.5); debemos mostrar $X \notin \mathcal{A} \Rightarrow \rho_\mathcal{A}(X) > 0$. Para ello, tomamos $m > \|X\| = \sup_\omega |X|$; existe un $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\epsilon m + (1-\epsilon)X \notin \mathcal{A}$ por (2.5). Así,

$$0 \leq \rho_\mathcal{A}(\epsilon m + (1-\epsilon)X) = \rho_\mathcal{A}((1-\epsilon)X) - \epsilon m \quad \Rightarrow \quad \epsilon m \leq \rho_\mathcal{A}((1-\epsilon)X)$$

Puesto que $\rho_\mathcal{A}$ es una medida monetaria de riesgo, por el Lema 2.4

$$|\rho_\mathcal{A}((1-\epsilon)X) - \rho_\mathcal{A}(X)| \leq \epsilon\|X\|$$
$$\Rightarrow \quad \rho_\mathcal{A}(X) \geq \rho_\mathcal{A}((1-\epsilon)X) - \epsilon\|X\| \geq \epsilon(m - \|X\|) > 0.$$

(c) Sea $X \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathbb{R}$ tales que $m + X \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un cono, si $\lambda \geq 0$ tenemos que $\lambda(m+X) \in A$ Por invariancia monetaria de $\rho_\mathcal{A}$ obtenemos

$$0 \geq \rho_\mathcal{A}(\lambda(m+X)) = \rho_\mathcal{A}(\lambda X) - \lambda m.$$

Considerando $m = \rho_\mathcal{A}(X)$ vemos que $\rho_\mathcal{A}(\lambda X) \leq \lambda\rho_\mathcal{A}(X)$. Ahora cojamos $n < \rho_\mathcal{A}(X)$; entonces $n + X \notin \mathcal{A}$, y por ser $\mathcal{A}$ un cono, $\lambda m + \lambda X \notin \mathcal{A}$ para $\lambda \geq 0$. De aquí obtenemos que $\lambda n < \rho_\mathcal{A}(\lambda X)$, y pensando en $n = \rho_\mathcal{A}(X) - \epsilon$ para $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ suficientemente pequeño, junto con la desigualdad anterior, llegamos a la a homogeneidad positiva de $\rho_\mathcal{A}$.

□

2.2. Convexidad y coherencia

Definición 2.9. A una medida monetaria de riesgo $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se le llama *medida de riesgo convexa* si cumple la propiedad de

- *Convexidad:* $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$, con $\lambda \in [0,1]$.

Este axioma de convexidad está motivado por la idea financiera de que la *diversificación* de los recursos a invertir no debería incrementar el riesgo.

En el caso en que ρ sea convexa y normalizada, tendremos que

$$\begin{aligned} \rho(\lambda X) &\leq \lambda\rho(X) \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \rho(\lambda X) &\geq \lambda\rho(X) \quad \text{para } \lambda \geq 1. \end{aligned}$$

A la primera desigualdad podemos llegar fácilmente aplicando la propiedad de convexidad al par de posiciones financieras $X, 0 \in \mathcal{X}$; dada la normalización de ρ, $\rho(\lambda X) = \rho(\lambda X + (1-\lambda)0) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(0) = \lambda\rho(X)$ para toda $\lambda \in [0,1]$. En cuanto a la segunda, consideremos $\epsilon \in (0,1]$ y $\lambda \geq 1$; por la desigualdad anterior, tenemos que $\rho(\epsilon(\lambda X)) \leq \epsilon\rho(\lambda X)$, y en particular, cogiendo $\epsilon = \lambda^{-1} \leq 1$, llegamos a $\rho(\lambda^{-1}\lambda X) = \rho(X) \leq \lambda^{-1}\rho(\lambda X)$, de donde obtenemos la desigualdad correspondiente.

Definición 2.10. Una medida de riesgo convexa ρ se denomina *medida de riesgo coherente* si es homogéneamente positiva.

Observación 2.11. La convexidad de una medida monetaria de riesgo ρ homogéneamente positiva es equivalente a la propiedad de

- *Subaditividad:* $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Así, toda medida de riesgo coherente es subaditiva; esta propiedad ayuda a administrar el riesgo asociado a una colección de posiciones diferentes. $\Diamond$

Veamos ahora algunas relaciones entre las medidas de riesgo convexas/coherentes y sus respectivos conjuntos de aceptación.

Proposición 2.12. *Sea ρ una medida monetaria de riesgo con conjunto de aceptación $\mathcal{A}_\rho$. Se tiene que*

(a) *ρ es una medida de riesgo convexa si, y sólo si, $\mathcal{A}_\rho$ es convexo.*

(b) *ρ es coherente si, y sólo si, $\mathcal{A}_\rho$ es un cono convexo. Además, si ρ es coherente, el conjunto $\mathcal{A}_\rho$ es cerrado.*

Ahora consideremos $\mathcal{A}$, un conjunto no vacío de $\mathcal{X}$ que satisface (2.3) *y* (2.4)*, y su medida monetaria de riesgo asociada $\rho_\mathcal{A}$. Se cumple que*

(c) *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo, $\rho_\mathcal{A}$ es una medida de riesgo convexa.*

(d) *Si $\mathcal{A}$ es un cono convexo, $\rho_\mathcal{A}$ es una medida de riesgo coherente y el conjunto $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ coincide con la clausura de $\mathcal{A}$.*

Demostración. (a) Es evidente que $\mathcal{A}_\rho$ es convexo si ρ es una medida de riesgo convexa. El recíproco se obtendrá del siguiente apartado (c), teniendo en cuenta la Observación 2.7.

(b) A través del apartado (a) deducimos la convexidad, y el apartado (c) de la Proposición 2.6 nos asegura que es homogéneamente positiva. La subaditividad, homogeneidad positiva y continuidad Lipschitz (Lema 2.3) de ρ nos aseguran que es una función convexa en $\mathcal{X}$, de manera que el conjunto $\mathcal{A}_\rho = \{X \mid \rho(X) \leq 0\}$ es cerrado.

(c) Sean $X_1,\ X_2 \in \mathcal{X}$ y $m_1,\ m_2 \in \mathbb{R}$ tales que $m_i + X_i \in \mathcal{A}$. La convexidad de $\mathcal{A}$ conlleva que, para $\lambda \in [0,1]$, $\lambda(m_1 + X_1) + (1-\lambda)(m_2 + X_2) \in \mathcal{A}$. Por la invariancia monetaria de $\rho_\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \rho_\mathcal{A}(\lambda(m_1 + X_1) + (1-\lambda)(m_2 + X_2)) \\ &= \rho_\mathcal{A}(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) - (\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2). \end{aligned}$$

de donde se deduce la convexidad de $\rho_\mathcal{A}$ cogiendo, en particular, $m_1 = \rho(X_1)$ y $m_2 = \rho(X_2)$.

(d) A través del apartado (c) deducimos la convexidad, y el apartado (c) de la Proposición 2.8 nos asegura que es homogéneamente positiva. Así, dado que $\rho_\mathcal{A}$ es coherente, por el apartado (b) obtenemos que $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ es un cono convexo cerrado; esto junto al hecho de que para cada $X \in \mathcal{A}$, también $X \in \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ puesto que $\rho_\mathcal{A}(X) \leq 0$, nos permite ver que $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}$.

$\square$

Observación 2.13. Situémonos en el contexto del apartado (d) de la proposición anterior, y observemos que, en este caso, el hecho de que $\mathcal{A}$ cumpliese la propiedad de clausura (2.5) conllevaría que $\mathcal{A}$ fuese un conjunto cerrado; en efecto, el apartado (b) de esta misma proposición nos indicaría que $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$ es cerrado, y por el apartado (b) de la Proposición 2.8 obtendríamos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}}$, lo que en particular implicaría que $\mathcal{A}$ es cerrado. $\Diamond$

2.3. Ejemplos

En este último apartado, con el objetivo de aclarar algunos de los conceptos introducidos hasta ahora, presentaremos tres ejemplos sencillos de medidas monetarias de riesgo. En todos ellos, $\mathcal{X}$ será el espacio lineal de todas las funciones medibles en un determinado espacio de medidas $(\Omega, \mathcal{F})$, y denotaremos por $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ la clase de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$[1].

Ejemplo 2.14. Consideremos la medida de riesgo $\rho_{\max}$, definida como

$$\rho_{\max}(X) = -\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

El valor $\rho_{\max}$ es la mínima cota superior de la pérdida que puede ocurrir en cualquier escenario, y por este motivo se le denomina *medida de riesgo en el peor de los casos.* El conjunto de aceptación $\mathcal{A}$ correspondiente viene dado por el cono convexo de todas las funciones no negativas de $\mathcal{X}$; por la Proposición 2.12, pues, vemos que $\rho_{\max}$ es una medida de riesgo coherente. Además, es la medida de riesgo más conservadora en el sentido en que cualquier otra medida de riesgo normalizada ρ en $\mathcal{X}$ satisface

$$\rho(X) \le \rho\left(\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)\right) = \rho_{\max}(X).$$

Notemos que $\rho_{\max}$ puede representarse mediante

$$\rho_{\max}(X) = \sup_{\mathcal{Q}\in Q} E_{\mathcal{Q}}[-X],$$

donde Q es la clase $\mathcal{M}_1$ de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. ◊

Ejemplo 2.15. Sea Q un conjunto de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$, y $\gamma : Q \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\sup_Q \gamma(\mathcal{Q}) < \infty$; esta última característica de γ permite especificar para cada $\mathcal{Q} \in Q$ un "nivel"$\gamma(\mathcal{Q})$. Supongamos que una posición X es aceptable si

$$E_{\mathcal{Q}}[X] \ge \gamma(\mathcal{Q}) \quad \forall \mathcal{Q} \in Q.$$

El conjunto $\mathcal{A}$ de estas posiciones satisface (2.3) y (2.4), y además es convexo; por la Proposición 2.12, la medida de riesgo monetaria asociada $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ es convexa, y se puede representar como

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q}\in Q}(\gamma(\mathcal{Q}) - E_{\mathcal{Q}}[X]) = \sup_{\mathcal{Q}\in Q}(E_{\mathcal{Q}}[-X] + \gamma(\mathcal{Q})).$$

◊

Ejemplo 2.16. Una *función de utilidad* en economía es una función real que pretende medir la "satisfacción" o "utilidad" de un consumidor para todas las combinaciones de posibilidades disponibles con su posición económica, tratando así de representar tanto su bienestar como sus preferencias. Para un consumidor perfectamente racional dicha función de utilidad se suele modelar mediante una función $u : S \to \mathbb{R}$ estrictamente cóncava, estrictamente creciente y continua en S.

Así, consideremos una función de utilidad u en $\mathbb{R}$, una medida de probabilidad $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1$, y fijemos un valor umbral $c \in \mathbb{R}$. Supongamos que una posición X es aceptable para nosotros si su equivalencia es c como mínimo, i.e., la esperanza de su utilidad $E_{\mathcal{Q}}[u(X)]$. está acotada inferiormente por $u(c)$. Claramente, el conjunto

$$\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} \mid E_{\mathcal{Q}}[u(X)] \ge u(c)\}$$

es no vacío, convexo y satisface (2.3) y (2.4). Por lo tanto, $\rho_{\mathcal{A}}$ es una medida de riesgo convexa por la Proposición 2.12. ◊

[1]Para revisar los conceptos de *espacio de medidas* y de *medida de probabilidad*, consultar el Apéndice A.2.

3. Medidas de riesgo convexas

En esta sección, introducidos ya los conceptos básicos de las medidas monetarias de riesgo, nos centraremos en el estudio de las medidas de riesgo convexas. Nuestro interés en esta clase de medidas reside en que verifican ese axioma de convexidad, el cual nos permite una mejor simulación de determinados comportamientos esperados del sector financiero. En los primeros dos apartados, veremos como aparecen de manera sistemática determinadas representaciones de medidas de riesgo convexas y coherentes. En el tercer apartado, introduciremos el Valor en riesgo, buscando a continuación medidas de riesgo convexas que compartan algunas de sus interesantes características. Finalmente, introduciremos la noción de invariancia en ley, propiedad que también nos interesará preservar en las medidas de riesgo convexas que consideremos más adelante, y la cual relacionaremos en la última sección con representaciones mediante integrales de Choquet respecto a distorsiones cóncavas.

El marco general de trabajo en esta sección será el siguiente: consideraremos que el espacio lineal $\mathcal{X}$ está formado por todas las funciones medibles y acotadas en un determinado espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$; así, $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach[2] si está dotado de la norma del supremo $\|\cdot\|$. Denotaremos por $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$, y por $\mathcal{M}_{1,f} := \mathcal{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F})$ el conjunto de todas las medidas finitamente aditivas[3] $\mathcal{Q} : \mathcal{F} \to [0,1]$ que están normalizadas a $\mathcal{Q}[\Omega] = 1$. Por $E_{\mathcal{Q}}[X]$ denotaremos la integral de X con respecto a $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$. Hasta que no se indique lo contrario, no supondremos que haya sido dada una cierta medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

3.1. Representación robusta

Sea $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cualquier funcional tal que

$$\inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \alpha(\mathcal{Q}) \in \mathbb{R}.$$

Para cada $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$, el funcional $X \mapsto E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha(\mathcal{Q})$ es convexo, monótono e invariante monetario en $\mathcal{X}$; estas tres propiedades se mantienen cuando aplicamos la norma del supremo sobre $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$. De esta manera, se puede definir la siguiente medida de riesgo convexa en $\mathcal{X}$

$$\rho(X) := \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \left(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha(\mathcal{Q}) \right) \tag{3.1}$$

tal que

$$\rho(0) = - \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \alpha(\mathcal{Q}).$$

Definición 3.1. Nos referiremos al funcional α como *función de penalización* de ρ en $\mathcal{M}_{1,f}$. Asimismo, diremos que ρ está *representada* por α en $\mathcal{M}_{1,f}$.

Con esta notación introducida, veremos a continuación el teorema de representación de las medidas de riesgo convexas

Teorema 3.2. *Cualquier medida de riesgo convexa en $\mathcal{X}$ es de la forma*

$$\rho(X) = \max_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \left(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) \right) \tag{3.2}$$

[2]Para revisar la definición de *espacio de Banach*, ver el Apéndice A.1.

[3]Para revisar el concepto de *medida finitamente aditiva*, consultar el Apéndice A.2.

siendo $X \in \mathcal{X}$, y donde la función de penalización $\alpha_{\min}$ viene dada por la expresión

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) := \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathcal{Q}}[-X] \quad \textit{para } \mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}. \tag{3.3}$$

Además, $\alpha_{\min}$ es la función de penalización minimal que representa ρ; cualquier otra función de penalización α para la que se cumpla (3.1) satisface que $\alpha(\mathcal{Q}) \geq \alpha_{\min}(\mathcal{Q})$ para toda $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$.

Demostración. Recordemos que, para toda $X \in \mathcal{X}$, $X' := X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$ por (2.1); así, para toda $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ se tiene que

$$0 \geq E_{\mathcal{Q}}[-X'] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = E_{\mathcal{Q}}[-X] - \rho(X) - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}).$$

De aquí podemos extraer que

$$\rho(X) \geq \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \left(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})\right) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Teniendo en cuenta este resultado, si construyéramos una cierta $\mathcal{Q}_X \in \mathcal{M}_{1,f}$ tal que, para una X dada,

$$\rho(X) \leq E_{\mathcal{Q}_X}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}_X),$$

completaríamos la demostración de la representación (3.2). Por invariancia monetaria, es suficiente demostrar esto para una cierta $X \in \mathcal{X}$ tal que $\rho(X) = 0$. Sin pérdida de generalidad, también podemos asumir que ρ está normalizada. Consideremos el conjunto convexo no vacío

$$\mathcal{B} := \{Y \in \mathcal{X} \mid \rho(Y) < 0\}.$$

Observamos que este conjunto es abierto por la continuidad Lipschitz de ρ que proporciona el Lema 2.4, y que $X \notin \mathcal{B}$; así, podemos escribir por el Teorema A.9

$$\ell(X) \leq \inf_{Y \in \mathcal{B}} \ell(Y) =: b,$$

donde ℓ es un funcional lineal no nulo y continuo en $\mathcal{X}$.

Consideremos $Y \in \mathcal{B}$, $Y \geq 0$. Por monotonía, invariancia monetaria y normalización de ρ, obtenemos que $1 + \lambda Y \in \mathcal{B}$ para cualquier $\lambda > 0$. Por lo tanto,

$$\ell(X) \leq \ell(1 + \lambda Y) = \ell(1) + \lambda \ell(Y) \quad \forall \lambda > 0,$$

independientemente de lo grande que sea λ. De aquí podemos concluir que, para $Y \geq 0$, $\ell(Y) \geq 0$.

Ahora veamos que también $\ell(1) > 0$. Ya que ℓ no es idénticamente cero, debe haber alguna Y tal que $0 < \ell(Y) = \ell(Y^+) - \ell(Y^-)$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $\|Y\| < 1$. La positividad y linealidad de ℓ implica $\ell(Y^+) > 0$ y $\ell(1 - Y^+) \geq 0$; por lo que $\ell(1) = \ell(1 - Y^+) + \ell(Y^+) > 0$.

El Teorema A.34 nos asegura una correspondencia uno a uno entre ciertas medidas finitamente aditivas μ (en particular, las de variación total finita) y los funcionales ℓ lineales y continuos en $\mathcal{X}$, lo que en particular nos permite asegurar que existe $\mathcal{Q}_X \in \mathcal{M}_{1,f}$ tal que, con los funcionales con los que estamos trabajando ($\ell(1) > 0$ y $\ell(Y) \geq 0$ si $Y \geq 0$),

$$E_{\mathcal{Q}_X}[Y] = \frac{\ell(Y)}{\ell(1)} \quad \text{para toda } Y \in \mathcal{X}$$

Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\rho$,

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}_X) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathcal{Q}_X}[-Y] \geq \sup_{Y \in \mathcal{B}} E_{\mathcal{Q}_X}[-Y] = -\frac{b}{\ell(1)}.$$

Por otro lado, $Y + \epsilon \in \mathcal{B}$ para cualquier $Y \in \mathcal{A}_\rho$ y cada $\epsilon > 0$; vemos entonces que, haciendo tender ϵ a 0, la desigualdad de la expresión anterior es en realidad una igualdad. Así,

$$E_{\mathcal{Q}_X}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}_X) = \frac{1}{\ell(1)}(b - \ell(X)) \geq 0 = \rho(X).$$

Vemos que $\mathcal{Q}_X$ es como deseábamos, i.e., hemos demostrado (3.2) tal como que queríamos.

Nos falta demostrar el último apunte del teorema para acabar. Sea α cualquier función de penalización de ρ. Entonces, para todo $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ y $X \in \mathcal{X}$

$$\rho(X) \geq E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha(\mathcal{Q}).$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{Q}) &\geq \sup_{X \in \mathcal{X}}(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \rho(X)) \\ &\geq \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho}(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \rho(X)) \\ &\geq \alpha_{\min}(\mathcal{Q}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Observaciones 3.3. (a) Si tomamos $\alpha = \alpha_{\min}$ en (3.4), entonces todas las desigualdades pasan a ser igualdades. Esto nos da una fórmula alternativa de $\alpha_{\min}$:

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{X}}(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \rho(X)). \tag{3.5}$$

(b) Supongamos que ρ definida como $\rho := \rho_{\mathcal{A}}$ para un conjunto de aceptación $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ dado. Entonces $\mathcal{A}$ determina $\alpha_{\min}$:

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} E_{\mathcal{Q}}[-X] \quad \text{para toda } \mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}.$$

(c) En ocasiones es adecuado representar una medida de riesgo convexa a través de una función de penalización que no es la minimal. Un ejemplo seria el caso en el que, mientras $\alpha_{\min}$ fuera finita para unas ciertas funciones finitamente aditivas, otra α se concentrase únicamente en medidas de probabilidad.

◊

La representación

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q} \in Q} E_{\mathcal{Q}}[-X], \quad X \in \mathcal{X}, \tag{3.6}$$

de una medida de riesgo coherente ρ a través de algún conjunto $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$ es un caso particular del teorema de representación para medidas de riesgo convexas que hemos detallado; corresponde a la función de penalización

$$\alpha(\mathcal{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{Q} \in Q, \\ +\infty & \text{contrariamente.} \end{cases}$$

El siguiente corolario demuestra que la función de penalización minimal de una medida de riesgo coherente es siempre de este tipo.

Corolario 3.4. *La función de penalización minimal α_{min} de una medida de riesgo coherente ρ toma solo los valores* 0 *y* $+\infty$. *En particular,*

$$\rho(X) = \max_{\mathcal{Q} \in Q_{max}} E_{\mathcal{Q}}[-X], \quad X \in \mathcal{X},$$

para el conjunto convexo

$$Q_{max} := \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f} \mid \alpha_{min}(\mathcal{Q}) = 0\},$$

que es el mayor conjunto con el que la representación (3.6) *es compatible.*

Demostración. Dado que el conjunto de aceptación $\mathcal{A}_\rho$ de una medida de riesgo coherente es un cono convexo (Proposición 2.12), la función de penalización minimal satisface

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathcal{Q}}[-X] = \sup_{\lambda X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X] = \lambda \alpha_{\min}$$

para todo $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ y $\lambda > 0$. Por lo tanto, $\alpha_{\min}$ solo puede tomar los valores 0 y $+\infty$. □

Nos centraremos ahora en las medidas de riesgo convexas que admiten una representación en términos de *medidas de probabilidad σ-aditivas*[4]. Una medida ρ que así lo admita puede ser representada por una función de penalización que sea infinita fuera del conjunto $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1} (E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha(\mathcal{Q})). \tag{3.7}$$

Incidimos en que, en este caso, no se puede esperar que el supremo sea alcanzado.

A continuación, comprobaremos que la representación en función de medidas de probabilidad (3.7) está relacionada con ciertas propiedades de continuidad de ρ. Estudiaremos, en primer lugar, una condición necesaria de "continuidad por arriba":

Lema 3.5. *Una medida de riesgo convexa ρ que admite una representación* (3.7) *en $\mathcal{M}_1$ es continua por arriba en el sentido de que*

$$X_n \searrow X \quad \Longrightarrow \quad \rho(X_n) \nearrow \rho(X) \tag{3.8}$$

Además, esta continuidad por arriba es equivalente a la propiedad de semicontinuidad débil con respecto a la convergencia puntual acotada: si (X_n) es una secuencia acotada en $\mathcal{X}$ que converge puntualmente en $X \in \mathcal{X}$, se tiene que

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \to +\infty} \rho(X_n). \tag{3.9}$$

Demostración. Demostraremos primero (3.9) bajo la hipótesis de que ρ admite una representación en $\mathcal{M}_1$. Por el teorema de convergencia dominada, tenemos que $E_{\mathcal{Q}}[X_n] \to E_{\mathcal{Q}}[X]$ para cada $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1$, por lo que

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1} \left(\lim_{n \to +\infty} E_{\mathcal{Q}}[-X_n] - \alpha(\mathcal{Q}) \right) \\
&\leq \liminf_{n \to +\infty} \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1} (E_{\mathcal{Q}}[-X_n] - \alpha(\mathcal{Q})) \\
&= \liminf_{n \to +\infty} \rho(X_n)
\end{aligned}$$

[4]Para revisar la propiedad de *σ-aditividad*, revisar el Apéndice A.2.

Centrémonos ahora en demostrar la equivalencia. Supongamos primero que se cumple (3.9); por monotonía, $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ para cada n si $X_n \searrow X$, de donde podemos concluir que $\rho(X_n) \nearrow \rho(X)$.

Ahora supongamos la contiduidad por arriba. Sea (X_n) una secuencia acotada en $\mathcal{X}$ que converge puntualmente en X. Definimos $Y_m := \sup_{n\geq m} X_n \in \mathcal{X}$, y observamos que Y_m decrece P-c.s. (casi seguramente en probabilidad) hacia X. Como $X_n \leq Y_n$, por monotonía $\rho(X_n) \geq \rho(Y_n)$, y (3.8) nos conduce a

$$\liminf_{n\to+\infty} \rho(X_n) \geq \lim_{n\to+\infty} \rho(Y_n) = \rho(X).$$

□

En la siguiente proposición encontraremos una condición suficiente fuerte que garantiza que cualquier función de penalización de ρ está concentrada en $\mathcal{M}_1$. No obstante, antes presentaremos un lema necesario para la demostración de dicha proposición.

Lema 3.6. *Sea ρ una medida de riesgo convexa en $\mathcal{X}$ representada por una función de penalización α en $\mathcal{M}_{1,f}$. Consideramos los conjuntos de nivel siguientes*

$$\Lambda_c := \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f} \mid \alpha(\mathcal{Q}) \leq c\}, \quad \textit{para } c > -\rho(0) = \inf_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_{1,f}} \alpha(\mathcal{Q}).$$

Para cualquier secuencia (X_n) en $\mathcal{X}$ tal que $0 \leq X_n \leq 1$, las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $\rho(\lambda X_n) \longrightarrow \rho(\lambda) \quad \forall\lambda \geq 1.$

(b) $\inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[X_n] \longrightarrow 1 \quad \forall c > -\rho(0)$

Demostración. (a)⇒(b): En un primer paso mostraremos que, para toda $Y \in \mathcal{X}$

$$\inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[Y] \geq -\frac{c+\rho(\lambda Y)}{\lambda} \quad \forall\lambda > 0 \tag{3.10}$$

Puesto que α representa a ρ, para $\mathcal{Q} \in \Lambda_c$ vemos que

$$c \geq \alpha(\mathcal{Q}) \geq E_{\mathcal{Q}}[-\lambda Y] - \rho(\lambda Y) \overset{\cdot(-\frac{1}{\lambda})}{\longrightarrow} E_{\mathcal{Q}}[Y] \geq -\frac{c+\rho(\lambda Y)}{\lambda}$$

de donde se comprueba (3.10).

Consideremos ahora una secuencia (X_n) que satisfaga (a); a través de (3.10) obtenemos que, para todo $\lambda \geq 1$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[X_n] \geq -\lim_{n\to+\infty} \frac{c+\rho(\lambda X_n)}{\lambda} = -\frac{c+\rho(\lambda)}{\lambda} = 1 - \frac{c+\rho(0)}{\lambda}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la invariancia monetaria con $\rho(\lambda) = \rho(0+\lambda)$. Cogiendo $\lambda \to +\infty$ y suponiendo $X_n \leq 1$, comprobamos que se cumple (b).

(b)⇒(a): Es fácil ver por monotonía que, $\forall\lambda \geq 1$ y $\forall n$,

$$\rho(\lambda) \leq \rho(\lambda X_n) = \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_{1,f}} (E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] - \alpha(\mathcal{Q})) \quad \Rightarrow \quad \alpha(\mathcal{Q}) \leq E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] - \rho(\lambda)$$

Dado que $E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] = -\lambda E_{\mathcal{Q}}[X_n] \leq 0$ para toda $\mathcal{Q}$, ya que $X_n \leq 1$ $\forall n$, solo contribuirán en el cálculo del supremo aquellas $\mathcal{Q}$ tales que

$$\alpha(\mathcal{Q}) \leq E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] - \rho(\lambda) \leq 1 - \rho(\lambda) = 1 + \lambda - \rho(0) =: c.$$

Con esta definición de c, Λ_c es el conjunto que contiene todas las $\mathcal{Q}$ que contribuyen. Así,

$$\rho(\lambda X_n) = \sup_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} \left(E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] - \alpha(\mathcal{Q})\right) \quad \forall n$$

Por la condición (b), $\sup_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[-\lambda X_n] = -\lambda \inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[X_n] \longrightarrow -\lambda$ uniformemente, de modo que tenemos en efecto que (a) se cumple. $\square$

Proposición 3.7. *Sea ρ una medida de riesgo convexa que es continua por abajo en el sentido en que*

$$X_n \nearrow X \quad \Longrightarrow \quad \rho(X_n) \searrow \rho(X)$$

y supongamos que α es una función de penalización cualquiera en $\mathcal{M}_{1,f}$ que representa a ρ. Entonces, α está concentrada en la clase de medidas de probabilidad $\mathcal{M}_1$, i.e.,

$$\alpha(\mathcal{Q}) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{Q} \textit{ es } \sigma\textit{-aditiva}$$

Demostración. Recordemos que $\mathcal{Q}$ es σ-aditiva si, y sólo si, $\mathcal{Q}[A_n] \nearrow 1$ para cualquier secuencia creciente de eventos $A_n \in \mathcal{F}$ tal que $\bigcup_n A_n = \Omega$. Así, tomando $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$, consideremos la secuencia (X_n), que en particular cumple $0 \leq X_n \leq 1$. Sea $\lambda \geq 1$; como ρ es continua por abajo y $\lambda X_n \nearrow \lambda$, tenemos que $\rho(\lambda X_n) \to \rho(\lambda)$. Por lo tanto, se cumple la condición (a) del Lema 3.6. Dicho lema nos garantiza, pues, que para los conjuntos de nivel Λ_c definidos en su enunciado, también se cumple que, $\forall c < \infty$, $\inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} E_{\mathcal{Q}}[X_n] = \inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} \int \mathbb{I}_{A_n} d\mathcal{Q} = \inf_{\mathcal{Q}\in\Lambda_c} \mathcal{Q}(A_n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\Omega) = 1$, i.e., $\mathcal{Q}$ es σ-aditiva. $\square$

Así, esta última proposición nos permite establecer como criterio que nos asegure que una medida de riesgo convexa pueda representarse en términos de medidas de probabilidad σ-aditivas la propiedad de continuidad por abajo. Además, como reflejamos en la siguiente observación, toda medida de riesgo convexa continua por abajo es también continua por arriba:

Observación 3.8. Sea ρ una medida de riesgo convexa continua por abajo. Por la Proposición 3.7 junto con el Lema 3.5, se puede ver que ρ también es continua por arriba. De aquí concluimos que $\rho(X_n) \to \rho(X)$ para cualquier secuencia (X_n) acotada que converja puntualmente a X. $\Diamond$

3.2. Representación en L^∞

De aquí en adelante, fijaremos una medida de probabilidad P en $(\Omega, \mathcal{F})$ y consideraremos medidas de riesgo ρ tales que

$$\rho(X) = \rho(Y) \quad \text{si } X = Y \text{ } P\text{-c.s.} \tag{3.11}$$

Notemos que los conjuntos nulos de P tendrán especial relevancia.

Lema 3.9. *Sea ρ una medida de riesgo convexa que satisface* (3.11) *y que viene representada por una cierta función de penalización como en* (3.1)*. Entonces, $\alpha(\mathcal{Q}) = +\infty$ para cualquier $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F})$ que no sea absolutamente continua*[5] *respecto a P.*

[5]Para revisar esta relación entre medidas, consultar el Apéndice A.2.

Demostración. Si $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ no es absolutamente continua respecto a P, entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{Q}[A] > 0$ pero $P[A] = 0$. Tomamos cualquier $X \in \mathcal{A}_\rho$, y definimos $X_n := X - n\mathbb{I}_A$. Debido a que $P[A] = 0$, $\rho(X_n) = \rho(X)$, por lo que X_n también está contenida en $\mathcal{A}_\rho$. Así,

$$\alpha(\mathcal{Q}) \geq \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) \geq E_{\mathcal{Q}}[-X_n] = E_{\mathcal{Q}}[-X] + n \int \mathbb{I}_A d\mathcal{Q} = E_{\mathcal{Q}}[-X] + n\mathcal{Q}[A] \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$$

□

Atendiendo a (3.11), podemos llegar a identificar $\mathcal{X}$ con el espacio de Banach $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$[6]. Denotaremos por $\mathcal{M}_1(P) := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ que son absolutamente continuas con respecto a P.

El siguiente teorema caracteriza a toda medida de riesgo convexa en L^∞ que puede ser representada por una función de penalización concentrada en medidas de probabilidad; en particular, por el Lema 3.9, esta función estará concentrada en $\mathcal{M}_1(P)$.

Teorema 3.10. *Supongamos que $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo convexa. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *ρ puede ser representada por alguna función de penalización en $\mathcal{M}_1(P)$.*

(b) *ρ puede ser representada por la restricción de la función de penalización minimal $\alpha_{\min}$ en $\mathcal{M}_1(P)$*

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)} (E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})), \quad X \in L^\infty. \tag{3.12}$$

(c) *ρ es continua por arriba: $X_n \searrow X$ $P - c.s. \Rightarrow \rho(X_n) \nearrow \rho(X)$*

(d) *ρ tiene la "propiedad de Fatou": para cualquier secuencia (X_n) que converja P-c.s. a alguna X,*

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to+\infty} \rho(X_n).$$

(e) *ρ es semicontinua inferiormente considerando la topología débil* $\sigma(L^\infty, L^1)$[7].*

(f) *El conjunto de aceptación $\mathcal{A}_\rho$ de ρ es débilmente* cerrado en L^∞; es decir, $\mathcal{A}_\rho$ es cerrado con respecto a la topología $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Demostración. (f)⇒(b): Sea

$$m = \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)} (E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})) \, . \tag{3.13}$$

para una $X \in L^\infty$ fijada. Recordando el Teorema 3.2, necesitamos demostrar que $m \geq \rho(X)$ o, lo que es lo mismo, que $m+X \in \mathcal{A}_\rho$. Procederemos por reducción al absurdo: supongamos que $m+X \notin \mathcal{A}_\rho$. Ya que, por suposición, el conjunto no vacío $\mathcal{A}_\rho$ es débilmente* cerrado, podemos aplicar el Teorema A.12 en el espacio localmente convexo[8] $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ considerando $\mathcal{C} := \mathcal{A}_\rho$ y $\mathcal{B} := \{m+X\}$, con lo que obtenemos un funcional continuo y lineal ℓ en $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ tal que

$$\beta := \inf_{Y\in\mathcal{A}_\rho} \ell(Y) > \ell(m + X) =: \gamma > -\infty. \tag{3.14}$$

[6]Descripción de los espacios L^p en el Apéndice A.1.
[7]Para revisar definición y algunas propiedades de la *topología débil**, consultar Apéndice A.1.
[8]Para revisar la definición de *espacio localmente convexo*, consultar el Apéndice A.1.

Sea $\ell(Y) = E[YZ] = \int YZdP$ para algún $Z \in L^1$. Veamos, primero, que $Z \geq 0$. Para ello, fijamos $Y \geq 0$; por monotonía, $\rho(\lambda Y) \leq \rho(0)$ para $\lambda \geq 0$. Entonces, como $\lambda Y + \rho(0) \in \mathcal{A}_\rho$ para todo $\lambda \geq 0$, tenemos que

$$-\infty < \gamma < \ell(\lambda Y + \rho(0)) = \lambda\ell(Y) + \ell(\rho(0)).$$

Cogiendo $\lambda \to +\infty$ llegamos a que $\ell(Y) \geq 0$, lo que a la vez implica que $Z \geq 0$; además, dado que ℓ no es idénticamente nula, tenemos que $P[Z > 0] > 0$. Así,

$$\frac{d\mathcal{Q}_0}{dP} := \frac{Z}{E[Z]}$$

define una medida de probabilidad $\mathcal{Q}_0 \in \mathcal{M}_1(P)$. Por (3.14):

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}_0) = \sup_{Y \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathcal{Q}_0}[-Y] = -\inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \int Y d\mathcal{Q}_0 = -\frac{1}{E[Z]} \inf_{Y \in \mathcal{A}_\rho} \int YZdP = -\frac{\beta}{E[Z]}.$$

No obstante,

$$E_{\mathcal{Q}_0}[X] + m = \int (X+m)\left(\frac{Z}{E[Z]}dP\right) = \frac{\ell(m+X)}{E[Z]} = \frac{\gamma}{E[Z]} < \frac{\beta}{E[Z]} = -\alpha_{\min}(\mathcal{Q}_0),$$

que contradice nuestra hipótesis de entrada (3.13). Por lo tanto, $m + X \in \mathcal{A}_\rho$, y queda demostrada la implicación.

(b)$\Rightarrow$(a): Trivial.

(a)$\Rightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d): Se demuestra igual que el Lema 3.5, cambiando convergencia puntual por convergencia P-c.s..

(c)$\Rightarrow$(e): Esta implicación la podemos demostrar viendo que $\mathcal{C} := \{\rho \leq c\}$ es debilmente* cerrado para $c \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C}_r := \mathcal{C} \cap \{X \in L^\infty \mid \|X\|_\infty \leq r\}$ para $r > 0$. Si (X_n) es una secuencia en $\mathcal{C}_r$ que converge en L^1 a una variable aleatoria X, entonces hay una subsecuencia que converge P-c.s., y la propiedad de Fatou de ρ implica que $X \in \mathcal{C}_r$. Así, $\mathcal{C}_r$ es cerrado en L^1, y por el Lema A.21 se tiene que $\mathcal{C} := \{\rho \leq c\}$ es débilmente* cerrado.

(e)$\Rightarrow$(f): Directa por la definición de $\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^\infty \mid \rho(X) \leq 0\}$. □

Para el caso particular de las medidas de riesgo coherentes, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.11. *Una medida de riesgo coherente en L^∞ se puede representar por un conjunto $Q \subset \mathcal{M}_1(P)$ si, y sólo si, se satisfacen las condiciones equivalentes del Teorema 3.10. En este caso, el subconjunto maximal que representa a $\mathcal{M}_1(P)$ viene dado por*

$$Q_{\max} := \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P) \mid \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = 0\}.$$

Demostración. Es totalmente análoga a la demostración del Corolario 3.4. □

El Teorema 3.10 nos muestra cómo se expresa cualquier medida de riesgo convexa ρ, continua por arriba, en L^∞: se consideran todos los modelos probabilísticos $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$, teniendo en cuenta que cada uno de ellos tiene una mejor o peor consideración dependiendo de la función de penalización α escogida; así, el valor de $\rho(X)$ se calcula a partir del peor de los casos, sobre todos esos modelos $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$, de la pérdida esperada $E_\mathcal{Q}[-X]$ reducida por $\alpha(\mathcal{Q})$.

También incluiremos una caracterización de aquellas medidas de riesgo coherentes en L^∞ que son continuas por abajo:

Corolario 3.12. *Para una medida de riesgo coherente en L^∞ las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *ρ es continua por abajo: $X_n \nearrow X \Rightarrow \rho(X_n) \searrow \rho(X)$.*

(b) *Existe un conjunto $Q \subset \mathcal{M}_1(P)$ que representa a ρ en el cual el supremo se alcanza*

$$\rho(X) = \max_{\mathcal{Q} \in Q} E_{\mathcal{Q}}[-X] \quad \forall X \in L^\infty.$$

(c) *Existe un conjunto $Q \subset \mathcal{M}_1(P)$ que representa a ρ tal que el conjunto de densidades $\mathcal{D} := \{d\mathcal{Q}/dP \mid \mathcal{Q} \in Q\}$ es compacto débil en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Demostración. (c)$\Rightarrow$(a): Es consecuencia del *Lema de Dini*: en un conjunto compacto, una secuencia de funciones continuas f_n crecientes hacia una cierta función f converge uniformemente. Si lo aplicamos a la secuencia $\rho(X_n)$ en el conjunto $\mathcal{D}$, obtenemos que $\rho(X_n) \searrow \rho(X)$.

(a)$\Rightarrow$(b): Es fácil comprobar esta implicación a través del Corolario 3.4 y la Proposición 3.7.

(b)$\Rightarrow$(c): Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\mathcal{D}$ es compacto débil en L^1. Para cualquier $X \in L^\infty$, el funcional J_X lineal y continuo en L^1 definido según $J_X := E[XZ]$ alcanza su ínfimo en $\mathcal{D}$; de acuerdo con el Teorema de James A.22, esto implica que $\mathcal{D}$ es compacto. $\square$

Para finalizar con este apartado, presentaremos dos ejemplos de medidas de riesgo coherentes en L^∞, las cuales aparecerán en el apartado siguiente:

Ejemplo 3.13. Consideremos la *medida de riesgo en el peor de los casos* $\rho_{\max}$ introducida en el Ejemplo 2.14; bajo la condición (3.11) que hemos impuesto en este apartado, podemos expresar $\rho_{\max}$ en términos del ínfimo esencial[9] de X:

$$\rho_{\max}(X) := -\text{ess inf } X = \inf \{m \in \mathbb{R} \mid X + m \geq 0 \ P - \text{c.s.}\}.$$

Es fácil comprobar que $\rho_{\max}$ es coherente, así como que cumple la propiedad de Fatou. Además, su conjunto de aceptación es igual al cono positivo L^∞_+ en L^∞, lo cual implica que $\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = 0$ para toda $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$. Así,

$$\rho_{\max}(X) = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)} E_{\mathcal{Q}}[-X].$$

Fijémonos en que el supremo no puede reemplazarse por un máximo si el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no puede reducirse a un modelo finito; si tomamos una $X \in L^\infty$ tal que X no alcance su ínfimo esencial, efectivamente no puede haber ninguna $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$ tal que $E_{\mathcal{Q}}[X] = \text{ess inf } X = -\rho_{\max}$. $\Diamond$

Ejemplo 3.14. Tomemos por Q la clase de todas las distribuciones condicionadas $P[\,\cdot\,|A]$ tales que $A \in \mathcal{F}$ cumple que $P[A] > \lambda$ para algún nivel fijado $\lambda \in (0,1)$. Entonces, la clase Q induce la siguiente medida de riesgo coherente

$$WCE_\lambda(X) := \sup \{E[-X \mid A] \mid A \in \mathcal{F},\ P[A] > \lambda\},$$

que recibe el nombre de *peor esperanza condicionada* al nivel λ. $\Diamond$

[9] Para revisar las definiciones de *supremo* e *ínfimo esenciales*, consultar el Apéndice A.3.

3.3. Valor en riesgo

Una manera común de afrontar la medición del riesgo de una posición financiera X consiste en especificar un cuantil de la distribución de X bajo la medida de probabilidad P dada. Para un determinado $\lambda \in (0,1)$, un λ-cuantil de una variable aleatoria X en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es cualquier $q \in \mathbb{R}$ con la propiedad

$$P[X \leq q] \geq \lambda \quad \text{y} \quad P[X < q] \leq \lambda.$$

El conjunto de todos los λ-cuantiles de X es un intervalo $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$, donde

$$\begin{aligned} q_X^-(t) &= \sup\{x \mid P[X < x] < t\} = \inf\{x \mid P[X \leq x] \geq t\} \\ q_X^+(t) &= \inf\{x \mid P[X \leq x] > t\} = \sup\{x \mid P[X < x] \leq t\} \end{aligned}$$

son las funciones cuantil[10] de X inferior y superior, respectivamente. En este apartado, nos centraremos en las propiedades de $q_X^+(\lambda)$, visto como un funcional en un espacio $\mathcal{X}$ de posiciones financieras.

Definición 3.15. Fijado $\lambda \in (0,1)$, definimos el *Valor en riesgo (Value at Risk) a nivel* λ de una posición financiera X como

$$V@R_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) = \inf\{m \mid P[X + m < 0] \leq \lambda\}. \tag{3.15}$$

En el contexto financiero, $V@R_\lambda(X)$ es la menor cantidad de capital que, añadida a X e invertida sin riesgo, mantiene la probabilidad de obtener un resultado financiero negativo por debajo del nivel λ. Sin embargo, el Valor en riesgo sólo controla la probabilidad de una pérdida; no capta el tamaño de dicha pérdida en caso de que se produzca.

Observación 3.16. $V@R_\lambda$ es una medida monetaria de riesgo positivamente homogénea en $\mathcal{X} = L^0$. Además, en general no es una medida de riesgo convexa: puede penalizar la diversificación. $\diamondsuit$

Una vez introducido el relevante concepto de Valor en riesgo, nuestro objetivo ahora es intentar encontrar medidas de riesgo convexas (e incluso coherentes) en $\mathcal{X} := L^\infty$ que se acerquen a $V@R_\lambda$. Para alcanzarlo, podríamos plantearnos de entrada encontrar la mínima medida de riesgo convexa, continua por arriba, que domine a $V@R_\lambda$; no obstante, la siguiente proposición nos muestra que ésta no existe.

Proposición 3.17. *Para cada $X \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in (0,1)$*

$$V@R_\lambda(X) = \min\{\rho(X) \mid \rho \textit{ es convexa, continua por arriba y } \geq V@R_\lambda\}.$$

Demostración. Sea $q := -V@R_\lambda(X) = q_X^+(\lambda)$, de manera que $P[X < q] \leq \lambda$. Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $P[A] > \lambda$, en particular $P[A \cap \{X \geq q\}] > 0$. Esto nos permite definir la siguiente medida $\mathcal{Q}_A$

$$\mathcal{Q}_A := P[\,\cdot \mid A \cap \{X \geq q\}].$$

Dado que, para todo conjunto $B \in \mathcal{F}$, solo contribuyen a que $\mathcal{Q}_A(B) \neq 0$ determinados subconjuntos de $\{X \geq q\}$, es fácil ver que $E_{\mathcal{Q}_A}[-X] \leq -q = V@R_\lambda(X)$.

Consideremos ahora $Q := \{\mathcal{Q}_A \mid P[A] > \lambda\}$, mediante la cual definimos la siguiente medida de riesgo coherente

$$\rho(Y) := \sup_{\mathcal{Q} \in Q} E_{\mathcal{Q}}[-Y].$$

[10]Para revisar definición y propiedades de las *funciones cuantil*, consultar el Apéndice A.3.

Tenemos entonces que $\rho(X) \leq V@R_\lambda(X)$. Para ver la igualdad que buscamos, mostraremos a continuación que $\rho(Y) \geq V@R_\lambda(Y)$ para cada $Y \in \mathcal{X}$. Sea $A := \{Y \leq -V@R_\lambda(Y) + \epsilon\}$ con $\epsilon > 0$. Tenemos entonces que $q_Y^+(\lambda) < q_Y^+(\lambda) + \epsilon = -V@R_\lambda(Y) + \epsilon$, lo que por la definición de la función cuantil superior nos asegura que $P[A] > \lambda$, ergo $\mathcal{Q}_A \in Q$. Trivialmente, $\mathcal{Q}_A[A] = 1$. Aplicando ρ a los elementos de A tenemos

$$\rho(Y) \geq E_{\mathcal{Q}_A}[-Y] \geq V@R_\lambda(Y) - \epsilon.$$

La arbitrariedad de ϵ nos garantiza el resultado que queríamos atendiendo al caso en que $\epsilon \to 0$. □

Así pues, viendo que el planteamiento anterior no nos conduce a ningún lado, buscaremos medidas de riesgo convexas cercanas a $V@R_\lambda$ de otro modo. En particular, nos centraremos en la siguiente medida de riesgo, definida a partir del Valor en riesgo, que sí satisface los axiomas de medida de riesgo coherente:

Definición 3.18. El *Valor en riesgo promedio (Average Value at Risk) a nivel* $\lambda \in (0, 1]$ de una posición $X \in \mathcal{X}$ viene dado por la siguiente expresión:

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\gamma(X)d\gamma = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X(t)dt.$$

donde la última identidad es cierta debido a que, para toda función cuantil q_X, por el Lema A.37 $q_X^+ = q_X$ casi en todas partes. En particular, la definición de $AV@R_\lambda(X)$ tiene sentido para toda $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Además, teniendo en cuenta el Lema A.39:

$$AV@R_1(X) = -\int_0^1 q_X^+(t)dt = E[-X].$$

Observaciones 3.19. (a) En ocasiones, el Valor en riesgo promedio también recibe el nombre de "Valor en riesgo condicionado"(*Conditional Value at Risk*, $CV@R_\lambda$) o de "Déficit esperado"(*Expected shortfall*, ES_λ). No obstante, estos dos nuevos términos pueden llevar a confusión: el primero puede entenderse como el Valor en riesgo con respecto a una distribución condicionada, y el segundo puede verse como el valor esperado del déficit X^-.

(b) Para $X \in L^\infty$ tenemos

$$\lim_{\lambda \to 0} V@R_\lambda(X) = -\text{ess inf } X = \inf\{m \mid P[X + m < 0] \leq 0\}.$$

Así, tiene sentido definir

$$AV@R_0(X) := V@R_0(X) := -\text{ess inf } X$$

que corresponde a la medida en el peor de los casos en L^∞ vista en el Ejemplo 3.13.

◊

Lema 3.20. *Para $\lambda \in (0, 1)$ y cualquier λ-cuantil q de X,*

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}E[(q - X)^+] - q \tag{3.16}$$

Demostración. Sea q_X una función cuantil con $q_X(\lambda) = q$. Por el Lema A.39, X sigue la misma distribución que $q_X(U(0,1))$, y por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda}E[(q-X)^+] - q = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (q - q_X(t))^+ dt - q = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X(t)dt = AV@R_\lambda(X),$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que $q_X(t) \leq q \Leftrightarrow t \leq \lambda$. □

Teorema 3.21. *Para $\lambda \in (0,1]$, $AV@R_\lambda$ es una medida de riesgo coherente que es continua por abajo con representación:*

$$AV@R_\lambda(X) = \max_{\mathcal{Q}\in Q_\lambda} E_{\mathcal{Q}}[-X], \quad X \in \mathcal{X} \tag{3.17}$$

donde Q_λ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad $\mathcal{Q}$ absolutamente continuas con respecto a P ($\mathcal{Q} \ll P$) cuya densidad $d\mathcal{Q}/dP$ está acotada por $1/\lambda$ P-c.s.

Demostración. Para $\lambda = 1$, como $Q_1 = \{P\}$, vemos que se cumple. Sea ahora $0 < \lambda < 1$, y consideremos la medida de riesgo coherente $\rho_\lambda(X) := \sup_{\mathcal{Q}\in Q_\lambda} E_{\mathcal{Q}}[-X]$. Primero asumiremos que $X < 0$. Definimos una medida $\tilde{P}$ equivalente a P ($\tilde{P} \approx P$) a partir de $d\tilde{P}/dP = X/E[X]$, y tomamos la densidad $d\mathcal{Q}/dP = \lambda^{-1}\varphi$ para $0 \leq \varphi \leq 1$. Así,

$$\begin{aligned}\rho_\lambda(X) &= \sup_{\mathcal{Q}\in Q_\lambda} \int (-X)d\mathcal{Q} = E[-X]\sup_{\mathcal{Q}\in Q_\lambda}\int \frac{d\tilde{P}}{dP}d\mathcal{Q} \\ &= \frac{E[-X]}{\lambda}\sup\{\tilde{E}[\varphi] \mid 0 \leq \varphi \leq 1,\ E[\varphi] = \lambda\}.\end{aligned}$$

Fijemonos en que la condición $E[\varphi] = \lambda$ de la expresión anterior, dado que estamos calculando el supremo y la esperanza monótonamente creciente, puede ser substituida por $E[\varphi] \leq \lambda$; de esta manera, estamos en condiciones de aplicar el lema de Neyman-Pearson en la forma del Teorema A.30, apartado (b): cogiendo q un λ-cuantil de X bajo P, podemos definir

$$\varphi_0 = \mathbb{I}_{\{X<q\}} + \kappa\mathbb{I}_{\{X=q\}} \quad \text{con } \kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } P[X=q] = 0, \\ \frac{\lambda - P[X<q]}{P[X=q]} & \text{contrariamente.}\end{cases},$$

para el cual $\int \varphi_0 dP = E[\varphi_0] = \lambda$, i.e. para el cual el supremo se alcanza. Por lo tanto,

$$\rho_\lambda(X) = \frac{E[-X]}{\lambda}\tilde{E}[\varphi_0] = \frac{-E[X]}{\lambda}\int \varphi_0\left(\frac{X}{E[X]}dP\right) = \frac{1}{\lambda}E[-X\varphi_0].$$

Dado que $d\mathcal{Q}_0 = \lambda^{-1}\varphi_0 dP$ define una medida de probabilidad en Q_λ, deducimos finalmente que

$$\begin{aligned} p_\lambda &= \max_{\mathcal{Q}\in Q_\lambda} E_{\mathcal{Q}}[-X] = E_{\mathcal{Q}_0}[-X] = \frac{1}{\lambda}\int -X\varphi_0 dP \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\int -X\mathbb{I}_{\{X<q\}}dP - \kappa q P[X=q]\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(E[-X; X<q] - q\lambda + qP[X<q]) \\ &= \frac{1}{\lambda}(E[q-X; X<q] - q\lambda) = \frac{1}{\lambda}E[(q-X)^+] - q \\ &= AV@R_\lambda(X), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el resultado del Lema 3.20 en la última igualdad. Esto demuestra (3.17) para $X < 0$. Podemos generalizar para cualquier $X \in L^\infty$ utilizando la propiedad de invariancia monetaria que satisfacen tanto ρ_λ como $AV@R_\lambda$. □

Observación 3.22. Se puede ver que el conjunto Q_λ coincide con el conjunto maximal Q_{max} definido en el Corolario 3.11 para toda medida de riesgo coherente en L^∞. $\Diamond$

Corolario 3.23. *Tenemos que, para toda $X \in \mathcal{X}$,*

$$\begin{aligned} AV@R_\lambda(X) &\geq WCE_\lambda(X) \\ &\geq E[-X \mid -X \geq V@R_\lambda(X)] \\ &\geq V@R_\lambda(X), \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde WCE_λ es la medida de riesgo coherente definida en el Ejemplo 3.14.

Demostración. Si $P[A] \geq \lambda$, la densidad $P[\,\cdot \mid A]$ con respecto a P está acotada por el valor $1/\lambda$; el Teorema 3.21 nos asegura directamente que $AV@R_\lambda$ domina a WCE_λ. Nos centramos ahora en la segunda inecuación; ya que, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P[-X \geq V@R_\lambda(X) - \epsilon] = P[X \leq q_X^+(\lambda) + \epsilon] > \lambda$$

tenemos que, por la definición de WCE_λ,

$$WCE_\lambda(X) \geq E[-X \mid -X \geq V@R_\lambda - \epsilon].$$

Tendiendo ϵ a 0, ya la tenemos. La tercera es evidente debido a que la esperanza es monótonamente creciente. $\square$

Como es lógico, hemos dedicado un apartado entero al estudio del Valor en riesgo y del Valor en riesgo promediado porque ambas medidas son especialmente relevantes. Mientras la importancia de la primera de ellas reside en que es probablemente la más utilizada en el sector financiero reciente, lo destacado del Valor en riesgo promediado va mucho más allá: acaba siendo un pilar fundamental en la teoría y desarrollo de determinadas medidas de riesgo muy interesantes, como veremos en el siguiente apartado y en posteriores secciones.

3.4. Medidas de riesgo invariantes en ley

Como ya hemos visto, $V@R_\lambda$ y $AV@R_\lambda$ cumplen que solo dependen de la distribución de una posición respecto a la medida de probabilidad P dada. En este apartado estudiaremos con detalle la clase de medidas de riesgo convexas que comparten esta propiedad de invariancia en ley.

Definición 3.24. Una medida monetaria de riesgo ρ en $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice que es *invariante en ley* si cumple la siguiente propiedad

- *Invariancia en ley:* $\rho(X) = \rho(Y)$ siempre que X e Y tengan la misma distribución respecto a P.

En nuestro marco de trabajo añadiremos, a partir de ahora, la suposición de que estamos trabajando en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suficientemente rico en el sentido de que admite variables aleatorias con distribuciones continuas. Por la Proposición A.45, esta condición se satisface si, y sólo si, dicho espacio de probabilidad no tiene átomos[11].

A continuación, formularemos un primer teorema de estructura para medidas de riesgo convexas invariantes en ley, precedido por un lema necesario en la demostración de éste.

[11] Tal como se detalla en la Definición A.44, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no contiene átomos si no existe ningún conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que, si $P[A] > 0$, $P[B] = 0$ o $P[A] = P[B]$ para cualquier $B \in \mathcal{F}$ subconjunto de A.

Lema 3.25. *Para $X \in L^\infty$ e $Y \in L^1$,*

$$\int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt = \sup_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y],$$

donde $\tilde{X} \sim X$ indica que $\tilde{X}$ es una variable aleatoria con la misma ley que X.

Demostración. A partir de las desigualdades de Hardy-Littlewood (concretamente la desigualdad superior del Teorema A.43), obtenemos que se cumple "$\geq$" en la expresión del lema. Así, nos queda ver la desigualdad contraria para finalizar la demostración.

Consideremos el conjunto $D = \{y \mid P[Y = y] > 0\}$. Además, dado que estamos suponiendo que el espacio de probabilidad no tiene átomos, por la Proposición A.45 podemos coger una variable aleatoria $Z \in L^1_+$ con distribución continua. Veamos que la ley de

$$Y_n := Y + \frac{1}{n} Z\mathbb{I}_{\{Y\in D\}}$$

es continua; en efecto, para cualquier y,

$$P[Y_n = y] = P[Y = y,\ Y \notin D] + \sum_{x\in D} P[Y = x,\ Z = n(y - x)] = 0.$$

De este modo, por el Lema A.41, $U_n := F_{Y_n}(Y_n)$ sigue una distribución uniforme en $(0, 1)$, y además $X_n := q_X(U_n)$ sigue la misma distribución que X; también nos fijamos en que, por el Lema A.39, $\tilde{X} := q_X(U) \sim X$. Añadiendo una constante adecuada a X, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X \geq 0$. Como $Y_n \geq Y$, tenemos que $q_{Y_n} \geq q_Y$ casi en todas partes. Así pues, finalmente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 q_X(t)q_{Y_n}(t)dt \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \sup_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y_n] = \sup_{\tilde{X}\sim X} E[\tilde{X}Y],\end{aligned}$$

justo como queríamos ver, y donde la última identidad se deduce del hecho de que $|E[\tilde{X}Y_n] - E[\tilde{X}Y]| \leq \frac{1}{n}\|Z\|_1\|X\|_\infty$ para toda $\tilde{X} \sim X$. En el caso particular en que Y siga una distribución continua, dado que entonces $Y_n = Y$, es fácil ver que $E[\tilde{X}Y] = \int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt$. □

Teorema 3.26. *Sea ρ una medida de riesgo convexa y supongamos que es continua por arriba. Entonces ρ es invariante en ley si, y solo si, su función de penalización minimal $\alpha_{\min}(\mathcal{Q})$ depende únicamente de la ley $\varphi_\mathcal{Q} := d\mathcal{Q}/dP$ respecto a P cuando $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$. En este caso, ρ se representa como*

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)} \left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_\mathcal{Q}}(t)dt - \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) \right)$$

y la función de penalización cumple

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_\mathcal{Q}}(t)dt = \sup_{X\in L^\infty} \left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_\mathcal{Q}}(t)dt - \rho(X) \right). \tag{3.19}$$

Demostración. Supongamos primero que ρ es invariante en ley; entonces $X \in \mathcal{A}_p$ implica que $\tilde{X} \in \mathcal{A}_\rho$ para toda $\tilde{X} \sim X$, y por lo tanto

$$\alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} E[-X\varphi_\mathcal{Q}] = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \sup_{\tilde{X}\sim X} E[-\tilde{X}\varphi_\mathcal{Q}] = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_\mathcal{Q}}(t)dt,$$

donde en la última identidad hemos usado el Lema 3.25. Podemos ver como, efectivamente, $\alpha_{\min}(\mathcal{Q})$ depende exclusivamente de la ley de $\varphi_{\mathcal{Q}}$. Para demostrar la segunda identidad en (3.19), fijémonos en que, por una parte, $\tilde{X} := X + \rho(X)$ pertenece al conjunto $\mathcal{A}_\rho$ para cualquier $X \in L^\infty$, y por otra podemos identificar $q_{-X} - \rho(X)$ como una función cuantil de $-\tilde{X}$ gracias al Lema A.42. De esta manera,

$$\begin{aligned}\sup_{X\in L^\infty}\left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_{\mathcal{Q}}}(t)dt - \rho(X)\right) &= \sup_{X\in L^\infty}\left(\int_0^1 (q_{-X}(t)-\rho(X))q_{\varphi_{\mathcal{Q}}}(t)dt\right)\\ &= \sup_{\tilde{X}\in\mathcal{A}_\rho}\left(\int_0^1 q_{-\tilde{X}}(t)q_{\varphi_{\mathcal{Q}}}(t)dt\right).\end{aligned}$$

Vayamos ahora a por el recíproco: supongamos que $\alpha_{\min}(\mathcal{Q})$ solo depende de la ley de $\varphi_{\mathcal{Q}}$. Tomando la notación $\tilde{\mathcal{Q}} \sim \mathcal{Q}$ para indicar que $\varphi_{\mathcal{Q}}$ y $\varphi_{\tilde{\mathcal{Q}}}$ siguen la misma ley, y utilizando de nuevo el Lema 3.25, llegamos a ver que

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)}\left(E_{\mathcal{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})\right)\\ &= \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)}\sup_{\tilde{\mathcal{Q}}\sim\mathcal{Q}}\left(E[-X\varphi_{\tilde{\mathcal{Q}}}] - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})\right)\\ &= \sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{M}_1(P)}\left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_{\mathcal{Q}}}(t)dt - \alpha_{\min}(\mathcal{Q})\right),\end{aligned}$$

claramente invariante en ley. □

Ejemplo 3.27. Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cóncava creciente, y supongamos que una posición $X \in L^\infty$ es aceptable si $E[u(X)] \geq c$, donde c es una cierta constante del interior de $u(\mathbb{R})$; como ya vimos en el Ejemplo 2.16, el correspondiente conjunto de aceptación induce una medida de riesgo ρ convexa. Además, esta medida ρ es claramente invariante en ley. ◊

El siguiente teorema nos permite ver una característica crucial de las medidas de riesgo $AV@R_\lambda$: pueden interpretarse como elementos fundamentales para la construcción de medidas de riesgo convexas e invariantes en ley en L^∞.

Teorema 3.28. *Una medida de riesgo convexa ρ es invariante en ley y continua por arriba si, y sólo si,*

$$\rho(X) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_1((0,1])}\left(\int_{(0,1]} AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda) - \beta_{\min}(\mu)\right), \tag{3.20}$$

donde

$$\beta_{\min}(\mu) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho}\int_{(0,1]} AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda).$$

Demostración. Vemos que, debido a su especial dependencia con $AV@R_\lambda$, el lado derecho de (3.20) define una medida de riesgo convexa e invariante en ley que es continua por arriba. Consideramos ahora la implicación contraria: sea ρ invariante en ley y continua por arriba. Nuestro objetivo será mostrar que, para $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$, existe una medida $\mu \in \mathcal{M}_1((0,1])$ tal que

$$\int_0^1 q_{-X}(t)q_\varphi(t)dt = \int_{(0,1]} AV@R_s(X)\mu(ds),$$

donde $\varphi := \varphi_{\mathcal{Q}} = d\mathcal{Q}/dP$; si llegamos a ver esto, aplicando el Teorema 3.26 tendremos demostrada esta otra implicación. Utilizando que $q_{-X}(t) = V@R_{1-t}(X)$ y $q_{\varphi}(t) = q_{\varphi}^{+}(t)$ casi en todas partes para $t \in (0,1)$, obtenemos (haciendo cambio de variable $\gamma = 1-t$)

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi}(t)dt &= \int_0^1 V@R_{1-t}(X)q_{\varphi}^{+}(t) = \int_1^0 V@R_{\gamma}(X)q_{\varphi}^{+}(1-\gamma)(-d\gamma)\\ &= \int_0^1 V@R_{\gamma}(X)q_{\varphi}^{+}(1-\gamma)d\gamma,\end{aligned}$$

Sabemos que q_{φ}^{+} es creciente y continua por la derecha, por lo que podemos escribir $q_{\varphi}^{+}(t) = \nu((1-t,1])$ para alguna medida finita localmente positiva en $(0,1]$. Si consideramos la medida μ dada por $\mu(dt) = t\nu(dt)$, vemos que

$$\mu((0,1]) = \int_{(0,1]} t\nu(dt) = \int_0^1 \nu((s,1])ds = \int_0^1 q_{\varphi}^{+}(s)ds = E[\varphi] = 1, \tag{3.21}$$

i.e., μ es una medida de probabilidad en $(0,1]$. Así, utilizando que $q_{\varphi}^{+}(1-t) = t^{-1}\mu((t,1])$ y el Teorema de Fubini, vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi}(t)dt &= \int_0^1 V@R_t(X)\int_{(t,1]}\frac{1}{s}\mu(ds)dt\\ &= \int_{(0,1]}\frac{1}{s}\int_0^s V@R_t(X)dt\mu(ds)\\ &= \int_{(0,1]} AV@R_s(X)\mu(ds),\end{aligned} \tag{3.22}$$

Asimismo, para cualquier medida de probabilidad μ en $(0,1]$, la función definida como $q(t) := \int_{(1-t,1]} s^{-1}\mu(ds)$ puede interpretarse como función cuantil de la densidad $\varphi := q(U)$ de una medida $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$, donde U tiene una distribución uniforme en $(0,1)$. Juntando este razonamiento con el desarrollo anterior, obtenemos finalmente una correspondencia uno a uno entre las leyes de densidades φ y las medidas de probabilidad μ en $(0,1]$. Hemos logrado nuestro objetivo; tal como ya indicamos, aplicando el Teorema 3.26 obtenemos la implicación contraria y finalizamos esta demostración. □

El Teorema 3.28 adopta la siguiente forma para las medidas de riesgo coherentes:

Corolario 3.29. *Una medida de riesgo coherente ρ es continua por arriba e invariante en ley si, y sólo si,*

$$\rho(X) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}}\int_{(0,1]} AV@R_{\lambda}(X)\mu(d\lambda)$$

para algún conjunto $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1((0,1])$.

Demostración. Análoga a la del Teorema 3.28, teniendo en cuenta también los resultados ofrecidos por el Corolario 3.11 para las medidas de riesgo coherentes en L^{∞}. □

Observación 3.30. En contraste con la Proposición 3.17, se puede demostrar que $AV@R_{\lambda}$ es la mejor aproximación conservadora de $V@R_{\lambda}$ en la clase de todas las medidas de riesgo convexas e invariantes en ley que son continuas por arriba, i.e., que es la mínima medida de riesgo convexa, invariante en ley y continua por arriba que domina a $V@R_{\lambda}$. ◊

Observación 3.31. $AV@R_{\lambda}$ y WCE_{λ} bajo la suposición de que el espacio de probabilidad no tenga átomos. ◊

3.5. Distorsiones cóncavas

En esta sección nos centraremos en el estudio de las medidas de riesgo coherentes ρ_μ definidas como

$$\rho_\mu(X) := \int AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda), \tag{3.23}$$

las cuales aparecen en el Teorema de representación 3.28 de medidas de riesgo convexas e invariantes en ley. Nos proponemos caracterizar estas medidas de riesgo ρ_μ como integrales de Choquet respecto a una distorsión cóncava de la medida de probabilidad P.

Introduciremos en primer lugar la noción de integral de Choquet, fundamental para el desarrollo posterior:

Definición 3.32. Sea $c : \mathcal{F} \to [0,1]$ una función de conjuntos que está normalizada y es monótona en el sentido en que $c(\emptyset) = 0$, $c(\Omega) = 1$, y $c(A) \leq c(B)$ si $A \subset B$. La *integral de Choquet* de una función medible acotada $X \geq 0$ respecto a c está definida como

$$\int X dc := \int_0^\infty c(X > x)dx.$$

En general. la integral de Choquet es un funcional *no lineal* respecto a X, aunque para constantes $\lambda, m \geq 0$ tenemos que $\int \lambda X dc = \lambda \int X dc$ y que $\int (X+m)dc = \int X dc + m$.

Observación 3.33. Se pueden definir medidas de riesgo en un espacio $\mathcal{X}$ de funciones acotadas a través de integrales de Choquet. Sea c una función del estilo descrito en la Definición 3.32 y $X \in \mathcal{X}$ arbitraria; cogiendo $m \in \mathbb{R}$ tal que $X + m \geq 0$ obtenemos

$$\int (X+m)dc - m = \int_{-m}^0 (c(X > x) - 1)dx + \int_0^\infty c(X > x)dx.$$

Observamos que el lado derecho de la expresión anterior es independiente de $m \geq -\inf X$, por lo que tiene sentido extender la definición de la integral de Choquet a

$$\int X dc := \int_{-\infty}^0 (c(X > x) - 1)dx + \int_0^\infty c(X > x)dx \quad \forall X \in \mathcal{X}. \tag{3.24}$$

De esta manera, tenemos que $\int \lambda X dc = \lambda \int X dc$ para toda $\lambda \geq 0$, así como $\int (X+m)dc = \int X dc + m$ para $m \in \mathbb{R}$. Además, se cumple que $\int Y dc \geq \int X dc$ para $Y \geq X$. Analizando todas estas propiedades, vemos como, efectivamente, se puede definir una medida monetaria de riesgo en $\mathcal{X}$ homogéneamente positiva como la integral de Choquet de la pérdida $-X$:

$$\rho(X) := \int (-X)dc$$

$\diamondsuit$

Observación 3.34. En el caso particular en que c se defina como $c(A) := \psi(P[A])$ para alguna medida de probabilidad P y una función creciente $\psi : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$, la integral de Choquet $\int X dc$ coincide con la integral de Lebesgue usual respecto a una cierta medida de probabilidad μ. En efecto, supongamos $X \geq 0$ sin pérdida de generalidad (siempre podemos coger $m \in \mathbb{R}$ tal que $X + m \geq 0$) y c_ψ así definida; definiendo $\mu(x, x+\epsilon] := \psi(P(X > x)) - \psi(P(X > x+\epsilon))$, tenemos que μ es una medida de probabilidad y

$$\psi(P(X > x)) = \int_x^\infty d\mu(u).$$

Consecuentemente,

$$\int X dc_\psi = \int_0^\infty \psi(P(X > x))dx = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty d\mu(u) \right) dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^u dx \right) d\mu(u) = \int_0^\infty u d\mu(u),$$

donde hemos utilizado el Teorema de Fubini en la tercera igualdad. De manera general, con X no necesariamente ≥ 0, en este caso podemos expresar la integral de Choquet como

$$\int X dc_\psi = \int_{-\infty}^\infty u d\mu(u)$$

$\Diamond$

Con el concepto de integral de Choquet definido, empezaremos ahora a buscar la caracterización que deseamos. Para ello, consideraremos de inicio el mismo marco de trabajo que el apartado anterior: supondremos que ha sido fijada una medida de probabilidad P y que podemos identificar $\mathcal{X}$ con L^∞, además de asumir que el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con el que trabajamos no tiene átomos.

Dado que $AV@R_\lambda$ es coherente, continua por abajo e invariante en ley, cualquier ρ_μ para alguna medida de probabilidad μ en $(0, 1]$ comparte estas mismas propiedades. Como ya indicamos en la Observación 3.19 (b), podemos extender la definición (3.23) a medidas de probabilidad μ en el intervalo cerrado $[0, 1]$ definiendo $AV@R_0(X) = -\text{ess inf } X$; no obstante, ρ_μ solo será continua por arriba y no por abajo si $\mu(\{0\}) > 0$, ya que $AV@R_0$ así definida no es continua por abajo.

Nuestro primer objetivo será mostrar que $\rho_\mu(X)$ puede identificarse con la integral de Choquet de la pérdida $-X$ respecto a la función de conjuntos $c_\psi(A) := \psi(P[A])$, donde ψ es la función cóncava[12] que definirá el siguiente lema:

Lema 3.35. *La identidad*

$$\psi'_+(t) = \int_{(t,1]} s^{-1}\mu(ds), \quad 0 < t < 1, \tag{3.25}$$

define una correspondencia uno a uno entre medidas de probabilidad μ en $[0, 1]$ y funciones cóncavas crecientes $\psi : [0, 1] \to [0, 1]$ con $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$. Además, tenemos que $\psi(0+) = \mu(\{0\})$.

Demostración. Supongamos que conocemos μ y que ψ está definido por $\psi(1) = 1$ y por la expresión (3.25). Entonces es fácil ver que ψ es cóncava y creciente en $(0, 1]$. Además, vemos que $\psi(0+) \geq 0$:

$$1 - \psi(0+) = \int_0^1 \psi'(t)dt = \int_{(0,1]} \frac{1}{s} \int_0^1 \mathbb{I}_{\{t<s\leq 1\}} dt \mu(ds) = \mu((0, 1]) \leq 1.$$

Podemos de esta manera definir $\psi(0) := 0$ para así obtener una función cóncava creciente en $[0, 1]$.

[12]Toda función cóncava ψ admite una derivada por la derecha ψ'_+, a su vez contínua por la derecha; análogo al estudio de una función convexa, consultar el Apéndice A.1.

Veamos ahora el recíproco: conocemos la función cóncava ψ. Entonces $\psi'_+(t)$ es una función continua por la derecha y decreciente en el intervalo $(0,1)$ y puede ser expresada como $\psi'_+(t) = \nu((t,1])$ para alguna medida ν localmente finita y positiva en $(0,1]$. Definiendo μ en $(0,1]$ a través de $\mu(dt) = t\nu(dt)$ (ya vimos en (3.21) que μ así definida es una medida de probabilidad en ese intervalo), comprobamos que se cumple (3.25), i.e. $\psi'_+(t) = \int_{(t,1]} s^{-1}(s\nu(ds)) = \nu((t,1])$, y por el Teorema de Fubini

$$\mu((0,1]) = \int_0^1 \int_{(0,1]} \mathbb{I}_{\{t<s\}}\nu(ds)dt = 1 - \psi(0+) \leq 1.$$

Finalmente, tomando $\mu(\{0\}) := \psi(0+)$, tenemos que μ define una medida de probabilidad en $[0,1]$. □

Teorema 3.36. *Para una medida de probabilidad μ en $[0,1]$, sea ψ la función cóncava definida en el Lema 3.35. Entonces, para $X \in \mathcal{X}$,*

$$\begin{aligned} \rho_\mu(-X) &= \psi(0+)AV@R_0(-X) + \int_0^1 q_X(t)\psi'(1-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (\psi(P[X > x]) - 1)\,dx + \int_0^\infty \psi(P[X > x])dx. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Demostración. A partir de la definición de $V@R_\lambda$ en la expresión (3.15), es evidente que $V@R_\lambda(-X) = q_X^-(1-\lambda)$, por lo que

$$AV@R_\lambda(-X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X^-(1-\gamma)d\gamma = -\frac{1}{\lambda}\int_1^{1-\lambda} q_X(t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_{1-\lambda}^1 q_X(t)dt,$$

donde hemos realizado el cambio de variable $t = 1-\gamma$. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{(0,1]} AV@R_\lambda(-X)\mu(d\lambda) &= \int_{(0,1]} \frac{1}{\lambda}\int_{1-\lambda}^1 q_X(t)dt\mu(d\lambda) = \int_0^1 q_X(t)\int_{(1-t,1]} s^{-1}\mu(ds) \\ &= \int_0^1 q_X(t)\psi'(1-t)dt. \end{aligned}$$

Con esto demostramos la primera identidad, siendo el término extra $\psi(0+)AV@R_0(-X)$ provocado por el hecho de que el intervalo de definición de μ contiene el 0. Para la segunda igualdad, primero asumiremos $X \geq 0$, de manera que

$$q_X^+(t) = \sup\{x \geq 0 \mid F_X(x) \leq t\} = \int_0^\infty \mathbb{I}_{\{F_X(x)\leq t\}}dx,$$

donde $F_X(x)$ es la función de distribución de X. Usando el Teorema de Fubini, y que $\int_0^y \psi'(t)dt = (\psi(y) - \psi(0+))\mathbb{I}_{\{y>0\}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_X(t)\psi'(1-t)dt &= \int_0^\infty \int_0^1 \mathbb{I}_{\{F(x)\leq 1-t\}}\psi'(t)dtdx \\ &= \int_0^\infty \psi(1-F_X(x))dx - \psi(0+) \text{ ess sup } X. \end{aligned}$$

Esto demuestra la segunda identidad para $X \geq 0$, puesto que $F(x) = P[X \leq x] = 1 - P[X > x]$, $\psi(0+) = \mu(\{0\})$ y $AV@R_0(-X) = \text{ess sup } X$. Para $X \in L^\infty$ cualquiera, consideramos

$X + C$, donde $C := -\text{ess inf } X$. Por invariancia monetaria de ρ_μ,

$$\begin{aligned} C + \rho_\mu(-X) &= \int_0^\infty \psi(P[X > x - C])dx = \int_{-C}^0 \psi(P[X > x])dx + \int_0^\infty \psi(P[X > x])dx \\ &= C + \int_{-\infty}^0 (\psi(P[X > x]) - 1)dx + \int_0^\infty \psi(P[X > x])dx, \end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar. □

Observación 3.37. Notemos que, a partir de la última expresión de (3.26), en particular tenemos que $\forall X \in L^\infty$

$$\begin{aligned} \rho_\mu(X) &= \int_{-\infty}^0 (\psi(P[-X > x]) - 1)\, dx + \int_0^\infty \psi(P[-X > x])dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (\psi(P[X < -x]) - 1)\, dx + \int_0^\infty \psi(P[X < -x])dx. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $y = -x$, podemos reescribir

$$\begin{aligned} \rho_\mu(X) &= \int_{-\infty}^0 \psi(P[X < y])dy + \int_0^{+\infty} (\psi(P[X < y]) - 1)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \psi(F_X(y))dy + \int_0^{+\infty} (\psi(F_X(y)) - 1)\, dy, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que $\psi(P[X < y]) = \psi(F_X(y))$ casi en todas partes; integrando por partes ambas integrales de la última expresión,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 \psi(F_X(y))dy = [\psi(F_X(y))y]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 yd\psi(F_X(y)) = -\int_{-\infty}^0 yd\psi(F_X(y)), \\ &\int_0^{+\infty} (\psi(F_X(y)) - 1)\, dy = [(\psi(F_X(y)) - 1)y]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} yd\psi(F_X(y)) = -\int_0^{+\infty} yd\psi(F_X(y)), \end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$\rho_\mu(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} yd\psi(F_X(y)) \quad \forall X \in L^\infty.$$

Esta expresión de las medidas coherentes ρ_μ nos será muy útil cuando desarrollemos el modelo paramétrico de Conic-finance. ◊

Ejemplo 3.38. Es evidente ver que la medida de riesgo $AV@R_\lambda$ es de la forma ρ_μ en el caso en que $\mu = \delta_\lambda$. Para $\lambda > 0$, la correspondiente función de distorsión cóncava viene dada por

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{\lambda}\right) \wedge 1 = \frac{1}{\lambda}(t \wedge \lambda).$$

De esta manera, encontramos una nueva representación del Valor en riesgo promedio:

$$AV@R_\lambda(-X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (P[X > x] \wedge \lambda)\, dx$$

para $X \in L_+^\infty$. ◊

Para alcanzar el objetivo establecido, será necesario ofrecer más detalles de la función de conjuntos $c_\psi(A) = \psi(P[A])$ que hemos mencionado en el inicio de este apartado.

Definición 3.39. Sea $\psi : [0,1] \to [0,1]$ una función creciente tal que $\psi(0) = 0$ y $\psi(1) = 1$. A la función de conjuntos

$$c_\psi(A) := \psi(P[A]), \quad A \in \mathcal{F},$$

la llamamos *distorsión* de la medida de probabilidad P respecto a la *función de distorsión* ψ.

Definición 3.40. Una función de conjuntos $c : \mathcal{F} \to [0,1]$ *monótona* y *normalizada* lo es en el mismo sentido que en la Definición 3.32. Además, una función de conjuntos monótona se dice que es *submodular* o *2-alternada* si

$$c(A \cup B) + c(A \cap B) \leq c(A) + c(B).$$

Claramente, toda distorsión c_ψ es monótona y está normalizada. La siguiente proposición nos aclara cuando es también submodular:

Proposición 3.41. *Sea c_ψ la distorsión de P respecto a la función de distorsión ψ. Si ψ es cóncava, c_ψ es submodular. Asimismo, si el espacio de probabilidad subyacente no tiene átomos, la implicación contraria también se cumple.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que ψ es cóncava. Cogiendo $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $P[A] \leq P[B]$, tenemos que ver que $c := c_\psi = \psi(P[\,\cdot\,])$ satisface

$$c(A) - c(A \cap B) \geq c(A \cup B) - c(B).$$

Definimos $r := P[A] - P[A \cap B] = P[A \cup B] - P[B]$, de manera que, por como hemos escogido A y B, $r \geq 0$. Si $r = 0$, la expresión anterior se cumple fácilmente, transformándose en la identidad trivial $0 = 0$. Para $r > 0$, la concavidad de ψ implica que

$$\frac{c(A) - c(A \cap B)}{P[A] - P[A \cap B]} \geq \frac{c(A \cup B) - c(B)}{P[A \cup B] - P[B]}.$$

Fijémonos en los denominadores; multiplicando por r en los dos lados obtenemos el resultado deseado.

Vayamos ahora con el recíproco en el caso en que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no tiene átomos: sea $c = c_\psi$ submodular. Tenemos que ver que ψ es cóncava, i.e., que $\psi(y) \geq (\psi(x) + \psi(z))/2$ siempre que $0 \leq x \leq z \leq 1$ e $y = (x+z)/2$. Para ello, construimos dos conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $P[A] = P[B] = y$, $P[A \cap B] = x$ y $P[A \cup B] = z$; como el espacio no tiene átomos, podemos asegurar que ninguno de los dos conjuntos A, B es subconjunto del otro. La submodularidad de c nos proporciona que $c(A \cup B) + c(A \cap B) = \psi(x) + \psi(z) \leq 2\psi(y) = c(A) + c(B)$, lo cual conlleva la concavidad de ψ.

Para la construcción de los dos conjuntos A y B, cogemos una variable aleatoria U con una distribución uniforme en $[0,1]$ (existe por la Proposición A.45). Así, $A := \{0 \leq U \leq y\}$ y $B := \{z - y \leq U \leq z\}$ son conjuntos con las propiedades que queríamos. □

Recordemos la noción de integral de Choquet presentada en la Definición 3.32, así como la expresión equivalente (3.24) deducida en la Observación 3.33. Podemos notar como el Teorema 3.36 nos permite identificar la medida de riesgo ρ_μ como la integral de Choquet de la pérdida $-X$ respecto a la distorsión cóncava c_ψ de la medida de probabilidad P.

Corolario 3.42. *Para una medida de probabilidad μ en el intervalo $[0,1]$, sea ψ la distorsión cóncava definida en el Lema 3.35 y c_ψ la distorsión de P respecto a ψ. Entonces,*

$$\rho_\mu(X) = \int (-X) dc_\psi.$$

Demostración. La demostración es directa comparando la última expresión de $\rho_\mu(X)$ que presenta el Teorema 3.36 y la definición (3.24) de la integral de Choquet, teniendo en cuenta que $\psi(P[\,\cdot\,]) = c_\psi(\,\cdot\,)$. □

Esto nos conduce a la siguiente caracterización de medidas de riesgo convexas e invariantes en ley en términos de distorsiones cóncavas:

Corolario 3.43. *Una medida de riesgo convexa ρ es invariante en ley y continua por arriba si, y solo si,*

$$\rho(X) = \sup_\psi \left(\int (-X) dc_\psi - \gamma_{\min}(\psi) \right),$$

donde el supremo se calcula sobre la clase de todas las funciones de distorsión cóncavas ψ y

$$\gamma_{\min}(\psi) := \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int (-X) dc_\psi.$$

Demostración. También es directa: este enunciado es equivalente al Teorema 3.28, substituyendo toda $\int AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda) = \rho_\mu(X)$ que aparece en dicho teorema por el resultado del Corolario 3.42 anterior. □

Por último, como otra consecuencia del Teorema 3.36, alcanzamos la siguiente descripción explícita del conjunto maximal de representación $Q_\mu \subset \mathcal{M}_1(P)$ para la medida de riesgo coherente ρ_μ:

Teorema 3.44. *Sea μ una medida de probabilidad en $[0,1]$, y ψ la función cóncava correspondiente definida en el Lema 3.35; ρ_μ puede ser representada como*

$$\rho_\mu(X) = \sup_{\mathcal{Q} \in Q_\mu} E_\mathcal{Q}[-X],$$

donde el conjunto Q_μ viene dado por

$$Q_\mu := \left\{ \mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P) \mid \varphi := \frac{d\mathcal{Q}}{dP} \text{ satisface } \int_t^1 q_\varphi(s) ds \le \psi(1-t) \text{ para } t \in (0,1) \right\}.$$

Además, Q_μ es el subconjunto maximal de $\mathcal{M}_1(P)$ que representa a ρ_μ.

Demostración. La medida de riesgo ρ_μ es coherente y continua por arriba. Por el Corolario 3.11, sabemos que se puede representar a través del supremo del valor esperado de $-X$ sobre el conjunto $Q_{\max} = \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P) \mid \alpha_{\min}(\mathcal{Q}) = 0\}$. A partir de la expresión (3.19) de $\alpha_{\min}$ vemos que una medida $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P)$ con densidad $\varphi = d\mathcal{Q}/dP$ pertenece a $Q_{\max}$ si, y sólo si,

$$\sup_{-X \in L^\infty} \left(\int_0^1 q_X(t) q_\varphi(t) dt - \rho_\mu(-X) \right) = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 q_X(t) q_\varphi(t) dt \le \rho_\mu(-X) \quad \forall X \in L^\infty$$

Utilizando el resultado del Teorema 3.36 en la última expresión, obtenemos que, para toda $X \in L^\infty$,

$$\int_0^1 q_X(t)q_\varphi(t)dt \leq \rho_\mu(-X) = \psi(0+)AV@R_0(-X) + \int_0^1 q_X(s)\psi'(1-s)ds \tag{3.27}$$

si, y sólo si, dicha medida $\mathcal{Q}$ de densidad φ pertenece a $Q_{\max}$. Para variables aleatorias constantes $X \equiv t$, tenemos $q_X = \mathbb{I}_{[t,1]}$ casi en todas partes, por lo que

$$\int_t^1 q_\varphi(s)ds \;\leq\; \psi(0+) + \int_t^1 \psi'(1-s)ds = \psi(1-t) \quad \forall t \in (0,1).$$

Esto demuestra la inclusión $Q_{\max} \subset Q_\mu$.Veamos ahora la inclusión contraria; para ello, mostraremos que la densidad φ de una medida fijada $\mathcal{Q} \in Q_\mu$ cumple (3.27) para cualquier $X \in L^\infty$. Sea ν la medida finita y positiva en $[0,1]$ tal que $q_X^+(s) = \nu((0,s])$. Usando el Teorema de Fubini y la definición de Q_μ llegamos a

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_X(s)q_\varphi(s)ds &= \int_0^1 \int_{[0,s]} \nu(dt)q_\varphi(s)ds = \int_{[0,1]} \int_t^1 q_\varphi(s)ds\ \nu(dt)\\ &\leq \int_{[0,1]} \psi(1-t)\nu(dt) = \psi(0+)\nu([0,1]) + \int_0^1 \psi'(1-s)\int_{[0,s]} \nu(dt)ds\\ &= \psi(0+)q_X^+(1) + \int_0^1 q_X^+(s)\psi'(1-s)ds.\end{aligned}$$

Dado que $AV@R_0(-X) := V@R_0(-X) = \text{ess sup } X$ coincide con $q_X^+(1)$ y que $q_X^+(s) = q_X(s)$ casi en todas partes, observamos que esta última expresión equivale a (3.27). □

Observación 3.45. En el contexto del Teorema 3.44, es válido lo que apuntamos en el Corolario 3.12: ρ_μ alcanza el supremo si, y sólo si, es continua por abajo. Además, en este caso se podría probar una tercera condición equivalente a estas dos: $\mu(\{0\}) = 0$. ◊

4. Modelización de mercados financieros

Cumplidos nuestros objetivos relacionados con la teoría de medidas monetarias de riesgo, introduciremos en esta sección algunos conceptos básicos sobre la teoría de modelización de mercados financieros que necesitamos conocer antes de abordar la conic-finance. Para ello, estudiaremos la estructura matemática de un modelo sencillo de mercado financiero de un periodo con un número finito de activos; sus precios en el instante inicial, cuando se comercializan, son conocidos, mientras que los precios que tienen al final del periodo se describen como variables aleatorias en un cierto espacio de probabilidad. Una vez orientado este modelo con la terminología relacionada, estudiaremos la ausencia de arbitraje, una propiedad económica que buscamos que satisfaga nuestro modelo para asegurar su eficiencia. Por último, nos centraremos en los derechos contingentes y distinguiremos los modelos de mercado completos.

4.1. Modelo de mercado financiero de un periodo

Consideremos un mercado financiero con un número finito $d+1$ de activos, los cuales pueden representar acciones, bonos, bienes o divisas. En un modelo sencillo de un periodo, cada uno de estos activos está valorado en un determinado precio en el instante inicial $t = 0$ y en el instante final $t = 1$. Representaremos el precio inicial del activo i-ésimo, con $i = 0, 1, \ldots, d$, mediante π^i, y asumiremos que solo puede tomas valores no negativos; es decir, $\pi^i \geq 0\ \forall i$. De esta manera, definimos el *sistema de precios* como la colección

$$\overline{\pi} = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^d) \in \mathbb{R}_+^{d+1}.$$

Normalmente, los precios en el instante 1 no son conocidos de antemano en el instante 0; para modelar esta incertidumbre, fijamos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y describimos los precios de los activos en el instante $t = 1$ como funciones medibles no negativas

$$S^0, S^1, \ldots, S^d$$

en $(\Omega, \mathcal{F})$, con valores en $[0, \infty)$. Cada $\omega \in \Omega$ corresponde a un escenario particular de la evolución del mercado, de modo que $S^i(\omega)$ es el precio del activo i-ésimo en el instante 1 si ocurre el escenario ω.

No obstante, todos los activos no tienen por qué tener precios inciertos al transcurrir el periodo; es posible encontrar un bono sin riesgo que nos *asegure* una cierta cantidad. En nuestro modelo simplificado, esta oportunidad de inversión sin riesgo se incluirá suponiendo que

$$\pi^0 = 1 \quad \text{y} \quad S^0 \equiv 1 + r$$

con r una constante que representa la tasa de interés simple. Tiene lógica asumir $r \geq 0$, pero para nuestros objetivos es suficiente imponer $r > -1$ para que en todo momento $S^0 > 0$. Para distinguir S^0 de los activos con riesgo $S^1, \ldots, S^d$, introduciremos la siguiente notación:

$$\overline{S} = (S^0, S)$$

con $S = (S^1, \ldots, S^d)$; en la misma linea, escribiremos $\overline{\pi} = (1, \pi)$, con $\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^d)$.

En el instante inicial $t = 0$, un inversor escogerá una *cartera*

$$\overline{\xi} = (\xi^0, \xi) = (\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^d) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

donde ξ^i representa el número participaciones del activo i-ésimo. El precio de compra (valor inicial) de la cartera $\overline{\xi}$ es igual a

$$\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = \sum_{i=0}^{d} \pi^i \xi^i.$$

En el instante $t = 1$, esta cartera tendrá un valor igual a

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S}(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \xi^i S^i(\omega) = \xi^0(1+r) + \xi \cdot S(\omega),$$

dependiendo del escenario $\omega \in \Omega$. En esta interpretación simplificada que estamos realizando, suponemos implícitamente que no hay costes extra en la compra y venta de activos; esta hipótesis solo resultaría realista para grandes entidades financieras, no siendo válida para pequeños inversores.

Fijémonos en que nuestra definición de cartera permite a las componentes ξ^i ser negativas:

- $\xi^0 < 0$ corresponde a una situación en la que se solicita un préstamo para recibir la cantidad $|\xi^0|$ en $t = 0$, teniendose que devolver la cantidad $(1+r)|\xi^0|$ transcurrido el periodo.

- $\xi^i < 0$ para $i \geq 1$ se puede interpretar como que una cantidad $|\xi^i|$ de participaciones del activo i-ésimo se vendieran sin que realmente se poseyeran, lo que correspondería a una venta al descubierto del activo[13]. En particular, un inversor podría tomar una posición a corto plazo $\xi^i < 0$ y usar la cantidad $\pi^i \xi^i$ recibida para comprar cantidades $\xi^j \geq 0$, $j \neq i$, de los otros activos; en el caso en que el inversor no compre más activos con su capital, el precio del portfolio $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ es $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = 0$.

Definición 4.1. Decimos que una cartera $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ es una *oportunidad de arbitraje* si $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0$ pero $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq 0$ P-c.s. y $P[\overline{\xi} \cdot \overline{S} > 0] > 0$.

Podemos relacionar el concepto de oportunidad de arbitraje con la existencia de una estrategia de inversión que proporcione con probabilidad positiva un cierto beneficio sin exponerse a ningún riesgo de pérdida. La existencia de este tipo de oportunidades puede interpretarse como una ineficacia del mercado en el sentido en que ciertos activos no tienen un precio razonable: en el mundo real, si una oportunidad de arbitraje apareciera, generaría una gran demanda que ajustaría los precios, de manera que acabaría desapareciendo con rapidez.

La ausencia de arbitraje es, pues, una condición que querremos que nuestro modelo de mercado financiero cumpla, y observemos que implicaria que S^i se anulase P-c.s. siempre que $\pi^i = 0$; así, de aquí en adelante podríamos asumir sin pérdida de generalidad que $\pi^i > 0$ para $i = 1, \ldots, d$.

Observación 4.2. Notemos que la medida de probabilidad P solo contribuye a la definición de una oportunidad de arbitraje a través de los conjuntos nulos por P. $\diamondsuit$

El siguiente lema nos muestra como la ausencia de arbitraje es equivalente a la siguiente propiedad del mercado: cualquier inversión en activos de riesgo que nos conduzca con probabilidad positiva a un resultado mejor que la inversión de la misma cantidad en un activo sin riesgo debe estar expuesta a algún riesgo de pérdida.

[13](En inglés *short-selling*) Operación que implica vender a plazo valores que no se poseen, sino que se han tomado prestados, con la finalidad de poder comprarlos después a una tarifa menor.

Lema 4.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El modelo de mercado admite una oportunidad de arbitraje.*

(b) *Existe un vector $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que*

$$\xi \cdot S \geq (1+r)\xi \cdot \pi \ P\text{-}c.s. \quad y \quad P[\xi \cdot S > (1+r)\xi \cdot \pi] > 0.$$

Demostración. (a)⇒(b): Sea $\overline{\xi}$ una oportunidad de arbitraje; entonces $0 \geq \overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \xi^0 + \xi \cdot \pi$, de manera que

$$\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \pi \geq \xi \cdot S + (1+r)\xi^0 = \overline{\xi} \cdot \overline{S}.$$

Dado que el producto $\overline{\xi} \cdot \overline{S}$ es no negativo P-c.s., y estrictamente positivo con probabilidades no nulas, por la expresión anterior podemos asegurar lo mismo con $\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \pi$, lo que nos conduce a (b).

(b)⇒(a): Sea ξ como en (b); veremos que la cartera $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ con $\xi^0 := -\xi \cdot \pi$ es una oportunidad de arbitraje. En efecto: por definición, tenemos que $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi} = \xi^0 + \xi \cdot \pi = 0$, y además $\overline{\xi} \cdot \overline{S} = -(1+r)\xi \cdot \pi + \xi \cdot S \geq 0$ P-c.s. y > 0 estrictamente con probabilidades no nulas, de donde podemos concluir que $\overline{\xi}$ así definida es una oportunidad de arbitraje. □

4.2. Ausencia de arbitraje

Ahora nos proponemos caracterizar a los modelos de mercado que no admiten ninguna oportunidad de arbitraje; estos modelos se dirá que son *libres de arbitraje*.

Definición 4.4. Una medida de probabilidad P^* es una *medida neutral al riesgo*, o una *medida martingala*, si

$$\pi^i = E_{P^*}\left[\frac{S^i}{1+r}\right], \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{4.1}$$

En ésta última expresión, el precio del activo i-ésimo se identifica con la esperanza del valor final descontado bajo la medida P^*. De esta manera, podemos ver (4.1) como una fórmula de valorización clásica que no tiene en cuenta el grado de aversión al riesgo, motivo por el que la medida P^* que la satisface se dice que es neutral al riesgo.

El siguiente resultado es conocido como el “teorema fundamental de valorización de precios de activos”, y nos permite caracterizar modelos de mercado libres de arbitraje en términos del conjunto

$$\mathcal{P} := \{P^* \mid P^* \text{ es una medida neutral al riesgo tal que } P^* \approx P\}$$

de medidas neutrales al riesgo equivalentes a P. A una medida neutral al riesgo equivalente también se le denomina *medida de valoración* (*pricing measure*) o *medida martingala equivalente*.

Antes de presentarlo, no obstante, introduciremos un concepto que nos será útil para su demostración: el vector aleatorio $Y = (Y^1, \ldots, Y^d)$ de las *ganancias netas descontadas*, con

$$Y^i := \frac{S^i}{1+r} - \pi^i, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{4.2}$$

Con esta notación, el Lema 4.3 implica que la ausencia de arbitraje es equivalente a la condición:

$$\text{Para } \xi \in \mathbb{R}^d,\ \xi \cdot Y \geq 0 \ P\text{-c.s.} \quad \Longrightarrow \quad \xi \cdot Y = 0 \ P\text{-c.s.} \tag{4.3}$$

Como Y^i está acotada inferiormente por $-\pi^i$, la esperanza $E_{P^*}[Y^i]$ de Y^i bajo cualquier medida P^* está bien definida, de modo que P^* es una medida neutral al riesgo si, y sólo si,

$$E_{P^*}[Y] = 0, \tag{4.4}$$

donde $E_{P^*}[Y]$ es una notación abreviada para el vector d-dimensional con componentes $E_{P^*}[Y^i],\ i = 1, \ldots, d$.

Teorema 4.5. *Un modelo de mercado está libre de arbitraje si, y sólo si, $\mathcal{P} \neq \emptyset$. En este caso, existe $P^* \in \mathcal{P}$ con densidad dP^*/dP acotada.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que existe una medida neutral al riesgo $P^* \in \mathcal{P}$. Tomamos una cartera $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq 0$ P-c.s. y $E[\overline{\xi} \cdot \overline{S}] > 0$; ambas propiedades son también válidas si substituimos P por la medida equivalente P^*, de manera que

$$\pi \cdot \overline{\xi} = \sum_{i=0}^{d} \pi^i \xi^i = \sum_{i=0}^{d} E_{P^*}\left[\frac{\xi^i S^i}{1+r}\right] = E_{P^*}\left[\frac{\overline{\xi} \cdot \overline{S}}{1+r}\right] > 0.$$

Comprobamos, pues, que $\overline{\xi}$ no puede ser una oportunidad de arbitraje.

$\Rightarrow$) Notemos que, con la noción presentada del vector aleatorio Y de las ganancias netas descontadas, demostrar esta segunda implicación del teorema es equivalente a demostrar que la condición (4.3) implica que existe alguna $P^* \approx P$ tal que $E_{P^*}[Y] = 0$ y cuya densidad dP^*/dP esté acotada.

Primero lo veremos en el caso en que $E[|Y|] < \infty$. Sea Q el conjunto convexo de todas las medidas de probabilidad $\mathcal{Q} \approx P$ con densidades $d\mathcal{Q}/dP$ acotadas, y denotaremos por $E_{\mathcal{Q}}[Y]$ el vector d-dimensional con componentes $E_{\mathcal{Q}}[Y^i],\ i = 1, \ldots, d$. Dado que asumimos que $|Y| \in \mathcal{L}^1(P)$, todas estas esperanzas son finitas. Sea

$$\mathcal{C} := \{E_{\mathcal{Q}}[Y] \mid \mathcal{Q} \in Q\},$$

y observemos que $\mathcal{C}$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^d$: si $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_0 \in Q$ y $\alpha \in [0,1]$, $\mathcal{Q}_\alpha := \alpha\mathcal{Q}_1 + (1-\alpha)\mathcal{Q}_0 \in Q$, y tenemos que $\alpha E_{\mathcal{Q}_1}[Y] + (1-\alpha)E_{\mathcal{Q}_0}[Y] = E_{\mathcal{Q}_\alpha}[Y] \in \mathcal{C}$.

Nuestro objetivo será probar que $\mathcal{C}$ contiene el origen; para ello, por reducción al absurdo, supondremos que $0 \notin \mathcal{C}$. A través de la Proposición A.1, obtenemos un vector $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\xi \cdot x \geq 0\ \forall x \in \mathcal{C}$ y tal que $\xi \cdot x_0 > 0$ para alguna $x_0 \in \mathcal{C}$. Así, ξ cumple que $E_{\mathcal{Q}}[\xi \cdot Y] \geq 0\ \forall \mathcal{Q} \in Q$ y $E_{\mathcal{Q}_0}[\xi \cdot Y] > 0$ para alguna $\mathcal{Q}_0 \in Q$, donde claramente esta última condición implica que $P[\xi \cdot Y > 0] > 0$ debido a que $\mathcal{Q}_0 \approx P$.

Veamos que la condición $E_{\mathcal{Q}}[\xi \cdot Y] \geq 0\ \forall \mathcal{Q} \in Q$ conlleva que el producto $\xi \cdot Y$ es no negativo P-c.s.; este hecho seria una contradicción a nuestra hipótesis (4.3), demostrando así que $0 \in \mathcal{C}$. Así, sea $A := \{\xi \cdot Y < 0\}$, y definamos las funciones

$$\varphi_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \mathbb{I}_A + \frac{1}{n} \cdot \mathbb{I}_{A^c}.$$

Tomamos a las funciones φ_n como densidades para nuevas medidas de probabilidad $\mathcal{Q}_n$:

$$\frac{d\mathcal{Q}_n}{dP} := \frac{1}{E[\varphi_n]} \cdot \varphi_n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Como $0 < \varphi_n \leq 1$, tenemos que $\mathcal{Q}_n \in Q$, y por lo tanto que

$$0 \leq \xi \cdot E_{\mathcal{Q}_n}[Y] = \frac{1}{E[\varphi_n]} E[\xi \cdot Y \varphi_n].$$

Llegados a este punto, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue nos garantiza que

$$E\left[\xi \cdot Y \mathbb{I}_{\{\xi \cdot Y<0\}}\right] = \lim_{n\to\infty} E[\xi \cdot Y \varphi_n] \geq 0,$$

expresión que nos muestra que el producto $\xi{\cdot}Y$ es no negativo P-c.s. tal como queríamos ver, de manera que llegamos a la contradicción con (4.3) que nos permite completar la demostración de esta implicación del teorema para el caso en que $E[|Y|] < \infty$.

Para acabar, lo demostraremos en el caso en que Y no sea P-integrable; entonces simplemente substituimos la medida de probabilidad P por una medida equivalente $\tilde{P}$ adecuada, cuya densidad $d\tilde{P}/dP$ esté acotada, y mediante la cual $E_{\tilde{P}}[|Y|] < \infty$. Por ejemplo, podemos definir $\tilde{P}$ a través de

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \frac{c}{1+|Y|} \quad \text{para } c := \left(E\left[\frac{1}{1+|Y|}\right]\right)^{-1}.$$

Recordando la Observación 4.2, claramente substituir P por una medida de probabilidad equivalente no afecta a la ausencia de oportunidades de arbitraje en nuestro modelo de mercado. Así, la primera parte de esta demostración sostiene la existencia de una medida neutral al riesgo P^* equivalente a $\tilde{P}$ y cuya densidad $dP^*/d\tilde{P}$ está acotada, de manera que $P^* \in \mathcal{P}$ y la densidad

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{dP^*}{d\tilde{P}} \cdot \frac{d\tilde{P}}{dP}$$

está acotada. Así pues, P^* es como deseábamos, y el teorema queda demostrado. □

Sea

$$\mathcal{V} := \{\overline{\xi} \cdot \overline{S} \mid \overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}\}$$

el espacio lineal de todos los resultados que pueden ser generados por cualquier cartera. Un elemento de $\mathcal{V}$ se dirá que es un *resultado factible*. Una cartera que genera un cierto $V \in \mathcal{V}$ en general no es única, pero tenemos la siguiente *ley de un precio*.

Lema 4.6. *Supongamos que el modelo de mercado está libre de arbitraje y que $V \in \mathcal{V}$ puede escribirse como $V = \overline{\xi}{\cdot}\overline{S} = \overline{\zeta}{\cdot}\overline{S}$ P-c.s. para dos carteras diferentes $\overline{\xi}$ y $\overline{\zeta}$. Entonces $\overline{\pi}{\cdot}\overline{\xi} = \overline{\pi}{\cdot}\overline{\zeta}$.*

Demostración. Tenemos que $(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S} = 0$ P^*-c.s. para cualquier $P^* \in \mathcal{P}$, de modo que

$$\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} - \overline{\pi} \cdot \overline{\zeta} = E_{P^*}\left[\frac{(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S}}{1+r}\right] = 0,$$

donde en la primera igualdad hemos utilizado (4.1). □

Definición 4.7. Definimos el *precio* de $V \in \mathcal{V}$ como

$$\pi(V) := \overline{\pi} \cdot \overline{\xi} \quad \text{si } V = \overline{\xi} \cdot \overline{S}, \tag{4.5}$$

siempre y cuando el modelo de mercado sea libre de arbitraje. Esta definición tiene sentido por el lema anterior.

Ya hemos visto anteriormente que, en un modelo de mercado sin arbitraje, la condición $\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0$ P-c.s. implica que $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = 0$. De hecho, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \ P\text{-c.s.} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\xi} = 0, \tag{4.6}$$

o contrariamente podríamos encontrar $i \in \{0, \dots, d\}$ tal que $\xi^i \neq 0$ y representar así el activo i-ésimo como combinación lineal del resto: $\pi^i = \frac{1}{\xi^i}\sum_{j\neq i} \xi^i \pi^i$ y $S^i = \frac{1}{\xi^i}\sum_{j\neq i} \xi^i S^i$. En este sentido, el activo i-ésimo es redundante y puede ser omitido.

Definición 4.8. Un modelo de mercado se dice que es *no redundante* si se cumple (4.6).

4.3. Modelos de mercado completos

En los mercados financieros reales no sólo se comercia con activos primarios, sino que hay una gran cantidad de valores cuyos resultados financieros dependen de manera no lineal de los activos primarios $S^0, S^1, \ldots, S^d$, y en ocasiones también de otros factores. Estos instrumentos financieros reciben los nombres de *valores derivados*, *opciones* o *derechos contingentes*.

Matemáticamente, es adecuado centrarse en derechos contingentes cuyos resultados sean no negativos. de manera que podemos interpretarlos como contratos vendidos en el instante inicial $t = 0$ y por los que se recibe una cantidad $C(\omega) \geq 0$ en el instante 1. Un valor derivado cuyo valor final puede ser también negativo normalmente se puede descomponer en una combinación de derechos contingentes no negativos y una posición a corto plazo en alguno de los activos primarios. Consideraremos la siguiente definición formal de "derecho contingente":

Definición 4.9. Un *derecho contingente* es una variable aleatoria C en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$0 \leq C < \infty \quad P\text{-c.s.}$$

C se dice que es *derivado* de los activos primarios $S^0, S^1, \ldots, S^d$ si podemos escribir $C = f(S^0, \ldots, S^d)$ para una función f medible en $\mathbb{R}^{d+1}$.

Hasta ahora sólo hemos fijado los precios π^i de nuestros activos primarios S^i, por lo que no queda claro cual tendría que ser el precio adecuado para un derecho contingente general C. Nuestro objetivo ahora será, pues, identificar aquellos precios compatibles con los precios de los activos en el sentido en que no generen arbitraje. Modelizaremos esta nueva situación basándonos en que comercializando C en el instante 0 con precio π^C corresponde a introducir un nuevo activo con precios

$$\pi^{d+1} := \pi^C \quad \text{y} \quad S^{d+1} := C. \tag{4.7}$$

Definición 4.10. Un número real $\pi^C \geq 0$ diremos que es un *precio libre de arbitraje* para un derecho contingente C si el modelo de mercado extendido de acuerdo con (4.7) es libre de arbitraje. Al conjunto de todos los precios libres de arbitraje para C lo denotaremos por $\Pi(C)$.

En la definición anterior hemos realizado implícitamente la siguiente hipótesis: la introducción de un derecho contingente C como nuevo activo no modifica los precios de los activos primarios. Tenemos que ser conscientes de que esta suposición sólo es realista en el caso en que el volumen comercial de C sea pequeño comparado con el de los activos primarios.

El siguiente resultado nos muestra, en particular, que siempre podemos encontrar un precio libre de arbitraje para cualquier derecho contingente C dado si el modelo inicial está libre de arbitraje.

Teorema 4.11. *Supongamos que el conjunto $\mathcal{P}$ de medidas neutrales al riesgo equivalentes para el modelo de mercado original es no vacío; entonces el conjunto de precios libres de arbitraje de un derecho contingente C también es no vacío y viene dado por*

$$\Pi(C) = \left\{ E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right]; P^* \in \mathcal{P} \text{ tal que } E_{P^*}[C] < \infty \right\}. \tag{4.8}$$

Demostración. Por el Teorema 4.5, π^C es un precio libre de arbitraje para C si, y sólo si, existe una medida neutral al riesgo $\tilde{P}$ equivalente a P para el modelo de mercado extendido mediante (4.7):

$$\pi^i = E_{\tilde{P}}\left[\frac{S^i}{1+r}\right] \quad \text{para } i = 1, \ldots, d, d+1.$$

En particular, $\tilde{P}$ tiene que estar contenida en $\mathcal{P}$ necesariamente, de donde obtenemos la inclusión $\subseteq$ en (4.8), Recíprocamente, si $\pi^C = E_{P^*}[C/(1+r)]$ para alguna $P^* \in \mathcal{P}$, P^* es también una medida neutral al riesgo equivalente para el modelo de mercado extendido, de modo que los dos conjuntos en (4.8) son iguales.

Para mostrar que Π^C es no vacío, primero fijamos una medida $\tilde{P} \approx P$ tal que $E_{\tilde{P}}[C] < \infty$. Por ejemplo, podemos tomar $d\tilde{P} = c(1+C)^{-1}dP$, donde c es la constante de normalización. Bajo $\tilde{P}$ el modelo de mercado está libre de arbitraje, y a través del Teorema 4.5 podemos asegurar que existe $P^* \in \mathcal{P}$ tal que la densidad $dP^*/d\tilde{P}$ está acotada; en particular, $E_{P^*}[C] < \infty$ y $\pi^C = E_{P^*}[C/(1+r)] \in \Pi^C$. □

El siguiente teorema nos proporciona una caracterización de las cotas inferior y superior

$$\pi_{\inf}(C) := \inf \Pi(C) \quad \text{y} \quad \pi_{\sup}(C) := \sup \Pi(C),$$

que suelen recibir el nombre de *cotas de arbitraje* para C.

Teorema 4.12. *En un modelo de mercado sin arbitraje, las cotas de arbitraje de un derecho contingente C vienen dadas por*

$$\begin{aligned}\pi_{\inf}(C) &= \inf_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] \\ &= \max\left\{m \in [0,\infty) \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^d \text{ con } m + \xi \cdot Y \leq \frac{C}{1+r} \ P\text{-c.s.}\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_{\sup}(C) &= \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] \\ &= \min\left\{m \in [0,\infty) \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^d \text{ con } m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \ P\text{-c.s.}\right\}\end{aligned}$$

Demostración. Sólo demostraremos las igualdades asociadas a la cota superior de arbitraje; la expresión asociada a la cota inferior se demuestra de manera similar. Tomamos $m \in [0,\infty]$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$ tales que $m + \xi \cdot Y \geq C/(1+r)$ P-c.s., y denotamos por M el conjunto de todas estas m. Considerando la esperanza respecto a $P^* \in \mathcal{P}$, tenemos que $m \geq E_{P^*}[C/(1+r)]$, pudiendo escribir así

$$\begin{aligned}\inf M &\geq \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] \\ &\geq \sup\left\{E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] \mid P^* \in \mathcal{P},\ E_{P^*}[C] < \infty\right\} = \pi_{\sup}(C),\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde en la última identidad hemos utilizado el Teorema 4.11.

Mostraremos ahora que todas las desigualdades en (4.9) son en realidad identidades. Esto es trivial para $\pi_{\sup}(C) = \infty$; para $\pi_{\sup}(C) < \infty$, mostraremos que $m > \pi_{\sup}(C) \Rightarrow m \geq \inf M$. Por definición, $\pi_{\sup}(C) < m < \infty$ requiere la existencia de una oportunidad de arbitraje en el modelo de mercado extendido a través de (4.7); es decir, existe $(\xi, \xi^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que

$\xi \cdot Y + \xi^{d+1}(C/(1+r) - m)$ es casi seguramente no negativo y estrictamente positivo con probabilidad positiva. Dado que el mercado original está libre de arbitraje, ξ^{d+1} no puede ser 0; de hecho, aplicando esperanzas respecto a $P^* \in \mathcal{P}$ con $E_{P^*}[C] < \infty$ obtenemos

$$\xi^{d+1}\left(E_{P^*}\left[\frac{C}{1+r}\right] - m\right) \geq 0,$$

y como el término en el paréntesis es negativo debido a que $m > \pi_{\sup}(C)$, vemos que $\xi^{d+1} < 0$. Por lo tanto, podemos definir $\zeta := -\xi/\xi^{d+1} \in \mathbb{R}^d$ y obtener $m + \zeta \cdot Y \geq C/(1+r)$ P-c.s., y así $m \geq \inf M$.

Veamos que el ínfimo de M se alcanza; para ello, asumimos sin pérdida de generalidad que $\inf M < \infty$ y que el modelo de mercado no es redundante en el sentido de la Definición 4.8. Para una secuencia $m_n \in M$ que decrezca hacia $\inf M = \pi_{\sup}(C)$, fijamos $\xi_n \in \mathbb{R}^d$ tal que $m_n + \xi_n \cdot Y \geq C/(1+r)$ P-c.s.; si $\liminf_n |\xi_n| < \infty$, existe una subsecuencia de (ξ_n) que converge a algún $\xi \in \mathbb{R}^d$. Aplicando limites, obtenemos $\pi_{\sup}(C) + \xi \cdot Y \geq C/(1+r)$ P-c.s., lo cual implica que $\pi_{\sup}(C) \in M$. Como a continuación comprobaremos, el caso en que $\liminf_n |\xi_n| = \infty$ no puede ocurrir, de manera que éste es el resultado que buscábamos.

En efecto, tras adoptar alguna subsecuencia en caso necesario, $\eta_n := \xi_n/|\xi_n|$ converge a alguna $\eta \in \mathbb{R}^d$ con $|\eta| = 1$. Bajo la suposición de que $|\xi_n| \to \infty$, aplicando limites en

$$\frac{\pi_{\sup}(C)}{|\xi_n|} + \eta_n \cdot Y \geq \frac{C}{|\xi_n|(1+r)} \quad P\text{-c.s.}$$

vemos que $\eta \cdot Y \geq 0$. La ausencia de arbitraje implica, pues, que $\eta \cdot Y = 0$ P-c.s., y la no redundancia del modelo nos permite obtener finalmente que $\eta = 0$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $|\eta| = 1$. $\square$

Observación 4.13. El Teorema 4.12 muestra que $\pi_{\sup}(C)$ es el menor precio posible de una cartera $\overline{\xi}$ con

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} \geq C \quad P\text{-c.s.}$$

Una cartera así recibe el nombre de *estrategia de supercobertura* o *superreplicación*: a través de $\overline{\xi}$, el *vendedor* de C estaría protegido contra cualquier posible reclamo del comprador de C. Así, un objetivo natural para el vendedor sería financiar una cartera de este estilo a partir de los ingresos obtenidos por C. Recíprocamente, el objetivo del *comprador* seria cubrir el precio de C a través de la venta de una cartera $\overline{\eta}$ con

$$\overline{\eta} \cdot \overline{S} \leq C \quad P\text{-c.s.},$$

que es posible únicamente si $\overline{\pi} \cdot \overline{\eta} \leq \pi_{\inf}(C)$. $\diamondsuit$

Una cartera $\overline{\xi}$ curo resultado final $V = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ es positivo puede interpretarse como un derecho contingente, y en particular como un derivado; estamos especialmente interesados en aquellos derechos contingentes que pueden ser replicados por una determinada cartera.

Definición 4.14. Un derecho contingente C se dice que es *factible*, o bien *replicable*, si $C = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ P-c.s. para alguna cartera $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$. A esta cartera estratégica $\overline{\xi}$ se le llama *cartera de réplica* para C.

Notemos que si un derecho contingente C puede ser replicado por alguna cartera $\overline{\xi}$, entonces el problema de determinar el precio de C tiene una solución trivial: es único e igual al valor $\overline{\xi} \cdot \overline{\pi}$ de la réplica debido a la ley de un precio. El siguiente corolario nos muestra, además, que sólo los derechos contingentes C factibles/replicables admiten un precio libre de arbitraje único.

Corolario 4.15. *Supongamos que el modelo de mercado está libre de arbitraje, y sea C un derecho contingente.*

(a) *C es replicable si, y sólo si, admite un único precio libre de arbitraje.*

(b) *Si C no es replicable, entonces $\pi_{\text{inf}}(C) < \pi_{\text{sup}}(C)$ y*

$$\Pi(C) = (\pi_{\text{inf}}(C), \pi_{\text{sup}}(C)).$$

Demostración. Tenemos que el número de elementos de $\Pi(C)$ es 1 si C es replicable, por lo que observamos que (b)$\Rightarrow$(a).

Para demostrar la parte (b), notemos en primer lugar que $\Pi(C)$ es no vacío y convexo debido a la convexidad de $\mathcal{P}$, de donde podemos concluir que $\Pi(C)$ es un intervalo. Para ver que es un intervalo abierto, es suficiente comprobar que no hay posibilidad de que contenga sus puntos limites, $\pi_{\text{inf}}(C)$ y $\pi_{\text{sup}}(C)$. Para ello, usamos el Teorema 4.12 para obtener $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\pi_{\text{inf}}(C) + \xi \cdot Y \leq \frac{C}{1+r} \quad P\text{-c.s.}$$

Dado que C no es replicable, esta desigualdad no puede ser una identidad casi segura. Así, con $\xi^0 := -(1+r)\pi_{\text{inf}}(C)$, la estrategia $(\xi^0, -\xi, 1) \in \mathbb{R}^{d+2}$ es una oportunidad de arbitrage en el modelo de mercado extendido por (4.7), de manera que $\pi_{\text{inf}}(C)$ no es un precio libre de arbitraje para C. Se puede comprobar que $\pi_{\text{sup}} \notin \Pi(C)$ a través de un argumento similar. $\square$

Para acabar, daremos nombre a la deseada situación particular en la que todos los derechos contingentes son replicables.

Definición 4.16. Un modelo de mercado sin arbitrage se dice que es *completo* si todo derecho contingente es replicable.

Observación 4.17. Mencionar, por último, un resultado muy conocido sobre los modelos de mercado completos, el cual los caracteriza según sus conjuntos de medidas neutrales al riesgo: *un modelo de mercado sin arbitraje es completo si, y sólo si, existe únicamente una medida de probabilidad neutral al riesgo.* $\Diamond$

5. Conic-finance

En esta última sección trataremos de fundamentar el modelo de conic-finance. Nuestro objetivo, como aclaramos en la Introducción, no son las propias aplicaciones del modelo, que por otra parte son muchas y muy interesantes, sino más bien presentar sus bases y, a partir de ellas, desarrollarlo desde un punto de vista teórico con cierta rigurosidad matemática apoyándonos en toda la teoría de medidas monetarias de riesgo introducida en secciones anteriores.

En el modelo de conic-finance, los mercados financieros son vistos como una contraparte para sus participantes, distinguiendo dos direcciones de comercialización: la de comprar a los mercados y, por otro lado, la de vender a los mismos. Este punto de vista propone una nueva ley de dos precios:

- *Precio de venta (ask price):* El mercado vende y los agentes compran a este precio.
- *Precio de compra (bid price):* El mercado compra y los agentes venden a este precio.

en contra de la ley de un único precio en la que se basan los modelos clásicos de mercados líquidos. En primer lugar, intentaremos aclarar la idea que ha motivado este nuevo modelo. En el apartado siguiente, introduciremos las bases teóricas generales a partir de las cuales trataremos de obtener la aceptabilidad de cualquier flujo de efectivo dependiendo de un cierto nivel de estrés del mercado; una vez obtenida, buscaremos las expresiones de los precios de venta y de compra. Por último, nos centraremos en un caso particular del modelo general en el cual, añadiendo ciertas condiciones adicionales, llegaremos a un modelo paramétrico para flujos de efectivo aceptables que nos proporcionará unas expresiones de ambos precios calculables.

Durante esta sección, supondremos que el espacio de flujos de efectivo $\mathcal{X}$, entendiendo flujo de efectivo como cualquier tipo de activo o derecho contingente, está formado por todas las variables aleatorias acotadas sobre un determinado espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; además, consideraremos la relación de equivalencia (A.2), de manera que podremos identificar $\mathcal{X}$ con el espacio de Banach $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Más adelante precisaremos qué flujos de efectivo consideramos aceptables o no para el mercado, pero adelantamos ya de entrada que el conjunto de todos los flujos de dinero no negativos lo son.

5.1. Motivación

Es importante, antes de iniciar el desarrollo del nuevo modelo, incidir en un punto clave de los modelos clásicos de mercados líquidos que ha motivado el planteamiento de esta nueva perspectiva. Clásicamente se han modelado mercados libres de arbitraje completos, donde cualquier flujo de efectivo C es replicable por una cierta cartera estratégica, pudiéndose determinar así un único precio libre de arbitraje de C, π^C, que iguale el valor inicial de dicha cartera. Notemos que, por el resultado presentado en la Observación 4.17, esto equivale a la existencia y unicidad de una medida neutral al riesgo $\mathcal{Q}$ equivalente a P.

Analicemos el papel que desempeña la unicidad de este precio libre de arbitraje. Los flujos de efectivo $X := C - \pi^C$ y $-X := \pi^C - C$ podemos interpretarlos como los flujos resultantes cuando el mercado compra o vende C al precio π^C, respectivamente; notemos que ambos flujos tienen un valor resultante de 0, y por tanto son aceptables para el mercado. Esto implica que los participantes del mercado tienen la opción de comercializar con el flujo C en ambas direcciones (comprándolo a vendiéndolo al mercado) a este mismo precio π^C, validándose así la ley de un precio clásica.

Sin embargo, veamos qué sucede al trabajar con mercados incompletos, en los cuales encontrar una cartera estratégica para replicar un flujo de efectivo C cualquiera no es posible en general, y por lo tanto, como subraya el Corolario 4.15, es probable que tuviéramos todo un intervalo de precios libres de arbitraje posibles para C. Esta incertidumbre en la tarificación del precio acarrea un riesgo para los participantes del mercado que no se contempla en el caso de mercados completos.

En efecto, supongamos que el mercado compra un flujo de efectivo C. El flujo resultante sería $X := C - \omega$, donde ω será un precio tal que $X \geq 0$; de entre todos los precios libres de arbitraje disponibles, pues, el mercado tenderá a pagar el mínimo de ellos, de manera que garantice que el flujo de efectivo resultante X sea no negativo en todos los casos. En el caso en que el mercado lo venda, aplicando la misma lógica esperaríamos, por contra, que el flujo resultante fuera $-X := (\omega + s) - C$ con $s > 0$, de manera que, en esta ocasión, $-X \geq 0$ en todos los casos. Fijémonos en que, en ambas situaciones, los participantes del mercado deben asumir el riesgo asociado a la incertidumbre del precio de C que mencionábamos.

De esta manera, la principal motivación para substituir la ley de un solo precio de los modelos financieros clásicos por una nueva ley de dos precios es, precisamente, la posibilidad de modelar también mercados incompletos.

5.2. Modelo general de Conic-finance

Lo primero en lo que nos vamos a centrar es en determinar las características del conjunto de flujos de efectivo aceptables o de coste cero, que denotaremos por $\mathcal{A}$; este conjunto contendrá todos los flujos de efectivo que realmente podrían ser comercializados desde el punto de vista de una agencia supervisora. Ya hemos comentado que, en particular, todos los flujos de efectivo no negativos los consideraremos aceptables. Además, con el objetivo de otorgar a este conjunto comportamientos semejantes a los mercados financieros reales, impondremos que satisfaga las siguientes propiedades:

- $\mathcal{A}$ cerrado respecto al escalado por una constante positiva: si $X \in \mathcal{A}$, $\lambda X \in \mathcal{A}$ $\forall \lambda > 0$.
- $\mathcal{A}$ cerrado respecto a la suma: si $X, Y \in \mathcal{A}$, $X + Y \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ satisface la propiedad de clausura (2.5), i.e., para $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in L^\infty$ cualquiera, el conjunto $\{\lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}\}$ es cerrado en $[0,1]$.

Fijémonos en que estas condiciones implican que el conjunto de flujos de efectivo aceptables es un cono convexo; así pues, puesto que $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío que satisface los axiomas (2.3) y (2.4), podemos aplicar el apartado (d) de la Proposición 2.12 y asegurar que dicho conjunto induce una medida monetaria de riesgo $\rho_{\mathcal{A}}$ coherente con $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$. Además, dado que $\mathcal{A}$ cumple la propiedad de clausura (2.5),por el apartado (b) de la Proposición 2.8

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} := \{X \in L^\infty \mid \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq 0\}. \tag{5.1}$$

Notemos que, en particular, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$, i.e., $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

Como L^∞ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$, a través del razonamiento presentado en la Observación A.11 podemos asegurar que es un espacio localmente convexo. Así, puesto que el conjunto $\mathcal{A}$ de flujos de efectivo aceptables es cerrado en L^∞, estamos en condiciones de aplicar el Teorema A.17 y de asegurar, pues, que $\mathcal{A}$ es cerrado respecto a la topología débil $\sigma(L^\infty,(L^\infty)^*)$; atendiendo a la Observación A.19, es fácil ver que entonces $\mathcal{A}$ también es cerrado respecto a la topología débil* $\sigma(L^\infty, L^1)$. Por lo tanto, a través del Teorema 3.10 de representación de medidas de riesgo convexas, así como al Corolario 3.11 para el caso de medidas coherentes, obtenemos que $\rho_{\mathcal{A}}$ puede ser representada como

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \sup_{\mathcal{Q}\in Q} E_{\mathcal{Q}}[-X], \quad X \in L^\infty, \tag{5.2}$$

para un cierto conjunto

$$Q \subseteq Q_{\max} = \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P) \mid E_{\mathcal{Q}}[X] \geq -\rho_{\mathcal{A}} \ \forall X \in L^\infty\} \subset \mathcal{M}_1(P) \tag{5.3}$$

de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ absolutamente continuas respecto a P. Substituyendo la expresión (5.2) en (5.1), podemos escribir el conjunto de flujos de efectivo aceptables como

$$\mathcal{A} = \{X \in L^\infty \mid E_{\mathcal{Q}}[X] \geq 0 \quad \forall \mathcal{Q} \in Q\} \tag{5.4}$$

para un Q como en (5.3). En general, supondremos que Q contiene como mínimo una medida neutral al riesgo; de esta manera, por el Teorema 4.5, nos aseguramos la ausencia de arbitraje.

Nuestro modelo de mercado está definido a través de las especificaciones que imponemos sobre los flujos de efectivo para considerarlos aceptables, las cuales no esperamos que siempre sean las mismas sino que puedan variar dependiendo de la situación social y económica que se suceda. Esto se traduce en que el conjunto de aceptación $\mathcal{A}$, que recordemos que se trata de un cono convexo en todos los casos, puede ver modificado su tamaño; de cara a modelar esta variación, bajo una noción estática de los flujos de efectivo aceptables, utilizaremos un parámetro para calibrar el nivel de estrés del mercado de manera que el cono convexo de aceptación se contraiga al aumentar los niveles de estrés.

Nuestra idea es modelar el tamaño del conjunto de aceptación $\mathcal{A}$ a través de la variación de los conjuntos de medidas de probabilidad (5.3) que permiten la expresión de dicho conjunto $\mathcal{A}$. Para ello, introduciremos el concepto de índice de aceptabilidad que nos permitirá hablar de flujos de efectivo aceptables al nivel γ.

Definición 5.1. Sea $\mathcal{X}$ un espacio lineal de variables aleatorias acotadas. Un *índice de aceptabilidad* es una aplicación $\alpha : \mathcal{X} \to [0,\infty]$ que asocia a cada variable aleatoria $X \in \mathcal{X}$ un número $\alpha(X) \in [0,\infty]$ al que nos referiremos como nivel de aceptabilidad de X; así, diremos que $X \in \mathcal{X}$ es *aceptable al nivel* γ si $\alpha(X) \geq \gamma$. Todo índice de aceptabilidad α cumple las siguientes cuatro propiedades (con $X, Y \in \mathcal{X}$):

- El conjunto de variables aleatorias aceptables al nivel γ es cerrado respecto a la suma: si X, Y son aceptables al nivel γ, $X + Y$ también es aceptable al nivel γ.
- Si X es aceptable al nivel γ e $Y \geq X$, Y también es aceptable al nivel γ.
- El conjunto de variables aleatorias aceptables al nivel γ es cerrado respecto al escalado por una constante positiva: si X es aceptable al nivel γ, λX también es aceptable al nivel γ para toda $\lambda > 0$
- El conjunto de variables aleatorias aceptables al nivel γ es cerrado respecto a la convergencia en probabilidad.

A continuación presentamos un teorema de representación básico para estas aplicaciones; muestra que cualquier índice de aceptabilidad α está relacionado con una familia de conjuntos $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ de medidas de probabilidad que crece a través del parámetro γ, de manera que el valor $\alpha(X)$ es el mayor nivel γ tal que la esperanza de X es positiva respecto a cada medida del conjunto Q_γ.

Teorema 5.2. *Una aplicación $\alpha : L^\infty \to [0,\infty]$ es un índice de aceptabilidad si, y sólo si, existe una familia de subconjuntos $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ de $\mathcal{M}_1(P)$ tales que $Q_\gamma \subseteq Q_{\gamma'}$ para $\gamma \le \gamma'$ y*

$$\alpha(X) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+ \mid \inf_{\mathcal{Q}\in Q_\gamma} E_{\mathcal{Q}}[X] \ge 0\}, \tag{5.5}$$

donde $\inf \emptyset = \infty$ *y* $\sup \emptyset = 0$.

Demostración. No lo demostraremos; ver [4] (Teorema 1, demostración en el apéndice). □

Recordamos que hemos introducido el concepto de índice de aceptabilidad con la idea de poder modelar el tamaño del cono convexo de aceptación $\mathcal{A}$ a través de un parámetro (vemos que se tratará de γ) que modifique los conjuntos de medidas de probabilidad Q que cumplen (5.3). Así, para lograr nuestro objetivo de relacionar estos índices de aceptabilidad con el conjunto de aceptación $\mathcal{A}$ y su medida asociada $\rho_\mathcal{A}$, de aquí en adelante cuando hagamos referencia a un índice de aceptabilidad α, éste satisfará que la familia de subconjuntos asociada $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ con las propiedades descritas en el Teorema 5.2, y cuya existencia se demuestra en el mismo, estará contenida en el conjunto $Q_{\max} = \{\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_1(P) \mid E_\mathcal{Q}[X] \ge -\rho_\mathcal{A}\ \forall X \in L^\infty\}$.

Sea α un índice de aceptabilidad, y $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ la familia de subconjuntos de $Q_{\max}$ asociada; fijémonos en que la representación (5.5) está, pues, muy relacionada con la medida de riesgo coherente $\rho_\mathcal{A}$. Como cada funcional

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma} := \sup_{\mathcal{Q}\in Q_\gamma} E_\mathcal{Q}[-X], \quad \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

es una medida de riesgo coherente bien definida (equivalente a la expresión (5.2) para un cierto conjunto Q_γ), vemos que, en particular, α puede representarse como

$$\alpha(X) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+ \mid \rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) \le 0\}. \tag{5.6}$$

Así, tenemos que $(\rho_{\mathcal{A},\gamma})_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ es una familia de medidas de riesgo coherentes, creciente con γ, y asociada al indice de aceptabilidad α a través de la familia de subconjuntos $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$. Recordando la expresión (5.1), podemos de esta forma distinguir finalmente entre diferentes conos convexos de aceptación $\mathcal{A}_\gamma$

$$\mathcal{A}_\gamma := \{X \in L^\infty \mid \rho_{\mathcal{A},\gamma} \le 0\} = \{X \in L^\infty \mid E_\mathcal{Q}[X] \ge 0 \quad \forall \mathcal{Q} \in Q_\gamma\} \tag{5.7}$$

dependiendo del nivel de aceptabilidad γ considerado, tal como buscábamos.

Observación 5.3. Notemos que si $X \in L^\infty$ es α-aceptable a un cierto nivel $\gamma > 0$, i.e., $\alpha(X) \ge \gamma$, podemos deducir a partir de (5.5) que

$$E_\mathcal{Q}[X] \ge 0\ \forall \mathcal{Q} \in Q_\lambda,\ 0 \le \lambda \le \gamma,$$

por lo que, en particular, X también es α-aceptable para todo nivel $\lambda \le \gamma$. Esto nos permite interpretar la relación entre el parámetro γ y los diferentes conos de aceptación $\mathcal{A}_\gamma$ dependiendo de la situación económica: cuando crece γ, los conos de aceptación se contraen, como esperaríamos que sucediese en periodos de crisis con alta aversión a las pérdidas; por contra, cuando γ decrece, dichos conos $\mathcal{A}_\gamma$ se dilatan, considerándose así flujos de efectivo con mayor riesgo, tal como ocurre en épocas de crecimiento económico. Así pues, γ puede verse, efectivamente, como un indicador del estrés, aumentando éste con su crecimiento. ♢

Observación 5.4. En general, supondremos que todos los conjuntos Q_γ, $\gamma \geq 0$, contienen como mínimo una medida neutral a riesgo, de modo que podamos asegurar por el Teorema 4.5 la ausencia de arbitraje de nuestro modelo en cualquier situación, para todo valor de γ. $\Diamond$

Nuestro siguiente paso será, fijado un nivel de aceptabilidad γ para un determinado índice de aceptabilidad α, afrontar el problema de determinar el precio de riesgo de un flujo de efectivo, que representaremos por una variable aleatoria X, cuando es comprado o vendido por el mercado. Cuando el mercado vende un flujo de efectivo X, esperamos que solicite por él un precio minimal a motivado por la competencia; a la misma vez, el flujo de efectivo resultante de la venta, $a - X$, debe ser α-aceptable al nivel γ o, equivalentemente, debe estar incluido en el cono convexo de aceptación $\mathcal{A}_\gamma$. Este precio minimal a es el que definimos como *precio de venta (ask price)* de X. Para que $a - X$ sea aceptable al nivel γ, el precio de venta a debe ser mayor que que $E_\mathcal{Q}[X]$ para toda $\mathcal{Q} \in Q_\gamma$, de donde obtenemos la siguiente expresión para dicho precio minimal:

$$\begin{aligned} a_\gamma(X) &= \inf \{a \mid \alpha(a - X) \geq \gamma\} \\ &= \inf \{a \mid E_\mathcal{Q}[a - X] \geq \gamma \ \forall \mathcal{Q} \in Q_\gamma\} \\ &= \sup_{\mathcal{Q} \in Q_\gamma} E_\mathcal{Q}[X]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Por contra, cuando el mercado compra X a un precio b, es el flujo de efectivo resultante $X - b$ el que debe ser aceptable al nivel γ; así, podemos obtener una expresión análoga para el precio maximal b, al que nos referiremos como *precio de compra (bid price)*:

$$b_\gamma(X) = \inf_{\mathcal{Q} \in Q_\gamma} E_\mathcal{Q}[X]. \tag{5.9}$$

Notemos como, en particular, el precio de venta domina al precio de compra, i.e., $a_\gamma(X) \geq b_\gamma(X)$.

Observación 5.5. También podemos tratar de fijar los precios de X en el caso en que se puedan considerar estrategias de cobertura, i.e., carteras autofinanciadas que pueden ser compradas o vendidas en el momento de venta o compra de un flujo de efectivo X, respectivamente, de manera que la operación global sea α-aceptable a un cierto nivel. Así, introduciremos un conjunto $\mathcal{H}$ de flujos de efectivos formado por todas las carteras que pueden convertirse en estrategias de cobertura de coste cero; una variable aleatoria $H \in \mathcal{H}$ representa el flujo de efectivo recibido al seguir una cierta cartera de coste cero o autofinanciada. El precio de venta de X se define entonces como el menor precio a con el que el mercado puede adquirir una estrategia de cobertura que cumple la siguiente propiedad: cuando el mercado vende X al mismo precio a, el flujo de efectivo resultante de toda la operación, teniendo en cuenta la compra de dicha estrategia de cobertura, acaba siendo α-aceptable al nivel γ. Matemáticamente, el precio de venta al nivel γ sería

$$a_\gamma(X) = \inf\{a : \text{ existe una cartera } H \in \mathcal{H} \text{ tal que } \alpha(a + H - X) \geq \gamma\},$$

donde $a + H$ representa el valor final de la cartera autofinanciada y valor inicial a. Si pensamos en el precio de compra de X, pasaría a ser el mayor precio b al cual el mercado puede vender una estrategia de cobertura que satisface la siguiente propiedad: cuando el mercado compra X al mismo precio b, el flujo de efectivo resultante de toda la operación, teniendo en cuenta la venta de dicha estrategia de cobertura, acaba siendo α-aceptable al nivel γ. Así, podemos expresar matemáticamente el precio de compra al nivel γ como:

$$b_\gamma(X) = \sup\{b : \text{ existe una cartera } H \in \mathcal{H} \text{ tal que } \alpha(-b - H + X) \geq \gamma\}.$$

$\Diamond$

5.3. Modelo paramétrico

En este apartado, basándonos en el modelo general de conic-finance, partiremos con el objetivo de encontrar un modelo paramétrico para los conos de aceptación. Recordamos que cada índice de aceptabilidad α lleva asociado una familia de subconjuntos $(Q_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}_+}$ del conjunto $Q_{\max}$ de representación de $\rho_{\mathcal{A}}$, que a su vez definen las medidas de riesgo coherentes $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$ y los conos de aceptación $\mathcal{A}_\gamma$ a cualquier nivel $\gamma \geq 0$. Antes de empezar con el desarrollo, no obstante, añadiremos un par de hipótesis con las que trabajaremos de aquí en adelante:

- En primer lugar, para cada nivel $\gamma \geq 0$ asumiremos que Q_γ es tal que el conjunto de densidades $\mathcal{D} = \{d\mathcal{Q}/dP \mid \mathcal{Q} \in Q_\gamma\}$ es compacto débil en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Esto, como veremos, acabará resultando muy útil, y aunque pueda parecer una condición restrictiva es en realidad una situación típica en modelos concretos.
- En segundo lugar. tal como se plantea en [4], supondremos que todo flujo de efectivo para ser considerado aceptable u operacional deberá cumplir, además, que dependa únicamente de su ley de probabilidad asociada. Para comprobar la aceptabilidad al nivel γ de un flujo de efectivo X, por lo tanto, lo único que necesitaremos saber es la función de distribución F_X asociada a la variable aleatoria X. Esta suposición debe interpretarse como una primera aproximación, ya que en general el mercado puede verse condicionado por otros aspectos más complejos que las leyes de probabilidad de los flujos que comercializa.

A continuación analizaremos las consecuencias de ambas.

En cuanto a la primera, notemos que, como Q_γ representa a $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$, por el Corolario 3.12 las medidas $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$ son contínuas por arriba y las podemos escribir

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = \max_{\mathcal{Q}\in Q_\gamma} E_{\mathcal{Q}}[-X] \quad \forall X \in L^\infty.$$

En particular, esto nos garantiza la existencia de una medida de probabilidad $\mathcal{Q}^* \in Q_\gamma$ para la cual se alcanza el máximo de la expresión anterior, i.e., para la cual $\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = E_{\mathcal{Q}^*}[-X] \quad \forall X \in L^\infty$. De hecho, podríamos encontrarnos ante un subconjunto $Q^*_\gamma \subset Q_\gamma$ de varias medidas Q^* con esta propiedad; en este caso, si buscáramos representar cada conjunto Q_γ a través de una sola medida que permitiera la expresión anterior, podríamos escoger una cualquiera del conjunto Q^*_γ sin pérdida de generalidad de cara a nuestros objetivos. Así pues, distinguiremos de aquí en adelante una cierta medida $\mathcal{Q}_\gamma$ de cada conjunto Q_γ tal que permite la expresión

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = E_{\mathcal{Q}_\gamma}[-X] = -\int X d\mathcal{Q}_\gamma \quad \forall X \in L^\infty. \tag{5.10}$$

En cuanto a la segunda hipótesis realizada, ésta implica que todo cono de aceptación $\mathcal{A}_\gamma$, independientemente del nivel γ, depende únicamente de las leyes de probabilidad de los flujos de efectivo que contiene. Dado que, en particular,

$$\mathcal{A}_\gamma = \{X \in L^\infty \mid \rho_{\mathcal{A},\gamma} \leq 0\},$$

podemos relacionar dicha propiedad de $\mathcal{A}_\gamma$ con la propiedad de invariancia en ley de la medida de riesgo coherente $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$. A partir de la teoría de las medidas de riesgo convexas invariantes en ley desarrollada en las secciones 3.4 y 3.5, y con la ayuda de la primera hipótesis, podemos llegar a relacionar cada medida $\mathcal{Q}_\gamma$ representativa de cada conjunto Q_γ (en el sentido ya especificado) con una cierta función de distorsión cóncava ψ^γ:

– Primero, a partir de la demostración del Teorema 3.28, obtenemos una correspondencia entre $\mathcal{Q}_\gamma$ y una cierta medida de probabilidad μ_γ en el intervalo $(0,1]$; de hecho, podemos extender la definición de μ_γ en el intervalo cerrado $[0,1]$ ya que $\mu^\gamma(\{0\}) = 0$ (esta condición sigue de la Observación 3.45 debido a la invariancia en ley y continuidad por arriba de $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$), de manera que podemos expresar

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = \rho_{\mu_\gamma}(X) = \int_{[0,1]} AV@R_\lambda(X)\mu_\gamma(d\lambda) \quad \forall X \in L^\infty. \tag{5.11}$$

considerando $AV@R_0(X) = -\text{ess inf } X$.

– Acto seguido, a través del Lema 3.35 podemos relacionar directamente dicha medida de probabilidad μ_γ con una cierta función de distorsión ψ^γ, lo que a su vez nos permite comprobar la correspondencia entre $\mathcal{Q}_\gamma$ y ψ^γ que indicábamos. Así pues, finalmente el Corolario 3.42 nos muestra que podemos escribir $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$ como la integral de Choquet de la pérdida $-X$ respecto a la distorsión cóncava c_{ψ^γ} de la medida de probabilidad P:

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = \int (-X)dc_{\psi^\gamma} \quad \forall X \in L^\infty. \tag{5.12}$$

No obstante, en lugar de utilizar alguna de las representaciones (5.10), (5.11) o (5.12) de las medidas $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$ encontradas hasta ahora, nos interesará más de cara a nuestro desarrollo seguir la representación que se deduce en la Observación 3.37; ésta proviene del resultado del Teorema 3.36 y es, por lo tanto, equivalente a las tres anteriores. Así, de aquí en adelante escribiremos

$$\rho_{\mathcal{A},\gamma}(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} xd\psi^\gamma(F_X(x)) \quad \forall X \in L^\infty, \tag{5.13}$$

donde, como ya sabemos, ψ^γ está relacionada con la medida $\mathcal{Q}_\gamma$. Atendiendo a la relación que marca (5.6) entre un cierto índice de aceptabilidad α y la medida $\rho_{\mathcal{A},\gamma}$, deducimos finalmente que los indices de aceptabilidad operacionales se pueden construir según

$$\alpha(X) = \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R}_+ \mid \int_{-\infty}^{+\infty} xd\psi^\gamma(F_X(x)) \geq 0\right\}. \tag{5.14}$$

El valor $\alpha(X)$ es, pues, el nivel máximo γ para el cual la esperanza de X sigue siendo positiva cuando distorsionamos su función de distribución mediante ψ^γ. Así, apoyándonos en el razonamiento de la Observación 5.3, podemos deducir que la familia de distorsiones cóncavas ψ^γ es creciente en γ, de modo que para cada flujo de efectivo $X \in L^\infty$ dichas distorsiones actúan sobre su función de distribución F_X desplazándola más y más hacia la izquierda a medida que incrementa γ; esto implicaría una reponderación cada vez mayor de las pérdidas y menor de las ganancias que estaría de acuerdo con la contracción del cono de aceptación que esperamos ver en esta dinámica de γ creciente.

Observación 5.6. Comparando las expresiones equivalentes de $\rho_\mathcal{A}$ (5.10) y (5.13), observemos que la esperanza bajo la distorsión cóncava $\int_{-\infty}^{+\infty} xd\psi^\gamma(F_X(x))$ es igual al valor esperado de X bajo la medida de probabilidad $\mathcal{Q}_\gamma$, $\int Xd\mathcal{Q}_\gamma$; así, podemos inferir que la medida $\mathcal{Q}_\gamma$ tiene densidad $\phi^\gamma(F_X(x))$ respecto a la medida original P, donde $\phi^\gamma(u) = d\psi^\gamma(u)/du$. Por lo tanto, podemos interpretar las esperanzas bajo distorsiones cóncavas como esperanzas bajo un cambio de medida $\mathcal{Q}_\gamma$ con densidad $\phi^\gamma(F_X(x))$ respecto a P. ◊

Para obtener aplicaciones prácticas de toda esta teoría, nos encontramos ahora ante el problema de seleccionar una cierta familia paramétrica de distorsiones ψ^γ de este estilo.

A continuación presentaremos algunas familias de distorsiones deducidas en [4]. En dicho artículo, a raíz de la interpretación presentada en la Observación 5.6 anterior, imponen dos condiciones que debe satisfacer una familia de distorsiones cóncavas ψ^γ a la hora de calcular el índice de aceptabilidad de un determinado flujo de efectivo X según (5.14)

- En primer lugar, para x tendiendo a menos infinito, y por lo tanto $F_X(x)$ tendiendo a cero, se asegura la aversión a las pérdida imponiendo que la densidad $\phi^\gamma(u) = d\psi^\gamma(u)/du$ tienda a infinito al tender u a cero.
- En segundo y último lugar, cuando x tiende a más infinito, i.e. $F_X(x)$ tiende a la unidad, se asegura que no haya una motivación para grandes beneficios imponiendo que la densidad $\phi^\gamma(u)$ tienda a cero si u tiende a uno.

Una familia de distorsiones que cumple estas características es la denominada *minmaxvar*:

$$\psi^\gamma(u) = 1 - \left(1 - u^{\frac{1}{1+\gamma}}\right)^{1+\gamma}, \; u \in [0,1], \; \gamma \geq 0.$$

Tal como se plantea en el artículo citado, es posible generalizar esta familia a una de dos parámetros, conocida como *minmaxvar2*, la cual viene dada por

$$\psi^{\lambda,\gamma}(u) = 1 - \left(1 - u^{\frac{1}{1+\lambda}}\right)^{1+\gamma}, \; u \in [0,1], \; \lambda, \gamma \geq 0,$$

por lo que en estas distorsiones, por una parte, el parámetro λ controla el ratio de convergencia al cual la densidad $\phi^{\lambda,\gamma}(u)$ se acerca a infinito cuando u tiende a cero, mientras γ hace lo propio con el ratio al cual dicha densidad se aproxima a cero al tender u a la unidad; es común, pues, referirse a λ como una medida de la aversión al riesgo en el mercado, así como a γ como una medida de la ausencia de motivación por beneficios. No obstante, pese a las ventajas de trabajar con esta familia *minmaxvar2*, no olvidemos que la teoría que hemos desarrollado sólo da explicación a un parámetro, el cual está relacionado con el índice de aceptabilidad α considerado[14]. Por este motivo, en lo que resta seguiremos refiriéndonos a las distorsiones cóncavas seleccionadas según ψ^γ, lo cual puede interpretarse, para simplificar, que estamos trabajando con la familia *minmaxvar*.

Llegados a este punto, estamos interesados en encontrar expresiones para los precios de venta y de compra que permitan su cálculo explícito a través de estas distorsiones; para ello, fijamos un nivel de aceptabilidad γ para un cierto índice de aceptabilidad α. En cuanto al precio de compra b, imponiendo que $Y = X - b$ sea aceptable a nivel γ, obtenemos a partir de (5.14) que

$$\begin{aligned} \alpha(Y) \geq \gamma \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} y d\psi^\gamma(F_Y(y)) \geq 0 \iff \int_{-\infty}^{+\infty} y d\psi^\gamma(F_X(y+b)) \geq 0 \\ \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b) d\psi^\gamma(F_X(x)) \geq 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $F_Y(y) = F_X(y+b)$. Así, podemos llegar finalmente a la expresión

$$b_\gamma(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\psi^\gamma(F_X(x)). \tag{5.15}$$

[14] Para dar cabida a ambos parámetros, una opción sería replantear esta teoría considerando un índice bidimensional de aceptabilidad.

En cuanto al precio de venta a, imponiendo esta vez que $Z = a - X$ sea aceptable a nivel γ, obtendríamos de una manera similar la siguiente expresión:

$$a_\gamma(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x d\psi^\gamma(F_{-X}(x)). \tag{5.16}$$

Por las expresiones equivalentes (5.8) y (5.9) de los precio de venta y de compra, es evidente que estas representaciones a través de distorsiones cóncavas mantienen la relación $a_\gamma \geq b_\gamma$.

Subrayamos finalmente el hecho de que las expresiones de los precios de compra y de venta obtenidas a partir de este modelo paramétrico facilitan, tal como buscábamos, los cálculos; se puede comprobar en aplicaciones de dicho modelo detalladas, por ejemplo, en los trabajos [5] y [9].

6. Conclusiones

En la primera parte de este trabajo, una vez presentadas las medidas monetarias de riesgo y sus conjuntos de aceptación, hemos podido realizar con éxito una caracterización progresiva de medidas de riesgo convexas (y coherentes) a medida que particularizábamos nuestro marco de trabajo e incluíamos en nuestro estudio nuevas propiedades y herramientas matemáticas. Destacamos los siguientes resultados:

- Las Proposiciones 2.6 y 2.8, que resumen las relaciones entre medidas monetarias de riesgo y sus conjuntos de aceptación, y en la misma línea la Proposición 2.12, la cual añade relaciones adicionales en el caso en que trabajemos con medidas de riesgo convexas o coherentes.

- La primera representación robusta de medidas de riesgo convexas, en términos de medidas finitamente aditivas, que nos proporciona el Teorema 3.2.

- El Teorema 3.10, el cual nos permite caracterizar todas aquellas medidas de riesgo convexas en L^∞ que admiten representación en términos de medidas de probabilidad, así como los Corolarios 3.11 y 3.12 para el caso de medidas de riesgo coherentes.

- La representación que obtenemos de las medidas de riesgo convexas, invariantes en ley y continuas por arriba en L^∞ a partir del Teorema 3.28, y su expresión equivalente a través de integrales de Choquet proporcionada por el Corolario 3.43; en el caso particular de medidas de riesgo coherentes, representaciones similares nos las ofrecen el Corolario 3.29 y el Corolario 3.42, respectivamente.

En cuanto a la segunda parte, a través del modelo de mercado financiero de un solo período que hemos presentado, hemos podido mostrar conceptos sobre modelización de mercados que necesitábamos aclarar antes de afrontar la teoría de Conic-finance. Remarcamos aquí las nociones de arbitraje, medida neutral al riesgo y modelo de mercado completo, y subrayamos especialmente el resultado del Teorema 4.5, el cual relaciona la ausencia de arbitraje en un modelo de mercado financiero con la existencia de medidas neutrales al riesgo.

En la tercera y última parte hemos introducido la teoría general de Conic-finance desde sus bases, viendo la imposición de ciertas condiciones sobre los conjuntos de flujos de efectivos aceptables a considerar; las relaciones entre conjuntos de aceptación y medidas monetarias de riesgo vistas en la Sección 1 nos ha permitido expresar el desarrollo posterior en términos de medidas de riesgo coherentes y continuas por arriba, las cuales, en particular, admiten la representación en L^∞ que nos ofrece el Corolario 3.11. Con dicha representación, y considerando los índices de aceptabilidad, hemos conseguido fundamentar la obtención de las expresiones generales (5.8) y (5.9) de los precios de venta y de compra, respectivamente, en función de un indicador de estrés del mercado. Además, a continuación hemos planteado la búsqueda de un modelo paramétrico de Conic-finance que permitiera un cálculo explícito de ambos precios, y para ello hemos seguido [5] e impuesto nuevas condiciones sobre los conjuntos de aceptación; en este caso, hemos logrado relacionar los conos de aceptación resultantes con medidas de riesgo coherentes, continuas por abajo e invariantes en ley que pueden representarse en función de integrales de Choquet respecto a una familia de distorsiones cóncavas; todo ello a través de resultados obtenidos en las Secciones 1 y 2. Con esta representación, e introduciendo una familia paramétrica de distorsiones cóncavas adecuada, de nuevo hemos logrado justificar el desarrollo de este modelo hasta encontrar las expresiones (5.15) y (5.16) de los precios de compra y venta que buscábamos.

Apéndice

A.1. Análisis funcional

Funciones y conjuntos convexos

Aquí mostraremos algunas características básicas de funciones y conjuntos convexos en espacios euclidianos. Utilizaremos la norma uclidiana: $|x| := \sqrt{x \cdot x}$ para toda $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposición A.1. *Supongamos que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo no vacío tal que $0 \notin \mathcal{C}$. Entonces existe $\eta \in \mathbb{R}^n$ con $\eta \cdot x \geq 0$ $\forall x \in \mathcal{C}$, y con $\eta \cdot x_0 > 0$ para al menos una $x_0 \in \mathcal{C}$. Además, si $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0$, podemos encontrar $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\inf_{x \in \mathcal{C}} \eta \cdot x > 0$.*

Demostración. Ver [8], Proposición A.1. □

Definición A.2. Sea A cualquier subconjunto de un espacio lineal E. La *envolvente convexa* de A se define como

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\},$$

y es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A. En particular, todo conjunto convexo coincide con su envolvente convexa.

Definición A.3. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una *función convexa propia* si $f(x) < \infty$ para algún $x \in \mathbb{R}$ y además

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0,1]$. El *dominio efectivo* de f, que denotamos por $\operatorname{dom} f$, es el conunto de todas las $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < \infty$.

Notemos que el dominio efectivo de una función convexa propia f es un intervalo real $S = \operatorname{dom} f$; si consideramos como función $f : S \to \mathbb{R}$, ésta es *convexa* en el sentido usual. Veamos a través de la siguiente proposición las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de una función convexa propia en su dominio efectivo:

Proposición A.4. *Sea f una función convexa propia y D el interior del dominio efectivo de f,* $\operatorname{dom} f$*.*

(a) *f es semicontinua por arriba en* $\operatorname{dom} f$ *y continua Lipschitz localmente en D.*

(b) *f admite derivadas laterales*

$$f'_-(y) := \lim_{x \uparrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad y \quad f'_+(y) := \lim_{x \downarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

para toda $y \in D$. Ambas derivadas laterales, además, son funciones crecientes y satisfacen $f'_- \leq f'_+$.

(c) *La derivada por la derecha f'_+ es continua por la derecha. La derivada por la izquierda f'_-, continua por la izquierda.*

(d) *f es diferenciable casi en todas partes en D.*

Demostración. Ver [8], Proposición A.4. □

Definición A.5. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, su *transformada de Fenchel-Legendre* se define como

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(yx - f(x) \right), y \in \mathbb{R}.$$

Si f es una función convexa propia, también se dice que f^* es la *función conjugada* de f.

Si $f \neq +\infty$, tenemos que f^* es convexa y semicontinua por abajo como supremo de las funciones afines $y \mapsto yx - f(x)$; en particular, f^* es una funcion convexa propia en su dominio efectivo.

Análisis funcional en espacios vectoriales de dimensión infinita

Introduciremos, en primer lugar, los espacios vectoriales de dimensión infinita L^p para $p \in [0, \infty]$, de especial relevancia a lo largo de todo este trabajo. Para ello, primero consideramos $p \in (0, \infty]$ y denotamos por $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el conjunto de todas las funciones $\mathcal{F}$-medibles Z en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que $\|Z\|_p < \infty$, donde

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[|Z|^p]^{1/p} & \text{si } p \in (0, \infty), \\ \inf\{c \geq 0 \mid P[|Z| > c] = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases} \tag{A.1}$$

Al conjunto de todas las variables aleatorias finitas P-c.s. lo denotaremos por $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Para $p \in [0, \infty]$, el espacio $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que en ocasiones escribiremos de manera simplificada por L^p, se obtiene a partir de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, identificando variables aleatorias que coinciden excepto en conjunto nulos por P. De esta manera, L^p consiste en todas las clases de equivalencia respecto a la relación de equivalencia

$$Z \sim \tilde{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad Z = \tilde{Z} \ P-\text{c.s.} \tag{A.2}$$

Definición A.6. Decimos que un espacio vectorial $\mathcal{X}$ es un *espacio de Banach* si está dotado de una norma $\|\cdot\|$ con la cual toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de $\mathcal{X}$.

Si $p \in [1, \infty]$, el espacio vectorial L^p es un espacio de Banach respecto a la norma $\|\cdot\|_p$ definida en (A.1). En el espacio L^0, utilizamos la topología de convergencia en la medida P. Esta topología está generada por la métrica

$$d(X, Y) := E[|X - Y| \wedge 1], \quad X, Y \in L^0. \tag{A.3}$$

No obstante, notemos que d no es una norma. En principio deberíamos distinguir entre variables aleatorias (en $\mathcal{L}^p$) y sus respectivas clases de equivalencia (en L^p). Para simplificar, sin embargo, usaremos la convención de identificar una variable aleatoria $Z \in \mathcal{L}^p$ con su clase de equivalencia, i.e., $Z \in L^p$.

Definición A.7. Un espacio lineal E que lleva asociado una topología es un *espacio vectorial topológico* si cada conjunto $\{x\}$, donde $x \in E$, es cerrado, y además las operaciones del espacio vectorial son continuas en el sentido siguiente:

- $(x, y) \mapsto x + y$ es una aplicación continua de $E \times E$ en E.

- $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ es una aplicación continua de $\mathbb{R} \times E$ en E.

Observación A.8. Todo espacio de Banach es un espacio vectorial topológico. $\diamondsuit$

El siguiente resultado es una generalización del argumento de separación presentado en la Proposición A.1 en un marco de dimensión infinita.

Teorema A.9. *En un espacio vectorial topológico E, cualquier par de conjuntos convexos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ disjuntos entre si, uno de los cuales tiene un punto interior, pueden ser separados a través de un funcional ℓ lineal, continuo y no nulo en E, i.e.,*

$$\ell(x) \leq \ell(y) \quad \text{para toda } x \in \mathcal{C} \text{ y toda } y \in \mathcal{B}. \tag{A.4}$$

Demostración. Ver [6], Teorema V.2.8. $\square$

Si se quiere separar estrictamente dos conjuntos convexos a través de un funcional lineal (y obtener así una desigualdad estricta en (A.4)), se requieren condiciones adicionales tanto en los conjuntos convexos como en el espacio E.

Definición A.10. Un espacio vectorial topológico E se dice que es un *espacio localmente convexo* si su topología tiene una base formada por conjuntos convexos.

Observación A.11. Si E es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, las bolas abiertas

$$\{y \in E \mid \|y - x\| < r\}, \quad x \in E, r > 0,$$

forman por definición una base para la topología de E. Puesto que estas bolas son, en particular, conjuntos convexos, todo espacio de Banach es pues localmente convexo. $\diamondsuit$

El siguiente teorema es una variante del teorema clásico de Hahn-Banach sobre la existencia de "hiperplanos separadores".

Teorema A.12. (Hahn-Banach) *Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos conjuntos convexos, disjuntos entre si y no vacíos de un espacio localmente convexo E. En este contexto, si $\mathcal{B}$ es compacto y $\mathcal{C}$ es cerrado, existe un funcional lineal ℓ en E tal que*

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} \ell(x) < \inf_{y \in \mathcal{B}} \ell(y).$$

Demostración. Ver [6], Teorema V.2.10. $\square$

De esta manera, en un espacio localmente convexo E, la colección

$$E' := \{\ell : E \to \mathbb{R} \mid \ell \text{ es continua y lineal}\} \tag{A.5}$$

separa los puntos de E: para dos puntos $x, y \in E$ diferentes, existe alguna $\ell \in E'$ tal que $\ell(x) \neq \ell(y)$.

Definición A.13. El espacio E' definido según (A.5) recibe el nombre de *espacio dual* o *dual* de E.

Como ejemplo, considerando $p \in [1, \infty)$, se puede comprobar que el dual de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ viene dado por $L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde q es tal que $1/p + 1/q = 1$.

Definición A.14. Sea E un espacio lineal, y supongamos que F es una clase lineal de funcionales lineales en E que separan los puntos de E. La *F-topología* en E, que denotaremos por $\sigma(E, F)$, es la topología en E que obtenemos tomando como base todos los conjuntos de la forma

$$\{y \in E \mid |\ell_i(y) - \ell_i(x)| < r, i = 1, \ldots, n\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, $\ell_i \in F$ y $r > 0$.

Veamos algunas propiedades de la F-topología:

Proposición A.15. *En la situación de la definición anterior, tenemos que*

(a) *E es un espacio localmente convexo con la F-topología.*

(b) *La F-topología es la topología más gruesa en E para la cual toda $\ell \in F$ es continua.*

(c) *El dual de E con la F-topología es F.*

Demostración. Consultar la sección V.3 de [6]. □

Definición A.16. Si E ya lleva asociada una topología localmente convexa, la E'-topología $\sigma(E, E')$, donde recordamos que E' denota el dual de E, recibe el nombre de *topología débil* en E.

Teorema A.17. *Supongamos que E es un espacio localmente convexo y que $\mathcal{C}$ es un subconjunto convexo de E. Entonces $\mathcal{C}$ es cerrado débil si, y sólo si, $\mathcal{C}$ es cerrado respecto a la topología original de E.*

Demostración. Si el conjunto convexo $\mathcal{C}$ es cerrado respecto a la topología original, por el Teorema A.12 es la intersección de los conjuntos $H = \{\ell \leq c\}$ tales que $H \supset \mathcal{C}$, y por lo tanto cerrados en la topología débil $\sigma(E, E')$. El recíproco se cumple claramente. □

Definición A.18. Dado un conjunto E localmente convexo, recíprocamente podemos considerar E como un conjunto de funcionales lineales en el espacio dual E' tomando $x(\ell) := \ell(x)$ para $\ell \in E'$ y $x \in E$. La *E-topología* $\sigma(E', E)$ obtenida de este modo se denomina la *topología débil** en E'. Por el apartado (c) de la Proposición A.15, E es el dual del espacio topológico $(E', \sigma(E', E))$.

Observación A.19. Centrémonos en el caso en que el espacio localmente convexo E es el espacio de Banach L^∞, cuyo dual denotaremos por $(L^\infty)^*$ (por el Teorema A.34, de hecho, podremos asociar el dual de L^∞ con el conjunto $ba(\Omega, \mathcal{F})$). A su vez tenemos que L^∞ es el dual del espacio L^1, pero el recíproco en general no es cierto: sólo podemos asegurar que $L^1 \subseteq (L^\infty)^*$. Así, observemos que las definiciones de topología débil y topología debil* en L^∞ se diferencian a causa de esta inclusión:

- La topología débil en L^∞ es la $(L^\infty)^*$-topología $\sigma(\text{Ł}^\infty, (L^\infty)^*)$, aquella en la que, para toda sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en L^∞,

$$X_n \longrightarrow X \text{ para alguna } X \in \text{Ł}^\infty \iff Y(X_n) \longrightarrow Y(X)\ \forall Y \in (L^\infty)^*.$$

- La topología débil* en L^∞ es la L^1-topología $\sigma(\text{Ł}^\infty, L^1)$; aquella en la que, para toda sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en L^∞,

$$X_n \longrightarrow X \text{ para alguna } X \in \text{Ł}^\infty \iff Y(X_n) \longrightarrow Y(X)\ \forall Y \in L^1.$$

Dado que, como hemos indicado, el conjunto L^1 está contenido en $(L^\infty)^*$ pero en general no es igual, notemos que la topología débil es en general más fina e incorpora la base de la topología débil*. Asimismo, fijémonos en que L^1 siempre acaba siendo el dual de L^∞ si dotamos a L^∞ con la topología débil* $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Para acabar este apartado, mostraremos tres resultados relacionados con las topologías débil y débil* introducidas; el primero de ellos nos conducirá a la caracterización de los conjuntos débilmente* cerrados de L^∞ que se recoge en el segundo, y el tercero es un resultado fundamental sobre conjuntos compactos débiles.

Teorema A.20. (Krein-Šmulian) *Sea E un espacio de Banach y supongamos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto convexo del espacio dual E'. Entonces $\mathcal{C}$ es cerrado débil* si, y sólo si, el conjunto $\mathcal{C} \cap \{x \in E' \mid \|x\|_{E'} \leq r\}$ es cerrado débil* para cada $r > 0$.*

Demostración. Ver [6], Teorema V.5.7. □

Lema A.21. *Un subconjunto convexo $\mathcal{C}$ de L^∞ es cerrado débil* si para cada $r > 0$*

$$\mathcal{C}_r := \mathcal{C} \cap \{X \in L^\infty \mid \|X\|_\infty \leq r\}$$

es cerrado en L^1.

Demostración. Dado que $\mathcal{C}_r$ es convexo y cerrado en L^1, por el Teorema A.17 es cerrado débil en L^1. Puesto que la inyección natural

$$(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1)) \longrightarrow (L^1, \sigma(L^1, L^\infty))$$

es continua, $\mathcal{C}_r$ es $\sigma(L^\infty, L^1)$-cerrado en L^∞. Así, vemos que $\mathcal{C}$ es cerrado débil* gracias al teorema anterior de Krein-Šmulian. □

Teorema A.22. (James) *En un espacio de Banach E, un subconjunto A convexo débilmente cerrado y acotado es compacto débil si, y sólo si, todo funcional lineal y continuo alcanza su supremo en A.*

Demostración. Consultar [7]. □

A.2. Teoría de la medida

Medidas de probabilidad

Consideremos un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición A.23. Una *medida de probabilidad* P es una función de conjuntos definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ tal que

- $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) \in [0, 1]$.
- $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = 1$.
- P es *numerablemente aditiva* o *σ-aditiva*: Para toda sucesión numerable $\{A_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos dos a dos se tiene que

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n). \tag{A.6}$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le denomina *espacio de probabilidad*. Denotaremos por $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad.

En este apartado nos centraremos en ver algunas relaciones entre medidas de probabilidad; así, supongamos que P y $\mathcal{Q}$ son dos medidas de probabilidad en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición A.24. Se dice que $\mathcal{Q}$ es *absolutamente continua* respecto a P en la σ-álgebra $\mathcal{F}$, y escribimos $\mathcal{Q} \ll P$, si $\forall A \in \mathcal{F}$

$$P[A] = 0 \quad \Longrightarrow \mathcal{Q}[A] = 0.$$

Si se cumple a la vez que $\mathcal{Q} \ll P$ y $P \ll \mathcal{Q}$, se dice que $\mathcal{Q}$ y P son *equivalentes*, y escribimos $\mathcal{Q} \approx P$.

El siguiente teorema nos proporciona una caracterización de la continuidad absoluta.

Teorema A.25. (Radon-Nikodyn) *$\mathcal{Q}$ es absolutamente continua respecto a P en $\mathcal{F}$ si, y sólo si, existe una función $\mathcal{F}$-medible $\varphi \geq 0$ tal que*

$$\int F d\mathcal{Q} = \int F\varphi dP \quad \textit{para toda función } \mathcal{F}\textit{-medible } F \geq 0. \tag{A.7}$$

Demostración. Consultar [2]. □

Definición A.26. La función φ recibe el nombre de *densidad* o *derivada de Radon-Nikodyn* de $\mathcal{Q}$ respecto a P, y escribimos

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dP} := \varphi.$$

Notemos que dicha densidad está unívocamente determinada por (A.7).

Corolario A.27. *Si $\mathcal{Q} \ll P$ en $\mathcal{F}$,*

$$\mathcal{Q} \approx P \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\mathcal{Q}}{dP} > 0 \ P - c.s.$$

En este caso, la densidad de P respecto a $\mathcal{Q}$ viene dada por

$$\frac{dP}{d\mathcal{Q}} = \left(\frac{d\mathcal{Q}}{dP}\right)^{-1}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{Q} \ll P$, y sea $\varphi := d\mathcal{Q}/dP$. Tomando una función $F \geq 0$ $\mathcal{F}$-medible, tenemos que

$$\int F d\mathcal{Q} = \int_{\{\varphi > 0\}} F\varphi dP = \int_{\{\varphi > 0\}} F d\mathcal{Q}.$$

En particular, $\mathcal{Q}[\varphi = 0] = 0$. Así, substituyendo F por $F\varphi^{-1}$,

$$\int F\varphi^{-1} d\mathcal{Q} = \int_{\{\varphi > 0\}} F\varphi^{-1} d\mathcal{Q} = \int_{\{\varphi > 0\}} F\varphi^{-1}\varphi dP.$$

Observemos que el último término de la expresión anterior es igual a $\int F dP$ para toda F si, y sólo si, $P[\varphi = 0] = 0$; esto demuestra el corolario. □

Si no se cumple que $\mathcal{Q} \ll P$ ni tampoco que $P \ll \mathcal{Q}$, podemos utilizar la siguiente *descomposición de Lebesgue* de P respecto a $\mathcal{Q}$.

Teorema A.28. *Para cualquier par de medidas de probabilidad $\mathcal{Q}$ y P en $(\Omega, \mathcal{F})$, existe un conjunto $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{Q}[N] = 0$ y una función $\varphi \geq 0$ $\mathcal{F}$-medible de manera que*

$$P[A] = P[A \cap N] + \int_A \varphi d\mathcal{Q} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Escribimos

$$\frac{dP}{d\mathcal{Q}} := \begin{cases} \varphi & \text{en } N^c, \\ +\infty & \text{en } N. \end{cases}$$

Demostración. Sea $R := \frac{1}{2}(\mathcal{Q} + P)$; tanto $\mathcal{Q}$ como P son absolutamente continuas respecto a R con densidades $d\mathcal{Q}/dP$ y dP/dR, respectivamente. Sea

$$N := \left\{ \frac{d\mathcal{Q}}{dR} = 0 \right\}.$$

Tenemos entonces que $\mathcal{Q}[N] = 0$. Ahora definimos

$$\frac{dP}{d\mathcal{Q}} := \varphi := \begin{cases} \frac{dP}{dR} \cdot \left(\frac{d\mathcal{Q}}{dR}\right)^{-1} & \text{en } N^c, \\ +\infty & \text{en } N. \end{cases}$$

Así pues, para $f \geq 0$ $\mathcal{F}$-medible,

$$\begin{aligned} \int f dP &= \int_N f dP + \int_{N^c} f \frac{dP}{dR} dR = \int_N f dP + \int_{N^c} f \frac{dP}{dR} \left(\frac{d\mathcal{Q}}{dR} \right)^{-1} d\mathcal{Q} \\ &= \int_N f dP + \int f \varphi d\mathcal{Q}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $\mathcal{Q}[N] = 0$. $\square$

Consideremos la descomposición de Lebesgue de P respecto a $\mathcal{Q}$ del teorema anterior. Fijado un $c \geq 0$, consideramos

$$A^0 := \left\{ \frac{dP}{d\mathcal{Q}} > c \right\},$$

y usaremos la convención de que $dP/d\mathcal{Q} = \infty$ en N.

Proposición A.29. (Lema de Neyman-Pearson) *Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathcal{Q}[A] \leq \mathcal{Q}[A^0]$, entonces $P[A] \leq P[A^0]$.*

Demostración. Sea $F := \mathbb{I}_{A^0} - \mathbb{I}_A$; tenemos que $F \geq 0$ en N, y $F \cdot (dP/d\mathcal{Q} - c) \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned} P[A^0] - P[A] &= \int F dP = \int_N F dP + \int F \cdot \frac{dP}{d\mathcal{Q}} d\mathcal{Q} \\ &\geq c \int F d\mathcal{Q} = c(\mathcal{Q}[A^0] - \mathcal{Q}[A]). \end{aligned}$$

Con esto acabamos la demostración. $\square$

Las funciones indicatriz de conjuntos solo toman los valores 0 y 1. A continuación, generalizaremos el Lema de Neyman.Pearson considerando funciones $\mathcal{F}$-medibles $\psi : \Omega \to [0,1]$; denotaremos por $\mathcal{R}$ el conjunto de todas estas funciones.

Teorema A.30. *Sea $\Pi := \frac{1}{2}(P+\mathcal{Q})$, y definimos la densidad $\varphi := dP/d\mathcal{Q}$ como ya hemos hecho anteriormente.*

(a) *Tomemos $c \geq 0$, y supongamos que $\psi^0 \in \mathcal{R}$ satisface* Π-*c.s.*

$$\psi^0 = \begin{cases} 1 & en\ \{\varphi > c\}, \\ 0 & en\ \{\varphi < c\}. \end{cases} \tag{A.8}$$

Entonces, para cualquier $\psi \in \mathcal{R}$,

$$\int \psi d\mathcal{Q} \leq \int \psi^0 d\mathcal{Q} \quad \Longrightarrow \quad \int \psi dP \leq \int \psi^0 dP. \tag{A.9}$$

(b) *Para cualquier $\alpha_o \in (0,1)$ hay alguna $\psi^0 \in \mathcal{R}$ de la forma* (A.8) *tal que $\int \psi^0 d\mathcal{Q} = \alpha_0$. En particular, si c es un $(1-\alpha_0)$-cuantil de φ bajo $\mathcal{Q}$, podemos definir ψ^0 como*

$$\psi^0 = \mathbb{I}_{\{\varphi>c\}} + \kappa \mathbb{I}_{\{\varphi=c\}} \quad con\ \kappa = \begin{cases} 0 & si\ \mathcal{Q}[\varphi = c] = 0, \\ \frac{\alpha_0 - \mathcal{Q}[\varphi>c]}{\mathcal{Q}[\varphi=c]} & contrariamente. \end{cases}$$

(c) *Cualquier $\psi^0 \in \mathcal{R}$ que cumpla* (A.9) *es de la forma* (A.8) *para algún $c \geq 0$.*

Demostración. (a): Se puede ver repitiendo la demostración de la Proposición A.29 tomando $F := \psi^0 - \psi$.

(b): Sea F la función de distribución de φ bajo $\mathcal{Q}$; entonces $\mathcal{Q}[\varphi > c] = 1 - F(c) \leq \alpha_0$ y

$$\mathcal{Q}[\varphi = c] = F(c) - F(c-) \geq F(c) - 1 + \alpha_0 = \alpha_0 - \mathcal{Q}[\varphi > c],$$

por lo que $\kappa \in [0,1]$ y $\psi^0 \in \mathcal{R}$. Por último, es evidente que $\int \psi^0 d\mathcal{Q} = \alpha_0$.

(c): Supongamos que ψ^* satisface

$$\int \psi d\mathcal{Q} \leq \int \psi^* d\mathcal{Q} \quad \Longrightarrow \quad \int \psi dP \leq \int \psi^* dP.$$

Los casos en que $\alpha_0 := \int \psi^* d\mathcal{Q}$ es igual a 0 o a 1 son triviales. Para $0 < \alpha_0 < 1$, podemos tomar ψ^0 como en el apartado (b), de manera que $\alpha_0 = \int \psi^* d\mathcal{Q} = \int \psi^0 d\mathcal{Q}$. También tenemos que $\int \psi^* dP = \int \psi^0 dP$, como se puede comprobar aplicando (A.9) tanto a ψ^* como a ψ^0 con los papeles invertidos. Así, para $f := \psi^0 - \psi^*$ y $N = \{\varphi = \infty\}$,

$$0 = \int f dP - c \int f d\mathcal{Q} = \int_N f dP + \int f \cdot (\varphi - c) d\mathcal{Q}.$$

No obstante, (A.8) implica que $f \geq 0$ P-c.s. en N y que $f \cdot (\varphi - c) \geq 0$ $\mathcal{Q}$-c.s., por lo que f se anula Π-c.s. en $\{\varphi \neq c\}$. $\square$

Medidas finitamente aditivas

En este apartado nos centraremos en las medidas finitamente aditivas, una generalización de las medidas de probabilidad en la que no exigimos la propiedad de σ-aditividad. Supondremos que estamos trabajando en espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición A.31. Una *medida finitamente aditiva* μ es una función de conjuntos definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ tal que

- $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- μ es *finitamente aditiva*: Para toda sucesión finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathcal{F}$ de conjuntos disjuntos dos a dos se tiene que
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Definición A.32. La *variación total* de una medida finitamente aditiva μ se define como

$$\|\mu\|_{\text{var}} := \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \mid A_1, \ldots, A_n \text{ conjuntos disjuntos en } \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Al conjunto de todas las medidas finitamente aditivas con variación total finita lo denotamos por $ba(\Omega, \mathcal{F})$.

Con $\mathcal{M}_{1,f} = \mathcal{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F})$ representaremos, tal como hemos mantenido a lo largo de todo el trabajo, al conjunto de todas las medidas finitamente aditivas $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ que están normalizadas a $\mu(\Omega) = 1$; notemos como, claramente, $\mathcal{M}_{1,f} \subset ba$.

Observación A.33. Si el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ puede reducirse a un conjunto finito, en el sentido en que $\mathcal{F}$ sea generado por una partición finita de Ω, claramente el conjunto $\mathcal{M}_{1,f}$ coincide con el conjunto $\mathcal{M}_1$ de todas las medidas de probabilidad σ-aditivas. No obstante, en general, $\mathcal{M}_{1,f}$ es estrictamente mayor que $\mathcal{M}_1$. $\diamondsuit$

Acto seguido, explicaremos brevemente algunas nociones de teoría de integración respecto a una medida $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$. Consideramos el espacio $\mathcal{X}$ de todas las funciones medibles y acotadas en $(\Omega, \mathcal{F})$ dotado con la norma del supremo, de manera que $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach. Por $\mathcal{X}_0$ denotaremos el subespacio lineal de todas las funciones escalonadas con valores finitos que pueden ser representadas a través de

$$F = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$$

para algún $n \in N, \alpha_i \in \mathbb{R}$, y conjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Para esta F, definimos
$$\int F d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i),$$

y se puede demostrar que esta definición es independiente de la representación particular de F. Además,
$$\left|\int F d\mu\right| \leq \|F\| \cdot \|\mu\|_{\text{var}}. \tag{A.10}$$

Dado que $\mathcal{X}_0$ es denso en $\mathcal{X}$ respecto a la norma $\|\cdot\|$, esta desigualdad nos permite definir la integral en todo el espacio $\mathcal{X}$ como extensión del funcional lineal y continuo $\mathcal{X}_0 \ni F \mapsto \int F d\mu$. Como $\mathcal{M}_{1,f} \subset ba$, expresaremos la integral de la función $F \in \mathcal{X}$ respecto a $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ como

$$E_{\mathcal{Q}}[F] := \int F d\mathcal{Q}.$$

Teorema A.34. *La integral*

$$\ell(F) = \int F d\mu, \quad F \in \mathcal{X},$$

define una correspondencia uno a uno entre los funcionales lineales ℓ en $\mathcal{X}$ y las medidas finitamente aditivas $\mu \in ba$.

Demostración. Por la definición de la integral y por (A.10), es evidente que cualquier $\mu \in ba$ define a un funcional lineal y continuo en $\mathcal{X}$. Recíprocamente, dado un funcional lineal y continuo ℓ, podemos definir una medida finitamente aditiva μ en $(\Omega, \mathcal{F})$ a través de

$$\mu(A) := \ell(\mathbb{I}_A), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Si $L \geq 0$ es tal que $\ell(F) \leq L$ para $\|F\| \leq 1$, tenemos que $\|\mu\|_{\text{var}} \leq L$, y por lo tanto $\mu \in ba$. Podemos comprobar que la integral respecto a μ coincide con ℓ en $\mathcal{X}_0$; puesto que $\mathcal{X}_0$ es dendo en $\mathcal{X}$, vemos como, efectivamente, $\int F d\mu$ y $\ell(F)$ coinciden $\forall F \in \mathcal{X}$. $\square$

Observación A.35. El Teorema A.34 anterior, en particular, nos permite establecer una correspondencia uno a uno entre medidas $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$ y funcionales ℓ lineales y continuos en $\mathcal{X}$ tales que $\ell(1) = 1$ y $\ell(X) \geq 0$ $\forall X > 0$. $\diamondsuit$

A.3. Variables aleatorias

Funciones cuantil

En este apartado, presentaremos en primer lugar la definición y algunas propiedades de las funciones inversa de funciones en general. Posteriormente, nos centraremos en las funciones inversa de funciones que reúnen las características para ser funciones de distribución de una cierta variable aleatoria; esta particularidad de funciones inversa recibirán el nombre de funciones cuantil.

Así, supongamos primero que $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función creciente (no necesariamente estrictamente creciente). Sean $c := \lim_{x \downarrow a} F(x)$ y $d := \lim_{x \uparrow b} F(x)$.

Definición A.36. Una función $q : (c, d) \to (a, b)$ se denomina *función inversa* de F si

$$F(q(s)-) \leq s \leq F(q(s)+) \quad \forall s \in (c, d).$$

A las funciones

$$q^-(s) := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < s\} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq s\}$$
$$q^+(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > s\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq s\}$$

las llamamos las *funciones inversa continuas por la izquierda* o *continuas por la derecha*, respectivamente.

En el siguiente lema se obtiene una propiedad del conjunto de funciones inversa de una cierta función F que tiene especial relevancia: todas coinciden entre si casi en todas partes de su dominio.

Lema A.37. *Una función $q : (c, d) \to (a, b)$ es una función inversa de F si, y sólo si,*

$$q^-(s) \leq q(s) \leq q^+(s) \quad \forall s \in (c, d).$$

En particular, q^- y q^+ son funciones inversa. Además, q^- es continua por la izquierda así como q^+ lo es por la derecha, y toda función inversa q es creciente y satisface $q(s-) = q^-(s)$ y $q(s+) = q^+(s)$ $\forall s \in (c, d)$. Es más, cualquier par de funciones inversa coinciden casi en todas partes en (c, d).

Demostración. Por las definiciones de q^- y q^+, para cualquier función inversa q se cumple $q^- \leq q \leq q^+$. Así, podemos demostrar la primera parte del lema si vemos que $F(q^+(s)-) \leq s \leq F(q^+(s)-) \leq s \leq F(q^-(s)+)$ $\forall s$; notemos que $s < q^+(s)$ implica $F(x) \leq s$ y que $y > q^-(s)$ implica $F(y) \geq s$, por lo que, en efecto, se cumple dicha expresión.

Consideremos ahora el conjunto $\{x \mid F(x) > s\}$, el cual es la unión de los conjuntos $\{x \mid \mathcal{F}(x) > s + \epsilon\}$ para $\epsilon < 0$; vemos, pues, que q^+ es continua por la derecha. Un argumento análogo nos permite comprobar la continuidad por la izquierda de q^-. Como q^- y q^+ son claramente crecientes, la última parte del lema queda entonces demostrada. $\square$

Lema A.38. *Sea q una función inversa de F. Entonces F es una función inversa de q.*

Demostración. Si $s > F(x)$, $q(s) \geq q^-(s) \geq x$, de manera que $q(F(x)+) \geq x$. Recíprocamente, $s < F(x)$ implica $q(s) \leq q^+(s) \leq x$, y por lo tanto que $q(F(x)-) \leq x$. Esto prueba que F es una función inversa de q. $\square$

A partir de ahora, asumiremos que $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ es creciente y continua por la derecha; además, F estará ahora normalizada en el sentido en que $c = 0$ y $d = 1$. Esta suposición siempre es cierta si F es la *función de distribución* de una variable aleatoria X en un cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, i.e., F viene dada por $F(x) = P[X \leq x]$. El siguiente lema muestra que, en particular, también el recíproco es cierto: toda función normalizada, creciente y continua por la derecha $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es función de distribución de alguna variable aleatoria.

Lema A.39. *Sea U una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, i.e., $P[U \leq s] = s \quad \forall s \in (0, 1)$. Si q es una función inversa de una función F continua por la derecha, creciente y normalizada, $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, entonces*

$$X(\omega) := q(U(\omega))$$

sigue la función de distribución F.

Demostración. Primero notemos que cualquier función inversa de F es medible puesto que coincide con la función medible q^+ fuera del conjunto numerable $\{s \in (0, 1) \mid q^-(s) < q^+(s)\}$. Dado que $q(F(x)-) \leq x$, tenemos que $q(s) \leq x$ para $s < F(x)$. Además, el Lema A.38 nos muestra que $q(s) \leq x$ implica que $F(x) \geq F(q(s)) = F(q(s)+) \geq s$, por lo que observamos como

$$(0, F(x)) \subseteq \{s \in (0, 1) \mid q(s) \leq x\} \subseteq (0, F(x)].$$

Así pues,

$$F(x) = P[U \in (0, F(x))] \le P[U \in \{s \mid q(s) \le x\}] \le P[U \in (0, F(x)]] = F(x).$$

Considerando la identidad $P[U \in \{s \mid q(s) \le x\}] = P[X \le x]$, completamos la demostración. □

Definición A.40. Una función inversa $q : (0, 1) \to \mathbb{R}$ de una función de distribución F recibe el nombre de *función cuantil*. En este caso, nos referiremos a q^- y a q^+ como las *funciones cuantil inferiores* y *superiores*, respectivamente.

Normalmente, usaremos la notación F_X para la función de distribución de la variable aleatoria X, así como q_X para designar a las correspondientes funciones cuantil. No obstante, en los casos en los que queramos enfatizar la ley μ de X, escribiremos F_μ y q_μ. Al valor $q_X(\lambda)$ de una función cuantil a un nivel $\lambda \in (0, 1)$ dado se le suele decir λ-*cuantil* de X.

El siguiente resultado complementa al Lema A.39, en el sentido en que implica que un espacio de probabilidad soporta a una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$ si, y sólo si, soporta a cualquier variable aleatoria no constante con una distribución continua.

Lema A.41. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución continua F_X y con función cuantil q_X. Entonces, $U := F_X(X)$ está uniformemente distribuida en $(0, 1)$, y $X = q_X(U)$ P-c.s.*

Demostración. Sea $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ un espacio de probabilidad que soporta a una variable aleatoria $\tilde{U}$ con una distribución uniforme en $(0, 1)$; entonces, por el Lema A.39, $\tilde{X} := q_X(\tilde{U})$ sigue la misma distribución que X, de modo que $F_X(X)$ y $F_X(\tilde{X})$ también tienen la misma distribución. Por otro lado, si F_X es continua, tenemos que $F_X(q_X(s)) = s$, lo cual conlleva $F_X(\tilde{X}) = \tilde{U}$.

Para ver que $X = q_X(U)$ P-c.s., fijémonos primero en que $q_X^+(F(t)) \ge t$, y por lo tanto $q_X(U) = q_X^+(U) \ge X$ P-c.s. Sea $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ una función estrictamente creciente; como $q_X(U)$ y X comparten la misma ley, tenemos que $E[f(q_X(U))] = E[f(X)]$, obteniendo finalmente que $P[q_X(U) > X] = 0$. □

A continuación presentamos un lema que nos muestra una relación muy útil entre funciones cuantil de variables aleatorias estrechamente relacionadas entre si.

Lema A.42. *Si $X = f(Y)$ para una función creciente f y q_Y es una función cuantil de Y, $f(q_Y(t))$ es una función cuantil de X. En particular,*

$$q_X(t) = q_{f(Y)}(t) = f(q_Y(t)) \quad \textit{para casi todo valor de } t \in (0, 1).$$

Si f es decreciente, entonces $f(q_Y(1-t))$ es una función cuantil de X. En particular,

$$q_X(t) = q_{f(Y)}(t) = f(q_Y(1-t)) \quad \textit{para casi todo valor de } t \in (0, 1).$$

Demostración. Si f es decreciente, ya que $F_Y(q_Y(1-t)-) \le 1-t \le F_Y(q_Y(1-t))$ por definición, $q(t) := f(q_Y(1-t))$ satisface

$$\begin{aligned} F_X(q(t)) &= P[f(Y) \le f(q_Y(1-t))] \ge P[Y \ge q_Y(1-t)] \\ &\ge t \ge P[Y > q_Y(1-t)] \\ &\ge F_X(q(t)-). \end{aligned}$$

De aquí concluimos que $f(q_Y(1-t))$ es una función cuantil. Un argumento similar nos permitiría comprobar la relación en el caso en que la función f es creciente. □

El siguiente teorema es una versión de las *desigualdades de Hardy-Littlewood*, el cual nos aporta una estimación de la esperanza $E[XY]$ en términos de las funciones cuantiles q_X y q_Y.

Teorema A.43. *Sean X e Y dos variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con funciones cuantiles q_X y q_Y. Entonces,*

$$\int_0^1 q_X(1-s)q_Y(s)ds \leq E[XY] \leq \int_0^1 q_X(s)q_Y(s)ds,$$

siempre y cuando todas las integrales estén bien definidas. Si $X = f(Y)$ y la cota inferior(superior) es finita, esta cota inferior(superior) se alcanza si, y sólo si, f puede ser escogida como una función decreciente(creciente).

Demostración. Ver [8], Teorema A.24. □

Definición A.44. Decimos que un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *no tiene átomos* si no existe ningún conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que, si $P[A] > 0$, $P[B] = 0$ o $P[A] = P[B]$ para cualquier $B \in \mathcal{F}$ subconjunto de A.

Proposición A.45. *Para cualquier espacio de probabilidad las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *no tiene átomos.*

(b) *Existe una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la distribución de Bernouilli $P[X_1 = 1] = P[X_1 = 0] = 1/2$.*

(c) *Para cualquier $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, existen variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ independientes e idénticamente distribuidas con distribución μ.*

(d) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *soporta a una variable aleatoria con distribución continua.*

Demostración. Ver [8], Proposición A.27. □

Supremo esencial de una familia de variables aleatorias

En este apartado introduciremos el concepto de supremo esencial de una familia arbitraria Φ de variables aleatorias en un cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Consideremos el caso en que Φ es numerable; entonces $\varphi^*(\omega) := \sup_{\varphi \in \psi} \varphi(\omega)$ también sería una variable aleatoria, y por lo tanto φ^* sería medible. Pero si Φ fuera no numerable, no podríamos garantizar que el supremo puntual fuera medible, e incluso si así lo fuera, podría estar representando un concepto diferente al que buscamos basándonos en las propiedades de P-casi seguramente. Este hecho nos sugiere la noción del supremo esencial, definido a través de desigualdades casi seguras.

Teorema A.46. *Sea Φ cualquier conjunto de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

(a) *Existe una variable aleatoria φ^* tal que*

$$\varphi^* \geq \varphi \quad P\text{-c.s. } \forall \varphi \in \Phi. \tag{A.11}$$

Además, φ^* es única casi seguramente en el siguiente sentido: cualquier otra variable aleatoria ψ con la propiedad (A.11) satisface $\psi \geq \varphi^*$ P-c.s.

(b) *Supongamos que* Φ *es tal que, para* $\varphi, \tilde{\varphi} \in \Phi$*, existe* $\psi \in \Phi$ *que cumple* $\psi \geq \varphi \vee \tilde{\varphi}$*. Entonces existe una secuencia creciente* $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots$ *en* Φ *tal que* $\varphi^* = lim_n\ \varphi_n$ *P-c.s.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada $\varphi \in \Phi$ toma valores en el intervalo $[0,1]$; de lo contrario, podemos considerar $\tilde{\Phi} := \{f \circ \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ con $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ estrictamente creciente.

Si $\Psi \subset \Phi$ es numerable, sea $\varphi_\Psi(\omega) := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(\omega)$; en este caso φ_Ψ es medible. Afirmamos que la cota superior

$$c := \sup\{E[\varphi_\Psi] \mid \Psi \subset \Phi \text{ numerable}\}$$

es alcanzada por algún conjunto numerable $\Psi^* \subset \Phi$. Para verlo, tomamos Ψ_n con $E[\varphi_{\psi_n}] \to c$ y sea $\Psi^* := \bigcup_n \Psi_n$; entonces Ψ^* es numerable y $E[\varphi_{\Psi^*}] = c$.

Ahora mostraremos que $\varphi^* := \varphi_{\Psi^*}$ cumple (A.11). Lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo que no se cumple (A.11); así, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $P[\varphi > \varphi^*] > 0$, de manera que $\Psi' := \Psi^* \cup \{\varphi\}$ satisface

$$E[\varphi_{\Psi'}] > E[\varphi_{\Psi^*}] = c,$$

que está en contradicción con la definición de c. Además, si ψ es otra variable aleatoria que cumple (A.11), entonces es evidente que $\psi \geq \varphi^*$.

Finalmente, por construcción, φ_{Ψ^*} puede aproximarse mediante una secuencia creciente si Ψ cumple la condición descrita en (b). $\square$

Definición A.47. La variable aleatoria φ^* que aparece en el Teorema A.46 se define como el *supremo esencial* de Φ respecto a P, y escribimos

$$\text{ess sup}\ \Phi = \underset{\varphi \in \Phi}{\text{ess sup}}\ \varphi := \varphi^*.$$

A partir de éste, definimos el *ínfimo esencial* de Φ respecto a P como

$$\text{ess inf}\ \Phi = \underset{\varphi \in \Phi}{\text{ess inf}}\ \varphi := -\underset{\varphi \in \Phi}{\text{ess sup}}\ (-\varphi).$$

Referencias

[1] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.; Heath, D.: Definition of coherent measures of risk. Mathematical Finance **9**, 203-228, 1998.

[2] Bauer, H.: Measure and integration theory. Walter de Gruyter, Berlín–Nueva York, 2001.

[3] Cherny, A.: Weighted VAR and its properties. Finance and Stochastics **10**, 367-393, 2006.

[4] Cherny, A.; Madan, D. P.: New measures for performance evaluation. Review of Financial Studies **22**, 2571-2606, 2009.

[5] Cherny, A.; Madan, D. P.: Markets as a counterparty: an introduction to conic finance. International Journal of Theoretical and Applied Finance **13**, 1149–1177, 2010.

[6] Dunford, N.; Schwartz, J.: Linear Operators. Part I: General Theory. Interscience Publishers, Nueva York, 1958.

[7] Floret, K.: Weakly compact sets. Lecture Notes in Mathematics 801, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

[8] Föllmer, H.; Schied, A.: Stochastic finance: an introduction in discrete time. Segunda edición. Walter de Gruyter, Berlín-Nueva York, 2004.

[9] Madan, D. P.; Schoutens, W.: Conic financial markets and the corporate balance sheet. International Journal of Theoretical and Applied Finance **14**, 587-610, 2011.