Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES DEL SEGLE XX A L’ACTUALITAT.

Alejandro Carreras Pons

Director: Sergi Múria Maldonado
Realitzat a: Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 18 de gener de 2016

INDEX

1. ABSTRACT

This final degree project has been thought in order to help the reader understand the way maths teaching has changed and what kind of changes there have been in mathematical didactics. I have chosen this topic because I want to start a career as a high school maths teacher, and I was curious to know why maths are taught this way and not differently. In order to fulfil this project, I have looked for a list of “the most important” authors in mathematical didactics and education, exposing their point of view about the topic.

In this project we will find nine different authors, but I will focus more thoroughly on the ones that were born and worked in Catalonia and Spain, without undermining the other authors, and explaining the influence they have had on each other in some cases. Finally, I organized these authors on a temporal line in order to condense the project as simply as possible, and with this temporal line I have made a simple website with the basics about the authors that appear in the final degree project.

2. INTRODUCCIÓ

Voldria començar aquest treball de final de grau precisant que és un treball de revisió, documentació i investigació bibliogràfica en el camp de la didàctica de les matemàtiques. La idea fonamental del treball és entendre millor com ha evolucionat la forma d’explicar les matemàtiques, la seva didàctica, quines corrents poden haver hagut en aquest ensenyament i les raons que poden haver motivat aquests canvis en la forma d’ensenyar.

Abans de començar amb el treball, voldria fer una distinció que ens servirà per més endavant, és el que anomenarem matemàtica clàssica i matemàtica moderna. La gran diferencia està en l’enfocament que es dóna en l’ensenyament de la matèria: mentre que la matemàtica clàssica s’enfocava més cap a la memorització de conceptes i fórmules, la matemàtica moderna dóna més importància al raonament i la lògica. La matemàtica moderna va sorgir com un intent de millorar la qualitat educativa de les matemàtiques entre els anys 60 i 70, però com veurem va rebre moltes crítiques i no es sap a ciència certa si realment va ser una bona solució. És important remarcar que aquestes matemàtiques no fan cap diferenciació en el contingut de les matemàtiques, sinó en el tractament que se l’hi dóna. Més endavant, en una cita d’Emma Castelnuovo veurem perfectament la diferència entre aquests dos conceptes.

2.1. Definició d'objectius i motivació.

Com he dit abans, els meus objectius són principalment entendre com ha evolucionat la didàctica de les matemàtiques i el seu ensenyament en les escoles i instituts. Per fer-ho em centraré en el darrer segle, aproximadament des de l'any 1900 fins a l'actualitat. La meva motivació a l'hora d'escollir aquest treball és que des d'abans de començar el grau de matemàtiques, tenia clar que en el futur em vull dedicar a la docència, i l'any passat vaig agafar l'optativa de didàctica on vam veure diferents tècniques per explicar alguns temes de matemàtiques una mica diferents de les que es van utilitzar quan jo vaig cursar secundària i batxillerat, cridant-me l'atenció com pot haver canviat històricament.

Una idea interessant seria veure al llarg de la història si hi ha hagut tendències en quan als tipus de problemes que es plantejaven, o en cas contrari, han estat un tipus de problemes o activitats.

Durant la realització del treball, ha estat força motivador poder trobar la informació que es buscava sense massa problema, ja que un dels problemes més importants a la hora de fer un treball de final de grau és tenir una idea però a la pràctica no poder trobar informació sobre el tema que es vol tractar. En aquest aspecte, tot i la molta feina que m'ha portat dur-lo a terme, he pogut gaudir en el procés i a més, és un aspecte que en el futur m'interessaria seguir informant-me dels canvis que s'aniran portant a terme, tenint així una visió més amplia d'aquest tema.

Al final del treball, m'agradaria extreure no una conclusió rígida sinó arribar a unes reflexions que ens indiquin si els canvis que s'han portat a canvi al final han resultat profitosos, si s'ha notat alguna diferencia o si al contrari, han resultat més un fall en l'anàlisi de la situació que s'havia fet.

2.2. Agraïments.

Voldria agrair, en primer lloc, al Sergi Múria, el meu tutor ja que sense ell, la seva ajuda i dedicació, aquest treball no seria possible. També voldria agrair a la meva família, per donar-me la oportunitat de poder estudiar en aquesta Universitat, ja que vivint a Menorca on no existeix la possibilitat d'estudiar el grau de Matemàtiques, mai podria haver arribat fins aquí. Voldria agrair també a la Neus Adrián, llicenciada en filologia anglesa i traductora, per ajudar-me amb l'abstract, en la seva correcció i coherència. Finalment, voldria agrair a la meva novia per tota l'ajuda, consell i suport que m'ha donat durant tot el temps de realització d'aquest treball de final de grau.

3. DESENVOLUPAMENT I METODOLOGÍA

Per dur a terme aquest treball començaré fent una recerca de diferents autors en didàctica de matemàtiques, a nivells de Espanya i Europa, intentant entendre les influencies que han tingut i les que entre els propis autors s'han pogut fer, mirant les relacions entre els autors estudiats.

Els autors consultats van dur a terme el seu treball d'investigació didàctica durant el segle XX, en un principi, vaig pensar que la recerca de la informació l'hauria de realitzar sobretot mitjançant internet, però a la pràctica i com es veu a la bibliografia, m'han sigut de més utilitat les obres escrites que he trobat a les biblioteques, molts llibres al final, tot i que en alguns cassos la digitalització d'aquestes obres ha sigut de gran utilitat.

A continuació, aniré exposant diferents autors amb les idees generals de les seves didàctiques, de com entenien l'ensenyament de les matemàtiques segons les obres consultades i en algun cas posaré algun exemple concret de material utilitzat. L'ordre d'exposició dels autors serà cronològica, de forma que es pot veure sovint la influencia que han tingut els uns amb els altres.

En principi, en el cos del treball havia pensat posar tots els autors, però per qüestions de limitació d'espai i amb la finalitat de poder treballar més a fons els altres autors que enfoquen més la seva obra a la didàctica de les matemàtiques, en els annexos, s'hi trobaran dos autors. Aquesta elecció d'autors, ha vingut condicionada fortament pels autors que actualment són més importants i de referència per a la formació del professorat.

Paral·lelament a aquest treball he construït una línia temporal amb els autors tractats, i una web de Google Sites on es troben explicats breument els autors i des d'on s'adjunten algunes obres que poden ser consultades on-line de forma gratuïta. A la línia temporal hi ha enllaçada la pàgina web per fer que sigui més còmode i estètic.

Al final del treball, considero que la informació consultada dona una visió de l'estat de l'ensenyament de les matemàtiques al llarg del segle XX, observant una tendència cap a la formalització dels conceptes.

3.1. GEORGE PÓLYA

George Pólya va ser un eminent matemàtic nascut a Hongria el 1887, a més d'un gran educador en el mateix àmbit. En principi li agradava més la filosofia, però un professor seu li va suggerir que estudies física i matemàtiques per millorar la seva preparació filosòfica. Finalment va obtenir el doctorat en matemàtiques a la universitat de Budapest, i va treballar a l'institut Tecnológico Federalen Zurich, de Suïssa. Durant la seva vida professional va conèixer importants matemàtics com són Hilbert, Hardy o Littlewood. L'any 1940, degut a la segona guerra mundial, sent ell de família jueva i davant l'expectativa d'una invasió a Suïssa per part d'Alemanya, va escapar a Estats Units, on va treballar a la universitat de Standford a partir de l'any 1942.

Una de les seves grans obres, en la qual em centraré, és *Como plantear y resolver problemas*, obra que ha estat traduïda a molts idiomes i editada molts cops. A més d'un excel·lent educador, en el camp de les matemàtiques va obtenir importants resultats com són el teorema d'enumeració de Pólya o la conjectura de Pólya, refutada l'any 1958.

Primer de tot voldria fer notar que l'obra de George Pólya que ens interessa està basada en el planteig i resolució de problemes i en el mètode heurístic per resoldre els problemes, que tractarem també més endavant amb Pere Puig Adam.

L'obra comença considerant que els alumnes no han de ser instruïts en operacions repetitives i rutinàries com llargs càlculs. Considera que poden ser útils però que no pot ser l'únic que se li ensenyi a l'alumne. És molt millor avivar la seva curiositat amb problemes adequats als seus coneixements. Els mateixos alumnes han de ser els que descobreixin el gust per les matemàtiques, no tenen que veure les matemàtiques com un mitjà per un propòsit com podria ser l'examen final, descobrint les seves pròpies capacitats.

George Pólya proposa una llista de 4 elements necessaris per resoldre un problema qualsevol[1]:

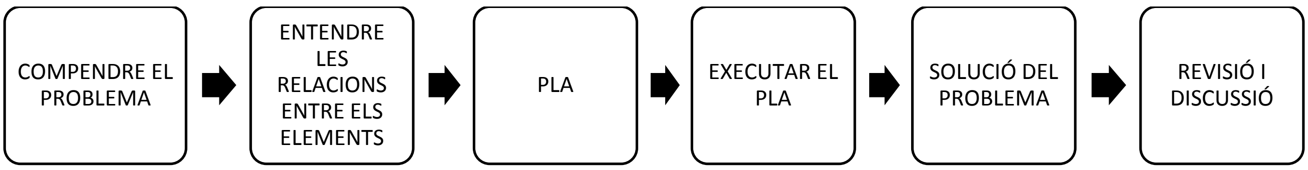
I. Comprendre el problema
II. Concebre un pla d'acció
    II.1. Determinar la relació entre les dades i la incògnita
    II.2. Si no hi ha una solució immediata, recórrer a un problema auxiliar
    II.3. Obtenir finalment un pla per obtenir la solució del problema
III. Dur a terme el pla obtingut.
IV. Examinar la solució obtinguda.

[1] *Cómo plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgina 17.

El propòsit més important que ha de tenir el professor envers l'alumne ha de ser de guia en l'ensenyament de les matemàtiques, d'ajudar, més que tenir una visió del professor com una màquina contenidora de coneixement, que arriba a classe i el deixa anar per als alumnes. Si el professor ajuda massa, pot ser contraproduent i que l'alumne no aprengui mentre que si ajuda massa poc pot passar que no avanci. L'ajuda ha de ser natural, intentant posar-se a la pell de l'alumne comprenent els problemes que pot tenir en cada un dels aspectes explicats.

La proposta estrella de Pólya és entendre les matemàtiques mitjançant la resolució de problemes, i la manera de fer-ho entén ell que ha de venir d'un diàleg professor-alumne, on el professor ha de fer les preguntes de la forma més general possible, ja que si pregunta els temes molt concrets la comprensió que obtindria dels problemes seria molt limitada. Les preguntes han der perseguir la finalitat d'ajudar a l'alumne tant com la de desenvolupar l'habilitat de resoldre problemes per ell sol.

Com veurem també amb Emma Castelnuovo, Pólya considera primordial que les matemàtiques es fonamentin en la realitat, que s'ajudin del sentit comú de l'alumne. El sentit de que les preguntes siguin el més generals possibles és per poder recórrer a elles més d'un cop, en diferents problemes. Resoldre problemes és qüestió d'habilitat pràctica, bona part de l'aprenentatge és degut a l'observació i imitació de cassos similars. Gràficament, el mètode de Pólya el podem esquematitzar de la següent forma:



No planteja aquests passos com l'única forma de resoldre un problema, si l'alumne en algun problema troba alguna facilitat especial i pot saltar-se'n algun esta bé, però pot ser perillós si es descuiden els passos sense tenir pas cap idea concreta. El primer de tot és considerar el problema i no posar-se a fer càlculs absurds que no portin enlloc.

En l'ensenyament de les matemàtiques un problema important és la falta d'interès dels alumnes. Per Pólya, aquesta falta d'interès no sempre és deguda a l'alumne sinó que el professor també té bona part de culpa. Per això, ha de dedicar temps a l'exposició de la matèria, fer-ho de forma natural (Castelnuovo i Puig Adam amb els problemes del dia a dia) intentar cridar l'atenció de l'alumne fent-ho interessant.

El pla de resolució d'un problema no ens dóna una manera estricta de resoldre'l, sinó una línia general per on podem anar per intentar-lo solucionar. Per dur-lo a terme el més important és tenir paciència ja que no sempre té perquè ser una resolució immediata, i el major perill al qual s'enfronta l'alumne és l'oblit del seu propi pla. És molt important que un cop s'ha acabat un problema no el deixem i anem a un altre cosa, sinó que mirem si el que hem trobat té sentit i si és el que ens demanava el problema. Pot ser molt important per acabar d'entendre la matèria i aprofundir-hi més. També és fonamental pensar si existeix algun mètode per tal de comprovar el procés que hem seguit i el resultat al qual hem arribat.

Per resoldre un problema, ha d'haver un diàleg. En el cas que l'alumne tingui dubtes, el que es considera important és interrogar al professor. En aquest moment el paper del professor és de vital importància, ja que amb el que li digui a l'alumne pot trobar o no la solució, i pot comprendre millor o no el problema i tota la matèria. Aquest interrogatori hauria de partir de les dubtes més generals i anar convergint cap a les més concretes. Per part del professor també pot haver-hi preguntes, que poden ser bones o dolentes. Les dolentes són aquelles que poden cridar més al professor a fer-les, són aquelles que immediatament donen la solució a l'alumne i que no el deixen raonar. Això pot donar una idea equivocada de que hi ha alumnes que serveixen per a les matemàtiques i alumnes que no, donant una imatge mística de la matèria.

En el segon tema de *Como plantear y resolver problemas*, proposa el mètode de resolució mitjançant un diàleg entre el professor i l'alumne, o més bé entre l'alumne i el propi problema[2]:

1) Familiaritzar-se amb el problema
   1.1) Començar visualitzant-lo globalment
   1.2) Recordar problemes similars, que ja hem resolt anteriorment
2) Treballar per aconseguir una millor comprensió
   2.1) Aclarir els detalls del problema
   2.2) Descompondre el problema en parts
3) Trobar una idea útil. Considerem que una idea pot ser útil si ens mostra un procés per solucionar el problema directament o si ens dóna la solució directament.
   3.1) Considerem el problema des de diferents punts de vista
4) Execució de la idea/pla trobat:
   4.1) Començar per la idea útil que hem buscat a l'apartat anterior.
   4.2) Estar segurs d'haver comprès bé el problema.
5) Mirar amb retrospecció, intentat trobar una solució diferent i millor, descobrint noves propietats interessants.

A continuació, en el tercer apartat d'aquest llibre es tracta el que ell anomena un breu diccionari d'heurística. Per començar, descriu l'analogia com la forma bàsica del pensament,

---

[2] *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgines 51 a 53

assegurant que quan es resol un problema es fa buscant problemes anàlegs ja resolts que siguin més senzills, i d'ells poder-ne aprofitar o bé el mètode de resolució i/o la pròpia solució. Quan una analogia ens porta a un resultat harmoniós i senzill, ens fa la sensació, o podríem dir que intuïm que és cert:

"Simplex sigillum veri"[3]

Per tal de resoldre un problema, l'autor en el seu mètode de resolució diu que s'ha de descompondre un problema. El que és realment important és que en aquest procés de "descomposició-recomposició", observem nous detalls que abans ens eren ocults per tal de trobar una nova idea, una nova orientació que ens porti a l'èxit. La visió del problema com un tot ens pot portar a imprecisions mentre que el problema descompost en petits detalls ens pot aclarir tot el problema, com és lògic, la descomposició i recomposició del problema és limitada. En l'ensenyament, un problema greu ve de que els alumnes no acaben de comprendre plenament el problema com a conjunt i volen abordar els detalls.

En el procés de recomposició d'un problema, podem fer diferents proves:

1. Conservar la incògnita i canviar dades i condicions
2. Conservar les dades, canviant la incògnita i les condicions.
3. Canviar alhora incògnita i dades.

Les 2 primeres formes són variacions molt usuals, a la tercera ens allunyem més, ens desviem més. També podem descartar una part de la condició, però hem de tenir present que d'aquesta forma estem debilitant el problema. En quan els problemes orientats a demostracions, Pólya subratlla que el més important, tot i que sembli obvi, és comprendre les hipòtesis i la conclusió del que volem demostrar. Si és necessari per millorar la compressió proposa de separar les hipòtesis.

Per resoldre un problema no tot és treball intel·lectual. Igual o més important és l'actitud amb la que l'alumne afronta el propi problema, la determinació, les emocions envers aquell problema. Quan un alumne comet errors greus o és molt lent en la resolució de problemes, no té perquè ser per la seva capacitat intel·lectual, sinó que probablement serà per una falta d'interès en el problema o que no el compren suficientment. És necessari en molts cassos un major temps de reflexió. En quan a l'avaluació de l'alumne, Pólya considera que la classificació que pot treure en una prova/examen, és un fet massa general. Pot portar a errors, a un

[3] *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgina 64, del llatí, "La senzillesa és el segell de la veritat"

“diagnòstic” de l’alumne incorrecte, és necessari tenir més dades ja que pot resultar sinó contraproduent per l’alumne i també pel professor.

L’experiència de Pólya l’ha portat a pensar que l’errada més comú de l’alumne ve degut a la falta de comprensió del problema o de les matemàtiques en si, però també a la falta d’elaboració d’un pla que li permeti obtenir una idea general de quina pot ser la solució i com obtenir-la. Quan l’alumne porta a terme el pla, de cometre un error, probablement serà degut a la falta de paciència. Durant la resolució de problemes, poden ser-nos útils elements auxiliars com són teoremes, definicions, o més particularment en el camp de la geometria, un punt o un recta auxiliar per exemple. És molt important però no introduir eines auxiliars gratuïtament, sempre hem de pensar si ens són útils.

Hem parlat de com abordar un problema, com resoldre’l i quins passos seguir. Hi ha encara un element més important en tot aquest procés. Abans de començar el propi problema, l’autor ens fa observar que ens hauríem de preocupar primer per veure si les condicions que tenim es poden satisfer, i en aquest cas, si són suficients per trobar la solució del problema, Seria absurd intentar resoldre un problema amb unes hipòtesis impossibles de complir, o amb menys dades de les necessàries. Pólya això ho anomena preveure si un problema és o no raonable[4]. Per exemple, en el camp de la física i la geometria, es podria mirar si quadren les dimensions en les formules:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

En el cas del volum de l’esfera, sabem que el volum és una magnitud que porta unitats cúbiques i observem que el radi està al cub. Això no ens conclou que la formula és correcta, però pot ajudar-nos a nivell intuïtiu.

Pólya critica que l’ordre en el qual nosaltres analitzem les dades d’un problema no és igual al ordre en que es van idear aquestes dades. Per il·lustrar-ho, fa menció dels elements d’Euclides, un text molt aconsellable si el que es pretén és analitzar el raonament però gens aconsellable si el que es vol és explicar el propi raonament a algú aliè que no sap del tema. L’estructura dels elements és:

DADES → INCOGNITA   HIPÒTESIS → CONCLUSIÓ

[4] *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgina 87

En paraules de George Pólya:

"No existen en realidad ideas francamente malas, a menos que no tengamos sentido crítico"[5]

El més greu que pot trobar-se un alumne és que a l'hora d'enfrontar-se a un problema, no tingui cap idea, per senzilla que pugui ser.

Com Emma Castelnuvo, l'autor que tractem també era partidari d'utilitzar materials com ja he mencionat, sobretot en el camp de la geometria. En el cas de la geometria tri-dimensional els models poden ser útils, però sovint poden resultar poc pràctics i costosos. En aquests cassos, ens haurem de conformar amb els dibuixos i el paper, tenint en compte que això només ens ajudarà, esquematitzarà el nostre problema. També és molt útil, en el cas dels problemes geomètrics, la generalització, ja que en la majoria dels cassos l'alumne aprèn de la imitació del professor.

George Pólya defineix l'heurística com la ciència que té com a objectiu l'estudi de les regles i els mètodes del descobriment i la invenció[6]. L'heurística moderna intenta comprendre les operacions mentals útils per la solució dels problemes. És important tenir en compte que l'heurística tendeix a la generalitat, independentment de quin sigui el problema tractat i aplicant-se a problemes de tota mena. És important distingir dos tipus de raonament, el demostratiu i l'heurístic, l'autor ho il·lustra amb el següent exemple[7]:

1. Demostratiu: Si A ➡ B, B fals ➡ A fals
2. Heurístic: Si A ➡ B, B cert ➡ A més factible

El raonament heurístic no es basa totalment en les premisses, no és tant decisiu ni rigorós, però és provisional i sembla plausible. Per al professor pot haver-hi un dilema entre fer grans demostracions o no fer demostracions. Per Pólya la solució és fer mitges demostracions, demostracions incompletes sempre prevenint a l'alumne que el que s'ha fet no és una demostració, en definitiva, fent un raonament més heurístic.

Per un lector de matemàtiques interessat en la matèria, el més important és anar seguint el raonament pas a pas, comprovant que és correcte, per això de vegades un raonament heurístic tot i que pugi no ser tant rigorós com un raonament demostratiu, pot ser més clar pel lector. Quan no es compren el raonament, el lector/alumne acaba avorrint-se, perdent el fil del raonament. Igualment passa a una classe, i això ho ha de tenir-ho en compte el professor.

[5] *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgina 90
[6] *Como plantear y resolver problemas.* (1965). Pàgina 101
[7] *Como plantear y resolver problemas*. (1965). Pàgina 112

Per acabar, voldria fer menció d'una consideració que fa Pólya sobre els problemes abstractes i els problemes més bé pràctics. En general, l'alumne sempre considera que són més complicats els pràctics, els de la vida diària, i això pot venir degut a la falta de claredat en les dades i la forma que se'ns dóna la informació. Tot i així, l'autor aconsella que encara que no sapiguem resoldre un problema, no ens hem de rendir, sinó que s'ha que intentar resoldre problemes més senzills, conformar-nos amb problemes més fàcils i més endavant, quan tinguem més pràctica, intentar tornar a abordar el problema més complicat. George Pólya va escriure el següent decàleg[8]:

1. Interessa't per la teva matèria.
2. Coneix la teva matèria.
3. Intenta deduir de les cares dels alumnes les seves expectatives i dificultats, posa't al seu lloc.
4. Adona't que la millor forma d'aprendre alguna cosa és descobrir-la per tu mateix.
5. Dóna als alumnes un hàbit de treball metòdic, no només informació.
6. Deixa aprendre conjecturant.
7. Deixa aprendre a demostrar.
8. Intenta evidenciar l'estructura que hi ha darrera la resolució d'un problema perquè la mateixa resolució per un problema d'avui, sigui útil per un problema futur.
9. No desvetllis massa ràpid la solució, deixa'ls que ho descobreixin per ells mateixos tant com sigui possible.
10. Suggereix, no inculquis mai per la força.

De Pólya, el que he considerat més rellevant, o que m'ha cridat més l'atenció per dir-ho d'alguna forma ha estat la seva voluntat per esquematitzar la resolució de problemes, donant sempre unes pautes i passos a seguir. És força remarcable també que fa menció a que les matemàtiques s'han d'ajudar de la realitat, i les preguntes que s'han de fer als alumnes han de ser el més general possibles. En definitiva, la seva proposta d'ensenyament de les matemàtiques mitjançant problemes reals, generals i basats en la realitat.

[8] *George Pólya: el razonamiento plausible*. Pàgines 3-5.

3.2. PERE PUIG ADAM

Puig Adam, en paraules de T.J. Fletcher:

"Is one of the most original mathematics teachers of our time" [9]

Nascut a Barcelona l'any 1900, va ser un alumne excel·lent en tots els àmbits d'estudis, per fer-nos una idea:

1. Va estudiar batxillerat a l'institut d'ensenyament mitjà a Barcelona, amb premi extraordinari.
2. A l'escola d'enginyers industrials de Barcelona:
   - -2 primers cursos d'enginyeria (simultàniament)
   - -3 primers cursos de la facultat de ciències exactes

Va acabar la llicenciatura també amb premi extraordinari.

3. Va cursar el doctorat a Madrid on fou deixeble de Josep Plans i Freyre, Miguel Vegas i Julio Rey Pastor entre altres. La seva tesis va ser sobre problemes de mecànica relativista i es va graduar altre cop amb premi extraordinari.

Als 25 anys va obtenir la càtedra de matemàtiques a l'institut de San Isidro a Madrid i Julio Rey Pastor, un dels seus mentors més importants, li proposa col·laborar en l'escriptura de llibres sobre didàctica moderna. Es pot considerar que la didàctica de l'ensenyament mitjà en matemàtiques comença a evolucionar.

Al llarg de la seva vida va escriure més de 20 llibres de matemàtiques i més de 100 treballs d'investigació i articles, d'ells una tercera part enfocada a l'ensenyament. Va estudiar la matemàtica com a filosofia, ciència i també com a un art.

A la conferencia inaugural de la secció matemàtica del congrés portuguès-espanyol pel progrés de les ciències l'any 1953[10], reflexiona sobre la situació "actual" de l'educació de les matemàtiques.

"*Las verdades demostradas con énfasis no conducen a verdades probables y éstas son las únicas que aparecen en los negocios, en el arte, en la sociedad"*[11]

---

[9] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Extret del pròleg de Dacio Rodriguez Lesmes

[10] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgines 93-110

[11] *La matemàtica y su enseñanza actual.* (1960). Pàgina 99, Madame de Staël

“Las matemáticas solo sirven para desarrollar el gusto por los razonamientos sutiles ... los más eminentes matemáticos no saben conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades”[12]

Aquestes cites ens suggereixen que hi havia un problema amb les matemàtiques, un problema basat en el rigor amb el que s’impartien, que feia que els alumnes acabessin avorrint les matemàtiques de per vida.

Per a Puig Adam les matemàtiques són el filtre que ajuda a l’home a estudiar la realitat[13]. En distingeix tres fases:

1. Planteig o abstracció.
2. Raonament lògic (durant molt temps l’ensenyament matemàtic s’ha reduït a aquest punt)
3. Traducció o concreció: El pas de l’abstracte al concret.

No s’hauria de descuidar cap de les fases de l’estudi, i la solució no ve de fer problemes d’aplicació després de fer un gran raonament lògic, sinó d’haver fet abans experiències que permetin a l’alumne tenir intuïció suficient per afrontar els problemes.

En l’elaboració de processos abstractes s’ha d’utilitzar la intuïció (mirar a dins), considerar que la lògica només és apta per actuar sobre premisses elaborades amb anterioritat.

La concreció és la projecció a la realitat dels processos resolutius abstractes. Si es descuida aquesta fase, els resultats poden ser terribles ja que davant resultats molt evidents els alumnes poden no adonar-se’n. Conseqüències de l’absència de sentit d’aproximació a la realitat, un gran defecte de l’ensenyament tradicional.

Puig Adam considera que els millors mètodes/modes d’ensenyament són els que s’adapten a la psicologia del alumne, sense obviar però les finalitats que es volen assolir. En aquell moment la situació era d’obviar la situació de cadascun, l’antiga escola ignorava els problemes psicològics dels alumnes i els problemes que predominaven eren purament lògics: s’aprenia de memòria, no s’aprenia a raonar.

Els resultats que ell observa del sistema educatiu de l’època eren inadaptació, incomprensió de les matemàtiques i la conseqüent aversió que van agafar-li a les matemàtiques els alumnes, i la solució que Puig Adam proposa a tal problema es la didàctica.

En quan al mode per a l’autor la millor guia són els interessos dels alumnes i el millor mode és l’heurístic, com havíem comentat amb Pólya, ja que apropa la gènesis del coneixement i la

[12] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 99, Le Bon
[13] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 100

seva transmissió. Actualment, aquests dos processos estan allunyats i la millor solució seria que anessin el més propers possible.

Finalment, acaba la conferencia fent referència a unes instruccions que va donar la UNESCO sobre l'educació matemàtica, entre elles destacaria:

"Que la iniciación matemàtica se adapte etapa por etapa a las operaciones intelectuales características de los diferentes grados de desarrollo del niño y utilice recíprocamente todos los recursos que estas operaciones llevan consigo"[14]

"Que la actividad del niño en sus capacidades de invención vaya siempre acompañada de un incentivo a la comprobación, de modo que la adquisición de cada nuevo sistema de operaciones o de relaciones marque un progreso en el rigor de los razonamientos"[6]

Segons les observacions del propi autor, l'ensenyament matemàtic d'Espanya en aquella època no estava endarrerit en quant a didàctica es referia.

En un conjunt de conferencies fetes per la radio nacional del 25 al 28 de gener de 1956[15], va analitzar les tendències actuals en l'ensenyament de les matemàtiques.

"La evolución de la didáctica podria caracterizarse por una primacía del acto de aprender sobre el acto de enseñar"[16]

La didàctica clàssica considerava que el centre de l'ensenyament era el professor, que només era important la claredat i l'ordre per ensenyar bé. Clarament això no és així, es van adonar que el centre de l'ensenyament és l'alumne i que per ensenyar bé, el que convé és guiar l'alumne en el procés d'aprenentatge. Així, per guiar correctament a l'alumne és imprescindible conèixer-lo bé, el professor ha de tenir un component psicològic.

Com el centre de l'ensenyament és ara l'alumne, el professor té que cedir davant les pròpies possibilitats d'aquests. És absurd intentar que els alumnes aprenguin a demostrar fets evidents, moltes vegades per la dificultat per seguir els raonaments abstractes que pertoquen.

---

[14] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgines 105-106, recomanacions UNESCO.
[15] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 111
[16] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 117

L'estudi de l'evolució de l'alumne determina l'evolució metodològica. Puig Adam suggereix quatre períodes:

1. Període d'observació: jardí d'infància
2. Període d'experimentació: primària
3. Període d'intuïció: batxillerat elemental
4. Període lògic: batxillerat superior

No és fins al darrer període que s'ha de desenvolupar la deducció lògica i la intuïció, en contra del que s'havia fet fins ara en l'ensenyament.

L'evolució dels modes ve condicionada per l'evolució de l'afectivitat del alumne i dels seus propis interessos. Un gran error de l'escola antiga és que concebia els alumnes com a dipòsits que s'han d'omplir amb coneixements mentre la didàctica moderna ho planteja com un potencial que es pot convertir en activitat, aquest ha de ser el principal propòsit dels professors i el seu gran repte.

La didàctica moderna planteja les classes com un taller de treball, els professors cada cop es semblen menys a conferenciants. L'ensenyament modern és més actiu, heurístic i el professor tan sols serveix per ajudar a l'alumne, per guiar-lo cap a on l'alumne pugui aprendre millor.

Puig Adam considera que l'adquisició de coneixements no és estable si no hi ha acció que la provoqui, distingint l'acció derivada d'una adaptació del alumne al mon físic i social o l'acció causada per una senzilla necessitat vital. L'ensenyament hauria de centrar-se en provocar una acció investigadora del alumne, ganes d'aprendre per ell mateix.

En el moment de la conferencia del autor (i també actualment) es donava més importància a comprovar que el que s'havia creat mitjançant la investigació era correcte que en l'acte de crear en si[17]. La matemàtica és una bona disciplina per practicar l'autocorrecció mitjançant un procés d'assaig-error, ajudant a educar l'objectivitat d'opinions i la fermesa de conductes.

El procés d'aprenentatge ha de ser creador, heurístic, funcional, espontani però sobretot i finalment, autocrític. En aquell moment la matemàtica deriva cap al formalismes mentre la didàctica evoluciona exigint més creació i descobriment en el procés d'aprenentatge, es a dir, evolucionen en direccions contràries. D'altra banda, la tècnica moderna implica utilitzar recursos matemàtics cada cop més avançats. Com a conseqüència, el treball del professor és cada cop més delicat i més dur.

Amb el mètode heurístic amb el qual ha experimentat, assegura que ha aconseguit bons resultats amb una bona conducció de l'alumne, amb un procés no excessivament lent,

[17] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 121, Kershensteiner

fomentant el propi descobriment de forma gradual segons la maduresa del alumne. L'autor conclou que l'alumne té un gran potencial quan se li desperta l'interès de forma suggestiva. Considera que seria interessant d'altra banda elaborar un programa complert de didàctica matemàtica activa i heurística pel batxillerat, a llarg termini.

"*Enseñar no es sólo cuestión de palabras, ..., enseñar es guiar por los procesos de aprendizaje, y no existiendo auténtico aprendizaje sin acción"*[18]

Anem a analitzar a continuació la conferencia que va donar l'any 1957 davant la federació d'amics de l'ensenyament en la XXVI setmana pedagògica[19]. En aquesta conferencia afirma que no existeixen persones negades en matemàtiques com popularment s'afirma, sinó que hi ha diferents ritmes d'aprenentatge. Considera un gran error el fet de presentar les matemàtiques com a compartiments (Àlgebra, Aritmètica, Geometria,...), ja que s'obvia d'aquesta manera la gènesis del pensament matemàtic.

Considera absurd el mètode lògic i hipotètic-deductiu, és absolutament necessari una didàctica activa i heurística. El gran problema que troba a la didàctica és com trobar els estímuls que promoguin la investigació, quan hi ha tanta varietat en els alumnes, tantes formes de ser i gustos diferents.

A continuació, s'analitzen els possibles inconvenients del mètode heurístic, com són ara:

1. Lentitud dels procediments: val la pena esperar, estant atent a que l'alumne no deixi d'actuar mentalment.
2. Falta d'homogeneïtat: Que hagi diferencies entre els propis alumnes és bo per a ells mateixos, promou l'autocorrecció establint un diàleg per corregir els errors mutus.
3. L'elevat nombre d'alumnes per classe: Considera essencial pel mètode heurístic que les classes siguin de màxim 30 alumnes.
4. Obsessió pels exàmens: Acaben transformant la formació en matemàtiques en una preparació per uns exàmens de matemàtiques, quan la formació i la preparació son en el fons quasi contraris. Els exàmens són un dels grans problemes de l'ensenyament.

Les conclusions amb les que acaba la conferencia són que les tècniques de l'ensenyament matemàtic necessiten una evolució per adaptar-les a les necessitats del món actual i les possibilitats dels alumnes, així com una evolució en els modes d'ensenyar, els programes, ... S'hauria de crear un programa de situacions estimulants perquè els alumnes puguin gaudir amb el descobriment de les matemàtiques, amb un clima de classes actives.

[18] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgines 131-132, Pere Puig Adam
[19] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 137

L'any 1955, a la revista *Gaceta Matemática* va publicar un decàleg[20], que ell prefereix presentar com uns suggeriments i no com unes normes de didàctica:

1. Adoptar la didàctica a cada alumne, adaptant-la constantment.
2. No oblidar l'origen de les matemàtiques ni els processos històrics que l'han fet evolucionar.
3. Presentar les matemàtiques relacionant-la amb la vida natural i social.
4. Anar amb compte amb els graus d'abstracció
5. Ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne
6. Estimular l'activitat descobridora despertant interès cap a l'objecte a estudiar.
7. Promoure sempre que es pugui l'autocorrecció.
8. Aconseguir destresa suficient en les solucions dels problemes abans d'automatitzar el procés.
9. Cuidar l'expressió de l'alumne.
10. Procurar que tot alumne pugui tenir suficients èxits per no desanimar-se.

El primer punt òbviament és conseqüència de que el centre de l'ensenyament ara és l'alumne. Oblidar l'origen històric de les matemàtiques pot causar que perdin el seu sentit, que pugi semblar que les matemàtiques és una matèria purament acadèmica, per això cal presentar-les relacionades amb la vida natural i social. L'ensenyament de les matemàtiques sempre ha de començar pel més concret i anar passant després al que és més intuïble o imaginable fins al final arribar al més abstracte. El professor ha de guiar a l'alumne perquè aquest pugui anar descobrint processos que resolguin els problemes plantejats, i han de ser problemes que promoguin el seu interès perquè investigui, comprenent bé els processos que l'han portat a la solució del problema abans d'automatitzar el mètode de resolució. S'ha de cuidar molt l'expressió matemàtica de l'alumne, té que saber el que diu i el que vol dir, amb cert grau de coherència. Finalment, tots els alumnes han de tenir suficients èxits, per no perdre la motivació ni que lis resulti les matemàtiques molt pesades ni avorrides.

Puig Adam, a la Conferencia Internacional de Instrucció Pública de Ginebra, convocada per Nacions Unides per l'educació, la ciència i la cultura, juntament amb l'Oficina Internacional d'Educació, el 9 de juliol de 1956[21], fa una síntesis de les recomanacions que allà es van fer.
D'entre totes, destacaria el fet que tot ha de posar-se a disposició per tal d'estimular a l'alumne i afavorir un aprenentatge actiu, però tant important és estimular a l'alumne com mantenir l'interès, si cal adaptant l'ensenyament a les capacitats individuals de cada un. Es considera altra cop indispensable que l'alumne visqui experiències reals abans de passar a la vessant

[20] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 156
[21] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 164

matemàtica lògica-deductiva, i considera molt profitós que els alumnes aprenguin dels seus propis errors, és vital l'autocorrecció. Finalment destacaria que les matemàtiques no s'han de comprendre com una matèria aïllada, sinó que s'ha de mantenir una coordinació amb la resta de ciències que en fan ús, i sobretot que les matemàtiques guardin contacte amb la realitat, amb el dia a dia.

En quan a la didàctiques específiques, va fer una classificació en quan a la geometria segons els objectius que es persegueixen, la didàctica per nivells[22]:

OBJECTIUS		DIDÀCTICA	NIVELLS
Adquisició tècniques elementals	Reconeixement i denominació de formes	Comparació de formes. Associació motrius. Llenguatge geomètric.	Primària i graus elementals.
	Construcció de formes	Dibuix lliure. Retalls. Associacions estètiques, mosaics,...	Parvulari i graus elementals.
		Ús d'instruments senzills: cordes, regles, compassos,...	Primària elemental i mitja.
	Mesurament	Mesurament directe de longituds i angles. Mesurament indirecte de longituds. Pitàgores, àrees i volums.	nivells mitjans i superiors
Preparació per cultura superior	Intuïció espacial	Forma i posició. Moviment. Simetries, translacions,...	Nivells mitjans i superiors
		Relacions de magnitud. Estimació aproximada de longituds. Associació cinemàtica. Equivalències.	Nivells elementals, mitjans i superiors.
	Iniciació al mètode lògic	Descobriment de propietats característiques i definició de figures	Nivells superiors
		Algun exemple de encadenament deductiu senzill.	Nivells superiors

Les matemàtiques considera que han de ser una activitat de raonament, ja que en altre cas es converteixen en una simple activitat de memoritzar sense cap mena d'activitat formativa.

[22] *La matemàtica y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 185

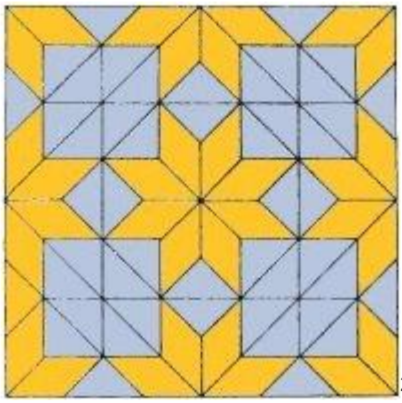
Un dels errors més comuns de l'ensenyament de les matemàtiques és que s'introdueixen conceptes de forma prematura, per posar un exemple, l'autor ens parla del càlcul usant variables, que si s'introdueix abans de temps pot portar a confusions com per exemple són:

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{a}=0 \qquad x^3+x^2=x^5 \qquad \sqrt{x^2+y^2}=x+y$$

Igualment les equacions també poden presentar problemes si es presenten de forma prematura. Es convenient presentar-les amb problemes del dia a dia, com són balances en les quals desconeixem un dels pesos.

Pel que fa a l'ensenyament superior, Puig Adam considera que el raonament deductiu es té que iniciar en el moment que sigui necessari per demostrar resultats que la intuïció pot deixar algun dubte, no abans. Convé que temes com la trigonometria no s'expliquin com una llista de formules, millor anar deduint les formules quan sigui necessari ja que així l'alumne en pot veure la seva utilitat. El millor procediment per tal que l'alumne comprengui les cadenes lògiques i a fer processos amb cadenes lògiques, com per exemple demostrar proposicions, és fent que ho intenti per la seva conta i ajudar-lo en el procés, i no donar-li tot fet i que ell només ho llegeixi i memoritzi. Aquesta participació en la elaboració del coneixement necessita de molta paciència per part del professor.

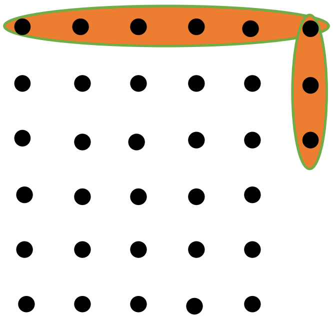
En quan a material didàctic, Puig Adam usa material del dia a dia, com per exemple una finestra amb la qual pot explicar les propietats de projecció, simetries, trobar rectes perpendiculars a una altra per un punt,... . D'igual manera proposar un paraigua, un faristol i analitza joguines com per exemple els jocs d'encaixos amb triangles i rombes formant un mosaic[23]. Aquesta activitat també la proposa Anton Aubanell a les orientacions pràctiques per a la millora de la geometria[24], on en el fons el que esta amagat és un fet tant poc trivial com és la irracionalitat de $\sqrt{2}$.


[25]

[23] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgina 282.
[24] http://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/orientacionsgeometria
[25] http://www.arrakis.es/~mcj/puigadam/mosaico.jpg

Pot ajudar a entendre més el càlcul d'àrees, perímetres, el teorema de Pitàgores i el càlcul amb radicals.

Pel càlcul d'arrels quadrades, utilitza botonets fent quadrats. Comença plantejant primer les multiplicacions d'un nombre amb ell mateix, com ara $2 \times 2, 3 \times 3, \ldots$ i a partir d'aquí denota el producte com a nombres quadrats. Després, fa el procés invers, donant la noció d'arrel quadrada amb nombres exactes. Finalment, diu un nombre que no té arrel quadrada exacta, i tot i que els alumnes poden dubtar de seguida s'adonen que té que ser un nombre decimal entre les dues arrels quadrades anteriors. Amb els botonets, el que passa per exemple si proposem que calculin l arrel quadrada de 33:[26]



El tros pintat és la resta, i intuïtivament porta a pensar que existeixen arrels quadrades no exactes. En resum, del que he extret de Pere Puig Adam destacaria:

1. La tècnica de l'ensenyament de les matemàtiques necessita una evolució que l'adapti a les necessitats del mon modern i a les possibilitats intel·lectuals dels alumnes.
2. L'evolució dels modes d'ensenyar són igual de necessaris que l'evolució dels programes educatius.
3. S'ha de crear un gran quadre de situacions estimulants perquè els nens pugin gaudir descobrint les matemàtiques.

[26] *La matemática y su enseñanza actual*. (1960). Pàgines 322-324

3.3. HANS FREUDENTHFAL

Hans Freudenthal va néixer l'any 1905 a Alemanya, i des de que era nen va estar interessat per les matemàtiques i la literatura. L'any 1923 va començar a estudiar matemàtiques a la universitat de Berlin, on va conèixer l'any 1927 a Brouwer, que havia anat a Berlin a donar una conferència. La seva tesis doctoral va tractar sobre grups topològics, que va defensar al 1930. Un cop aprovada la seva tesis, va mudar-se a Amsterdam per treballar com assistent de Brouwer.

Durant el període de la segona guerra mundial, Freudenthal va dedicar-se més a la literatura, i va tenir alguns problemes amb els nazis tot i que ell era alemany de naixement, perdent la seva feina a la universitat d'Amsterdam. No va ser fins al final de la guerra quan va recuperar el seu lloc de treball a la universitat però immediatament després, al 1946 se li va concedir un lloc de treball a la universitat de Utrech en matemàtiques pures i aplicades, on va treballar la resta de la seva vida professional.

Entre els anys 1967 i 1970 va ser l'octau president de la *International Commission on Mathematical Instruction* i al 1971 va fundar el Institute for the Development of Mathematical Education a la universitat d'Utrech, que quan va morir va passar a dir-se Institut Freudenthal. En la seva tasca com educador va adquirir fama a nivell mundial de ser el "pare" espiritual de l'educació matemàtica basada en la realitat.

En el document que he considerat per estudiar la didàctica i l'educació, comença citant el seu credo educacional:

"La matemàtica és una activitat humana"

Les matemàtiques han de ser vistes com una activitat humana, però alhora l'activitat humana dóna com a resultat les matemàtiques. Freudenthal és partidari de la teoria educativa fenomenològica en la educació matemàtica, que té el seu punt de partida en la pràctica de la educació i l'ensenyament i no en la transmissió de les matemàtiques com un sistema ja format.

Els punts de vista de Freudenthal contradiuen quasi qualsevol abordatge contemporani de la reforma educativa, però tot i així les seves idees han estat àmpliament acceptades. És partidari de que l'aprenentatge de les matemàtiques estigui relacionat en el context de la vida real, la vida quotidiana, com també diu Emma Castelnuovo i bastants dels autors consultats.

Freudenthal és força crític amb la inversió contrària a la didàctica de la instrucció tradicional d'ensenyament. Considera en quan a currículum que la teoria curricular no és un conjunt fixe, sinó que sempre té que estar en un procés relatiu de progrés. Aquest desenvolupament curricular s'ha de dur a terme a l'escola, mitjançant la col·laboració entre alumnes i estudiants.

Per Hans Freudenthal, el desenvolupament educatiu ha de fomentar un canvi en com es desenvoluparà l'ensenyament a classe. Quan es va produir el canvi entre el que hem anomenat la matemàtica clàssica i la matemàtica moderna, Freudenthal s'hi va oposar, ja que considera que la matemàtica moderna provoca problemes en quan a la seva aplicació i que s'han de plantejar de forma que les matemàtiques resultin útils. Per resultar útils es poden ensenyar el que s'anomenen eines matemàtiques.

La forma d'ensenyar començant pel resultat i després mostrant activitats, considera que és antinatural, que és al inrevés de com s'hauria de fer. Les matemàtiques, com ell considera que són una activitat humana, és una activitat de resolució de problemes, similar a la forma de pensar de George Pólya. Els problemes han de ser contextualitzats, i si pot ser, han de permetre donar possibles rutes d'aprenentatge. Això ens podria dur a pensar que els exercicis de càlcul repetitius o rutinaris no són el que Freudenthal prefereix.

L'autor parla de modelitzar la realitat mitjançant les matemàtiques, incloent les matemàtiques pures i les matemàtiques aplicades, però sobretot dóna importància en aquest sentit a les matemàtiques aplicades. Això s'ha de fer en un sentit ampli, ens aporta una forma d'organització que incorpora la disciplina matemàtica.

Considera equivalent matematitzar objectes o la realitat, i senyala que l'ensenyament de les matemàtiques sempre ha d'anar dirigit a modelitzar la realitat que viuen cada dia.

Freudenthal considera que no tots els alumnes han nascut per ser matemàtics, per això és partidari de donar més importància a ensenyar a resoldre problemes de la vida diària. Freudenthal fa una distinció entre:

1. Matemàtiques horitzontals: S'associen més a la realitat. Condueixen des del món de la vida quotidiana al món dels símbols.
2. Matemàtiques verticals: S'associen més a l'abstracció. S'opera més amb els símbols, manipulant-los mecànicament, comprenent-los.

Remarca que les fronteres entre aquestes dues matemàtiques són molt subjectives, depenent de les dificultats que troba cadascú en les matemàtiques.

En quan a la resolució de problemes, que com he dit considera interessant, fa menció dels problemes que tenen diferents processos de resolució. En aquest cas considera interessant que els alumnes treballin en equip, establint un diàleg que els ajudi a entendre nous mètodes de resolució de problemes.

Freudenthal considera que de la investigació educativa se'n fa un ús incorrecte, un ús estadístic. Pel que a ell respecta les teories de la educació no s'ajusten bé a la situació de l'ensenyament de les matemàtiques.

El procés d'aprenentatge no ha de ser continu, sinó que considera important que hi hagi discontinuïtats, on es podrà avaluar un cert nivell de comprensió. Per fer-ho, lo ideal seria poder fer un seguiment individualitzat dels alumnes.

Dóna especial importància a la història de les matemàtiques. Li dóna un sentit heurístic per l'objectiu de millor l'ensenyament de les matemàtiques. Per ell la història de les matemàtiques és una font d'inspiració. Freudenthal considera més importants als processos d'aprenentatge que a la pròpia invenció d'aquests, però vol que els alumnes tinguin la oportunitat de construir la seva pròpia base de coneixement matemàtic.

En la construcció del coneixement, es partidari d'un ensenyament actiu, els alumnes s'han de construir el seu propi coneixement, però el professor ha d'anticipar-se mentalment als alumnes per poder-los guiar en l'aprenentatge. Això pot afavorir la introducció d'objectes matemàtics mitjançant fenòmens pensants pel professor amb antelació, donant una idea de com van ser inventats aquests conceptes matemàtics.

Freudenthal és conscient de que la societat és canviant, que evoluciona, i per tant, l'educació s'ha d'anar adaptant a aquesta societat. La investigació que es porta a terme amb l'objectiu de d'adaptar l'educació, s'ha de fer a l'aula més que a acadèmies que estan més allunyades de la realitat. Considera que la investigació en desenvolupament té dues sortides, una a nivell de teories de la educació i l'altre a nivell de productes curriculars. En aquest mateix sentit s'oposa a que els sistemes curriculars siguin fixes i que els continguts de les matèries, en particular les matemàtiques, siguin encaixonats en esquemes i estructures. Ja hem dit que per ell les matemàtiques són una activitat humana, però també una re-invenció guiada.

Finalment, voldria acabar notant que Freudenthal intenta fer que les matemàtiques siguin accessibles per a tothom, essent partidari dels grups d'aprenentatge heterogenis. Per ell la didàctica són tots els processos correctes d'ensenyament i aprenentatge que tenen com a punt de partida la realitat i sempre es mantenen en la realitat, rebutjant fortament un abordatge deductiu de qualsevol tema. Segons la pàgina web de l'institut Freudenthal, un dels seus lemes era aprendre matemàtiques mitjançant el redescobriment.

3.4. CALEB GATTEGNO

Caleb Gattegno va néixer l'any 1911 a Alexandria, Egipte. Va estudiar matemàtiques, i de l'any 1932 al 1936 va treballar com a professor al Liceu francès a Alexandria. Va ser fundador i director del centre d'estudis superiors científic i tècnics del Cairo. L'any 1952 va fundar l'associació de professors de matemàtiques i una revista d'ensenyament matemàtic. La seva pedagogia matemàtica es basa essencialment en el dinamisme, obligant a l'alumne a formar les seves pròpies estructures mentals. Emma Castelnuovo, l'any 1980 a un congrés de la CIEAEM va ressaltar de Gattegno la seva aportació pedagògica entre 1950-1960 intentant connectar en un context didàctic les noves teories matemàtiques amb la investigació psicològica.

Comencem analitzant el llibre de *Introducción a los números en color*, d'on tracta el mètode educatiu de Cuisenaire-Gattegno de les regletes de color. El mètode, tot i està enfocat a l'educació primària, veurem que també té aplicacions en educació més avançada. En aquest llibre, es fa l'associació de nombre amb color, i amb la longitud. És important observar també que les regletes tenen la seva mida en base el sistema mètric decimal. D'aquesta forma, es té una analogia entre el pensament abstracte i el treball que fem amb les regletes.

"Con este material, la visión se asocia a la acción, la comprensión, el cálculo y la comprobación"[27]

Si s'utilitza el mètode dels nombres en color, es té l'avantatge de que cada nen aprèn els coneixements des de la pròpia base de la mateixa aritmètica, fent una pròpia descoberta del coneixement. La informació que s'extreu d'aquest procés deixa una impremta molt més duradora mitjançant imatges visuals i la manipulació d'instruments. També s'aconsegueix que el càlcul sigui més atractiu pel nen, i s'estableix una connexió entre la manipulació més senzilla i el que vindrà més endavant que és el treball sistemàtic.

L'ús que se'n fa de les regletes haurà de ser adequat al nivell d'aprenentatge de l'alumne, però és molt important que l'activitat sigui força controlada o preparada més ben dit pel professor, ja que si per exemple hi ha una errada per part seva i posa menys regletes de les necessàries per realitzar l'activitat, això pot causar la frustració de l'alumne. Proposa la següent distribució de regletes[28]:

[27] *Introducción a los números en color*. (1963). Cita de Cuisenaire, página 14.
[28] *Introducción a los números en color.* (1963). Pàgina 21.

COLOR	LONGITUT (cm)	NOMBRE DE REGLETES
Taronja	10	10
Groc	5	20
Rosa	4	25
Vermell	2	50
Blau	9	11
Marró	8	12
Negre	7	14
Verd Fosc	6	16
Verd clar	3	33
Blanc	1	50

Gattegno distingeix 4 fases o etapes que es succeeixen des de que comença l'ensenyament fins que es té ple coneixement de la matèria[29]:

1. Experiència mitjançant manipulació i tanteig. S'adquireix el coneixement del contingut i s'observen les seves limitacions.
2. Traducció de la experiència al llenguatge de l'educador, que pot ser llegint, escrivint, representant... .
3. La unió de la experiència i la representació forma un tot.
4. S'assoleix domini de la situació.

És de vital importància, que al segon pas s'hi arribi quan sigui estrictament necessari. En molts cassos, l'ús de l'escriptura pot resultar contraproduent, és molt més útil la pròpia experiència, s'ha de permetre a l'alumne que elabori els seus propis problemes amb les regletes.

L'opinió de Gattegno en quan als tests/exàmens és que són simplement una eina per mantenir contents els pares i les autoritats escolars. Un cop corregits, no creu necessari que l'alumne conegui la nota, ja que pot ser motiu de competició entre els alumnes. En tot cas la nota l'ha d'utilitzar el mestre com a orientació per conèixer les dificultats i mancances de l'alumnat. Durant els exàmens, si un nen no podia resoldre un problema mentalment o de forma tradicional, Gattegno era partidari de que poguessin utilitzar les regletes si els hi era d'ajuda.

En el llibre distingeix tres fases de l'educació: el Kindergarden, de 0 a 3 anys, la primària dels 3 a 12 anys i l'ensenyament superior a partir dels 12. En la primera fase, l'autor recomana el joc lliure com la millor forma d'experimentació, fent èmfasis en la no intervenció del professor

[29] *Introducción a los números en color*. (1963). Pàgina 25.

tot i que sembli que el joc que s'està desenvolupant és poc matemàtic. Amb els jocs que pugui fer amb les regletes, possiblement i trobaria la majoria dels coneixements dels llibres d'Aritmètica de la època, d'una forma oculta i més fàcil pel nen. És important que tot i que hem dit que associem nombres amb colors, amb l'ús de les regletes no intentem que l'alumne aprengui els nombres, sinó que aprengui les seves operacions.

En la segona fase, és quan es pot avançar cap a les notacions dels nombres si no es va fer en el Kindergarden, es tindrà una Aritmètica escrita i mental llavors. La majoria de nens aprenen els nombres aprenent a contar, però en cas contrari, un bon mètode de aprendre'ls és mitjançant la mesura de les coses (regletes). Les fraccions poden explicar-se com a operadors amb les regletes, i resultarà més senzill. Les taules de multiplicar que tradicionalment els nens aprenen de memòria, seria molt més productiu que les aprenguessin a base d'experiència i manipulació de regletes. En quan a les restes, es poden ensenyar a partir de qualsevol dels mètodes coneguts o també es pot ensenyar mitjançant restes equivalents, buscant una parella de nombres de la família de diferències equivalents més senzilla, per exemple[30]:

$$43 - 29 \Leftrightarrow 44 - 30 \Leftrightarrow 42 - 28$$

Pel mestre pot fer la sensació que hi ha restes més complicades que d'altres, però això és un problema intrínsec del nostre sistema numèric.

En aquesta fase, com en les altres, l'ensenyament es basa en les paraules. En fases més desenvolupades això no suposa tant problema, però en aquesta un nen amb poc lèxic pot suposar-li no entendre bé les matemàtiques i tenir la visió errònia que és dolent en matemàtiques.

En la última fase, destacaria que tot i semblar que les regletes no són útils o que tenen poca aplicació, Gattegno les proposa per l'explicació per temes que a priori no són trivials com són les operacions amb potencies i una introducció als logaritmes. En les potències en particular trobem l'exemple[31] de $3^7 : 3^4 = 3^3$, fet mitjançant torres de regletes.

Un dels errors en l'enfocament de l'ensenyament pel doctor Gattegno és considerar l'Aritmètica com un tema exclusivament d'aplicació. La conseqüència és que els alumnes no senten atractiu pel nombre i per tant, per la pròpia Aritmètica. Els aspectes que influeixen en el desenvolupament del seu ensenyament són el plaer intel·lectual que es pot obtenir, que per Gattegno està desatès, i el més comú, que és un instrument essencial en el desenvolupament de la vida diària, que és el que bàsicament s'inculca a l'escola.

[30] *Introducción a los números en color*. (1963). Pàgina 52.
[31] *Introducción a los números en color*. (1963). Pàgina 68.

Per Gattegno adquirir els coneixements matemàtics és més senzill comprenent que mitjançant cassos pràctics, com ja deia Pólya, aquests problemes poden resultar més difícils per la inexactitud amb la que solen ser presentats. En quan a les destreses aritmètiques, ell creu que es poden adquirir mitjançant un joc entre el nombre i la mesura, essent aquest mètode més profitós que el tradicional. La següent cita del propi Gattegno ens dona una idea de com entenia ell l'aprenentatge de les matemàtiques:

"*Las matemáticas se pueden aprender por el placer intelectual que proporcionan, pero abren las puertas a más amplios campos de interés en las que se encuentran nuevos motivos para disfrutar con ellas*"[32]

En resum, a Gattegno li devem en bona part el gran ús didàctic de les regletes, ajudant mitjançant l'analogia dels nombres amb els colors, ajudant a desenvolupar el pensament abstracte. Finalment és destacable també les fases que distingeix des del primer pas de l'ensenyament fins que els alumnes arriben a assolir plenament el coneixement.

[32] *Introducción a los números en color*. (1963). Pàgina 83.

3.5. EMMA CASTELNUOVO

Nascuda el 12 de desembre de 1913, fou filla del matemàtic italià Guido Castelnuovo, i tant ell com el seu oncle també matemàtic van tenir en ella una gran influencia en la seva vida professional. Es va graduar l'any 1936 en matemàtiques i el 1938 va obtenir una plaça de professora de secundaria, però degut a la situació política essent jueva va perdre-la poc després. Després de la alliberació de Roma el 1944 va obtenir una càtedra d'ensenyament secundari i va treballar a l'institut Torquato Tasso a Roma fins a la seva jubilació el 1979.

Emma Castelnuovo va escriure multitud de llibres i articles, sobretot de geometria i com ensenyar la geometria intuïtivament. Per intentar entendre com era la seva idea de la didàctica matemàtica, prendre com a referència la seva obra *La didàctica de la matemàtica moderna*[33].

Buscant informació sobre si havia escrit algun decàleg de didàctica matemàtica, he trobat que fa referència al escrit per Pere Puig Adam, citat anteriorment, el que ens indica que la seva forma d'entendre l'ensenyament de les matemàtiques no pot ser molt diferent. Per ella, a diferencia de Puig Adam són necessaris però uns principis fonamentals de didàctica general per donar serietat a l'ensenyament.

Considera que uns dels fets més greus en l'ensenyament de les matemàtiques és que en general resulta avorrit, es fa pesat i acaba essent difícil. Això porta a que l'alumne consideri que les matemàtiques o bé són molt mecàniques o són com un gran castell, una construcció esplèndida i acabada, no pensen que pot haver-hi encara descobriments a fer. Els problemes en la transmissió del coneixement matemàtic venen per part tant de l'alumne com del professor, però en aquella època els únics problemes que consideraven importants eren els problemes del programa. Les matemàtiques tenien una clara intenció formativa més que educativa o per resoldre problemes del dia a dia, no es donava importància a la metodologia, la formació mental era una conseqüència i no un objectiu a perseguir.

Molt important en la didàctica de Emma Castelnuovo són unes reflexions del seu pare, en les quals diu que el problema de l'escola és que s'ensenya a l'alumne a desconfiar de la intuïció, en lloc d'educar s'adoctrina i es perd l'aproximació a les matemàtiques reals del dia a dia.

Defensa fortament que l'ensenyament de les matemàtiques ha de ser cíclic, amb especial importància la geometria, la qual s'ha d'anar construint poc a poc primer des de l'observació i l'experimentació i més endavant des d'un punt de vista hipotètic-deductiu. Segons Emma Castelnuovo l'aprenentatge de l'alumne vindrà a partir d'una experiència directa, mitjançant els sentits:

[33] *Didáctica de la matemática moderna.* (1963).

"La mano es el instrumento de la mente"[34]

La escola activa proposa un ensenyament de forma cíclica com també proposa un mètode intuïtiu-constructiu. Per exemple, Montessori proposava activitats amb regletes, d'aquesta manera tenim que el mètode és més actiu, es pot operar amb les regletes, l'aprenentatge no és tant passiu. D'una forma similar Decroly proposava passar d'una estructura global a petites estructures, descompondre en petits elements, un mètode més analític però també actiu.

Sobre l'ensenyament que s'hauria de donar a les escoles de matemàtiques Emma Castelnuovo tenia clar que no s'ha de limitar el coneixement per fronteres geogràfiques ni socials, s'hauria d'ensenyar el mateix a tothom evitant així diferencies, entre per exemple, dues persones de diferents països. El professor té que tenir un gran coneixement sobre els problemes matemàtics per poder donar diferents valoracions d'un mateix problema, a més d'una bona metodologia.

Emma Castelnuovo distingia fortament entre matemàtica clàssica i matemàtica moderna, remarcant que la matemàtica moderna ha d'estar present en els programes educatius, però quan s'ha passat de la concreció a l'abstracció també s'ha d'explicar també tots els problemes que ha comportat arribar a aquests resultats. La diferències entre aquestes dues matemàtiques:

"El matemático tradicional estudiaba argumentos particulares que agrupaba según su grado de dificultad. El descubrimiento de las grandes estructuras ha cambiado el plano y la trama de la construcción de nuestro mundo"[35]

Es important notar que Castelnuovo reflexionava sobre si era necessari els exercicis típics de contes, llargs i monòtons, si no seria millor uns exercicis en els quals l'alumne hagués de reflexionar i treballar més mentalment, com Pólya amb l'ensenyament de les matemàtiques mitjançant problemes, ja que en aquella època ja amb les calculadores considera del tot innecessari que fessin moltes contes repetitives. Això portaria a una necessària modernització dels programes educatius de matemàtiques. Es busca arribar a un ensenyament que es basi en les concepcions fonamentals de les matemàtiques modernes.

Un mètode per explicar les regles dels signes, podria ser per comparació: proposa comparar els signes positius i negatius, amb la negació i afirmació establint una relació de correspondència inequívoca, i de forma similar ho fa amb els nombres parells i senars i les

[34] Maria Montessori (1870-1952), educadora i pedagoga italiana.
[35] *Didáctica de la matemática moderna*. (1963). Pàgina 36, cita de Gustavo Choquet.

seves sumes i restes corresponents. Tot i que es comparen coses que de principi no tenen res en comú, en el fons s'observa que tenen la mateixa estructura i que l'alumne pot tenir-ho interioritzat com una regla gramatical el que també es una regla matemàtica senzilla. S'aconsegueix una major comprensió dels conceptes i s'acosten les matemàtiques a la realitat.

"La enseñanza de las matemáticas debería partir de lo concreto para tomar las ideas generales y conducir al alumno a la abstracción"[36]

Aquesta cita descriu a la perfecció com concebia Castelnuovo la didàctica de les matemàtiques, amb el pas de lo concret a l'abstracte no com si fos un gran esglaó sinó com una espècie de simbiosi, no hi pot haver una cosa sense l'altra. Per aprendre a observar, distingeix quatre etapes que hauria d'haver en el curs[37]:

- I. Observació dels passatemps preferits dels alumnes
- II. Observació més precisa, utilitzant la mesura, veure les matemàtiques com un instrument
- III. Sistema hipotètic-deductiu, es compren el poder que tenen les matemàtiques
- IV. Finalment, relacionar les matemàtiques concretes amb resultats abstractes, com l'exemple més representatiu podríem prendre Descartes quan va identifica dues matèries aparentment tant diferents com són l'àlgebra i la geometria.

En les formes d'ensenyar matemàtiques, proposa que la millor manera d'aprendre a ensenyar és a l'aula, veient els errors o inexactituds que cometen els alumnes per trobar una forma de solucionar-los, però també així es pot observar la intuïció i la capacitat que poden arribar a tenir els alumnes, que mai han de ser infravalorats. El professor i l'alumne han d'anar construint la ciència junts.

"Ninguna instrucción es verdadera y educativa si no proviene de la actividad de los alumnos"[38]

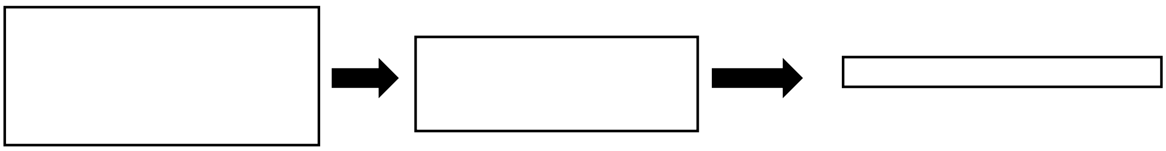
L'autora considera que mai s'ha de parlar d'un concepte a un alumne sense saber abans que sap el propi alumne d'aquest, ni que sigui per intuïció.

---

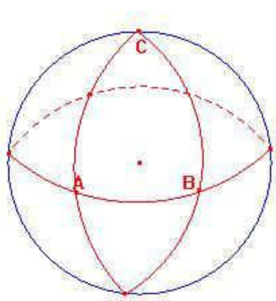
[36] *Didáctica de la matemática moderna.* (1963). Pàgina 64, cita d'Emma Castelnuovo.
[37] *Didáctica de la matemática moderna*. (1963). Pàgines 66-68
[38] *Didáctica de la matemática moderna*. (1963). Pàgina 70 cita de Pestalozzi.

D’Emma Castelnuovo sense cap dubte el més destacable és la seva dedicació a la geometria, i dins la geometria el treball amb materials. Considera que és molt important recorre sempre a la realitat, a la concreció, més val un objecte que un dibuix ja que sempre cridarà més l’atenció de l’alumne, i sempre és millor un objecte que es pugui articular, per l’estudi de diferents cassos i en particular, els cassos més paradigmàtics, els cassos límits.

Un exemple molt freqüent quan es parla dels materials d’Emma Castelnuovo és el de l’àrea d’un rectangle. Si agafem un cordill amb els dits formant un rectangle, i anem movent canviant la forma ens podem preguntar si l’àrea serà constant o anirà canviant. La intuïció d’un nen podria dir-li que l’àrea es mantindrà constant, doncs el cordill és el mateix, però si anem estirant el cordill i fent que un costat tendeixi a 0, al final l’àrea d’aquell rectangle serà 0 i per tant, no serà igual que qualsevol rectangle inicial. Què ha passat? Ha passat a ser 0 de forma immediata? Si fem calcular a l’alumne àrees de diferents rectangles, aniran observant que donen diferents valors, i aleshores poden intuir que l’àrea va variant segons anem canviant el rectangle. En un exemple tant trivial, on sembla que l’únic que es pot observar és si les àrees són iguals, en un nivell més avançat d’aquí podríem acabar veient que l’àrea és una funció continua dels costats del rectangle, i encara més, que l’àrea màxima s’obté quan els dos costats són iguals, és a dir, per a un quadrat, i això ja no és un exercici trivial de primària o secundaria sinó que correspondria a batxillerat.



Una altra experiència que proposa Castelnuovo és a partir d’un globus terrestre, la comparació dels angles d’un triangle en geometria euclidià i considerant un triangle sobre l’esfera. D’aquí, intrínsecament trobem conceptes de geometria global de superfícies i també el concepte de geodèsica, tant al pla euclidià com al propi planeta Terra.



[39]

[39] Extret de la web: http://platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0203/web_taller_0203/mujeres/laura/vuelos.htm

Aquestes activitats/experiències que he exposat i totes les que proposa Castelnuovo, tenen que dur-se a terme durant molt temps, interrompent-les, tornat a repetir-les i combinant-les amb altres experiències. És millor centrar-se en les nocions de les coses que en les definicions pures i abstractes. Els alumnes poden presentar segons la seva maduresa problemes en el llenguatge matemàtic. Emma Castelnuovo creu que el pas de lo concret a lo abstracte pot venir degut a la maduresa de cada persona però també per les experiències que hagi pogut viure. És molt important el temps que passin observant lo concret per fer el pas a lo abstracte el més fàcil possible. Per exemple, en l'aritmètica, pot haver problemes pel contrast entre el caràcter teòric i pràctic que té, però el més important és fer comprendre a l'alumne que la teoria és conseqüència de la pràctica.

Castelnuovo distingeix entre dos tipus de problemes: els que la vida per pròpia necessitat ens imposa i els provinents de l'observació del mon que ens rodeja.

Finalment, destacaria la seva idea de la necessitat d'un curs de geografia intuïtiva abans de passar a la hipotètica-deductiva, ja que la seva observació l'hi ha portat a la conclusió que el que més li costa d'una deducció són les hipòtesis que costen d'entendre.

"Comenzar una obra científica por la parte axiomática es cómo escribir una obra de la cual falta el primer volumen"[40]

En conclusió, Emma Castelnuovo sempre va fomentar que els alumnes aprenguessin per la seva conta, una didàctica activa en la qual l'ensenyament només té sentit si l'alumne participa a la construcció del coneixement i de gran rellevància són els materials que va utilitzar, el sentit que els hi va donar per l'ensenyament. Per a ella, el millor laboratori de didàctica possible és la mateixa escola, l'aula, no confia en les estadístiques ni tests, més val provar les tècniques per un mateix.

[40] *Didáctica de la matemática moderna*. (1963). Cita de Jean Louis Destouches.

3.6. MARIA ANTONIA CANALS

Maria Antonia Canals va néixer a Barcelona l'any 1930. L'any 1950 es va llicenciar en magisteri i tres anys després en matemàtiques per la universitat de Barcelona. Cal destacar que es va dedicar més a l'educació infantil i primària. L'any 1962 va fundar l'escola Ton i Guida, escola que va estar fortament compromesa socialment i amb la renovació pedagògica i el 1965 va fundar juntament amb altres mestres l'Associació de Mestres Rosa Sensat. Va ser la directora de l'escola Ton i Guida fins l'any 1979, i després va ser professora de didàctica a diferents universitats com l'autònoma de Barcelona, la universitat de Vic o la universitat de Girona. L'any 2001 es va jubilar, però va seguir com a professora emèrita per la universitat de Girona i al 2006 la generalitat li concedí el premi Jaume Vicens Vives. Amb la dotació d'aquest premi va fundar el GAMAR(Gabinet de Materials i Recerca per a la Matemàtica a l'Escola), que encara dirigeix a l'actualitat.

Per entendre la didàctica de les matemàtiques com Maria Antònia Canals he escollit el llibre de la periodista Purificació Biniés, *Converses matemàtiques amb Maria Antonia Canals*.

El llibre comença amb un pròleg de Claudi Alsina, en el qual destaca que Canals és un referent per l'educació matemàtica a l'escola en el nostre país. Destaca la seva visió crítica construïda a partir de la seva experiència personal, que serveix de guia per introduir canvis, trencar amb les rutines de càlcul i provar coses noves.

El format d'aquest llibre és d'una conversació com el propi títol indica, i comença essent poc optimista, passant a parlar dels antics als problemes actuals. La conversació es bassa principalment en la educació primària. Maria Antònia Canals considera fonamental ensenyar bé les matemàtiques per tal que els alumnes les aprenguin de debò. Distingeix dos pilars fonamentals en l'ensenyament de matemàtiques:

1. El coneixement de la matèria amb profunditat. Sinó el que hauria de ser una transmissió de coneixements es converteix en una transmissió de mecànica, no hi ha raonament.
2. Una bona didàctica, molt important sobretot pels mestres que tenen molt coneixement de la matèria.

És important remarcar que ensenyar no garanteix l'aprenentatge.

"L'objectiu de la didàctica, en general, no és ensenyar els alumnes, sinó que els alumnes aprenguin"[41]

[41] *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals*. (2008). Pàgina 14, cita de Maria Antonia Canals.

La base de tota bona didàctica que ajudi a aprendre és partir de la experiència de l'alumne, de la experimentació com ja deia Emma Castelnuovo. Aquesta didàctica està molt bassada en la pedagogia de Maria Montessori, que deia que la intel·ligència dels nens està en les mans. Per aquesta experimentació, com Gattegno i Castelnuovo considera que els materials manipulables són fonamentals.

Canals considera que la manipulació i experimentació són unes de les basses que ens permeten anar cap a la construcció i estructuració dels pensament lògic, com deia Miguel de Guzmán. Tot i així, l'experimentació no és suficient, s'ha de relacionar amb l'experiència i l'entorn de l'alumne perquè es produeixi l'aprenentatge. Com Pólya considera que el vertader aprenentatge és la descoberta del coneixement.

Una bona didàctica considera que ha de tenir en compte l'etapa de desenvolupament lògic que té l'alumne i les seves capacitats. Moltes vegades una de les errades és voler avançar la matèria, per exemple diu que, els professors d'institut no haurien d'estar tant preocupats per acabar els programes educatius, sinó que haurien de posar a l'alumne en el primer lloc de les seves prioritats, l'alumne hauria de ser el centre en l'Educació (Puig Adam).

El gran error que veu Canals en l'ensenyament mecànic de les matemàtiques, si s'obvia el camí de la comprensió, és que acaba provocant que els alumnes es tanquin a les matemàtiques per no entendre-les. Tot i així, encara que els alumnes arribin a la comprensió, cap coneixement és complert si no el saben expressar. Saber expressar el coneixement ajuda:

1. Concretar el pensament.
2. Assolir el concepte.
3. Poder aplicar el nou concepte a la realitat.

Els alumnes han de saber expressar la resolució d'un problema primer verbalment, després de forma escrita, mitjançant un dibuix o un text i finalment amb llenguatge matemàtic. A la secundaria Canals considera que s'hi arriba mal preparat en quan a matemàtiques i els professors haurien d'ajudar més als alumnes en lloc d'enfrontar-s'hi. El problema de l'ensenyament de les matemàtiques pot ser degut a que molts cops els alumnes no els hi veuen sentit, lo qual provoca el seu avorriment, com ja deien els anteriors autors estudiats abans quan es decantaven cap a que les matemàtiques usessin més la realitat.

Canals veu una dificultat afegida a les matemàtiques pel fet de tenir un llenguatge propi, com a solució provoca basar les classes en la pròpia experiència dels alumnes, fent interessant conèixer la realitat. Els objectius d'un mestre considera que haurien de ser:[42]

1. Interessar a l'alumnat i fer que gaudeixin descobrint.

[42] *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals.* (2008). Pàgines 20 i 21.

2. Ajudar als alumnes a descobrir les relacions matemàtiques que hi ha en els diferents àmbits de la realitat, per després aplicar-les.

En quan a la resolució de problemes, considera igual que Pólya que els problemes costen, però considera que això és degut a que no s'ensenya a raonar, que és degut al ensenyament mecànic que es fa de les matemàtiques.

Un dels mals de l'ensenyament de les matemàtiques és l'existència del que podríem anomenar currículum ocult, que el que dona a veure és que els alumnes no han de raonar per resoldre un problema, sinó que han de fer el que se'ls hi diu. Un bon problema planteja situacions noves i properes a la realitat actual que impliquin un repte de pensar, adequant-se al nivell evolutiu del alumne/nen i probablement admeten més d'una solució. Aquesta idea de problema quotidià ja la plantejava Castelnuovo i Pólya per interessar més a l'alumne.

A continuació, Canals parla dels problemes oberts. Freudenthal ja n'havia parlat, i els considera interessants per treballar-los en grup, ajudant a crea un debat/discussió amb les diverses solucions, ajudant a obrir la forma de pensar de tots els alumnes. Són interessants també els problemes d'enginy que es puguin plantejar amb un text com normalment, però també i en més importància els que pugin servir-se d'imatges i materials. Finalment, dels problemes considera que els tradicionals de càlcul si es fan, s'haurien de centrar en potenciar els de càlcul mental i els problemes de geometria és partidària com Castelnuovo d'usar material manipulable.

Per dur a terme una bona didàctica en quan a la resolució de problemes es refereix, s'ha de canviar la manera de veure i enfocar els problemes. Canals considera que els problemes porten inèrcies de no enraonar que acaben perjudicant els alumnes, mostrant sobretot problemes tradicionals perquè els hi és més fàcil a ells que pel profit que pugin treure els alumnes. Com Miguel de Guzmán, assegura que s'han de fomentar diferents formes de pensar.

A continuació, Maria Antònia Canals fa un anàlisis del que és més important en els quatre blocs de les matemàtiques:

1. Càlcul: és el més important en infantil i primària. La noció de quantitat és la primera abstracció que es fa de la experiència, no arriba del nombre escrit sinó amb la comparació de grups d'objectes. La noció de quantitat és inseparable de la noció d'operació. Els alumnes han d'entendre el significat de les operacions, no sols la seva mecànica. S'haurien de treball tres aspectes: la lògica de les operacions, la relació amb la vida i la resolució pràctica de la operació. Casals seria partidària per exemple de usar un material com les regletes de Gattegno.

2. Geometria: Destaquen 3 tipus de coneixements: les relacions de posició a l'espai, les formes que es troben a la vida diària i els canvis de posició i/o de forma. Les nocions d'ordre, línia i separació/continuïtat són els elements bàsics de la topologia que es pot considerar la base de la geometria: Per Canals, les formes fonamentals són la línia en 1 dimensió, la superfície en 2 dimensions i el volum en 3 dimensions. La noció de transformació s'adquireix mitjançant la pràctica, per exemple, la projecció pot fer-se amb ombres. Finalment considera molt important les metodologies en el procés d'aprenentatge.
3. Mesura: El més important és relacionar la mesura i la necessitat de mesurar amb l'entorn proper. S'ha d'explicar manipulant, amb exemples, i sempre s'ha d'anar des de la magnitud cap a la mesura. La idea d'unitat és una de les primeres abstraccions que els nens construeixen, i és important diferenciar la idea de comptar amb la de mesurar.
4. Probabilitat: És un bloc mal atès a l'escola primària. L'estadística es treballa bastant més perquè és fàcil i més interessant per la seva vessant més pràctica. Canals considera que la combinatòria és útil per estructurar el coneixement però observa que s'ha deixat molt de banda, proposa que s'hauria de practicar amb materials. La seva teoria és que la probabilitat a les escoles s'ha de treballar mitjançant jocs.

Més cap al final del llibre, se li pregunta a Maria Antonia Canals pels punts febles de l'ensenyament de les matemàtiques, i per millorar-los proposa:

1. Afavorir la construcció del concepte de quantitat sense sotmetre-la al nombre escrit.
2. Els mestres han d'ajudar als alumnes a entendre que hi ha diferents tipus de nombres, per exemple els negatius mitjançant l'experiència.
3. S'hauria de fer un millor i més profund tractament del concepte de fracció.

Canals es mostra molt partidària d'un aprenentatge actiu, com Emma Catelnuovo, a partir de la manipulació de materials i objectes.

Finalment, fa menció a la moda que va haver en els anys 70 de la teoria de conjunts. Considera que a l'escola primària funcionava bastant bé mentre que en el batxillerat era excessivament complicat, lo que va provocar el fracàs del mètode i va acabar arrastrant a la primària també. Pel que fa a la didàctica un dels punts febles seria l'excessiva dependència dels mestres pels llibres de text. Al final del llibre hi ha un decàleg de com treballar amb materials manipulables de la pròpia Maria Antònia Canals:[43]

1. Presentar una proposta de treball, si pot ser en forma d'una petita "investigació".
2. Convidar a l'acció, deixant ben clar que és el que es tracta de fer.

[43] *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals.* (2008). Pàgina 75.

3. Observar els nens i nenes, les seves reaccions, els seus interessos i acollir les possibles idees i iniciatives.
4. Estar disposat a canviar el camí previst per seguir-les, acceptant l'imprevist.
5. Demanar l'estimació de resultats en les mesures i el càlcul (base del càlcul mental) i l'anticipació de fenòmens geomètrics en l'espai.
6. Provocar i acompanyar la descoberta d'alguna cosa nova. Quan l'han feta meravellar-se i felicitar-los calorosament.
7. Potenciar el diàleg, invitant als alumnes que expressin allò que han fet i que han vist. Demanar-los una explicació oral coherents.
8. Resumir allo que s'ha fet, s'ha dit, i sobretot allò que s'ha après. Ajudar a formular conclusions.
9. Relacionar-ho amb coses que s'han treballat anteriorment, i, a vegades, amb altres activitats (calculadora, estadística, ...).
10. Opcionalment, passar alguna cosa a llenguatge escrit, primer col·loquial i després matemàtic (en xifres i signes).

De Maria Antònia Canals destacaria finalment que per ella, l'ensenyament no és pas garantia d'aprenentatge i que considera que l'objectiu de la didàctica no és ensenyar, sinó que els alumnes aprenguin. Igual que Emma Castelnuovo és partidària de l'experimentació dels alumnes amb el material, i com Pólya considera que el vertader aprenentatge està en la descoberta del coneixement. Així doncs, podem acabar intuint que Canals ha aprés de les diferents formes de pensar dels diferents autors tractats anteriorment.

3.8. MIGUEL DE GUZMAN

Miguel de Guzmán va néixer el 12 de gener de 1936 a Cartagena. La seva infantessa no va ser fàcil degut a tragèdies provocades per la guerra civil espanyola, com ara la mort del seu pare. Això va condicionar que tingues que estudiar en una escola per orfes a Madrid, però degut a una greu malaltia la seva mare va tenir que treure'l i dur-lo a viure amb ella a Bilbao. Va entrar a la companyia de Jesús i va estudiar Literatura i Humanitats a Vizcaya, Filosofia a Guipuscoà, que va acabar a Alemanya, però ja en aquells moments mostrava força interès per les matemàtiques.

Entre els anys 1961-1965 va cursa la llicenciatura de Matemàtiques a la universitat Complutense de Madrid, seguint a la companyia de Jesús. Gràcies als seus contactes jesuïtes va poder anar a estudiar a EEUU, on es va doctorar, però més endavant en contra dels seus profunds sentiments religiosos va decidir fer-se seglar per poder tenir una família. Quan va tornar a la universitat Complutense, va introduir gran varietat de problemes interesant per la investigació, lo qual va ser una gran contribució a la millora de l'ambient universitari.

Per intentar entendre les matemàtiques i el seu ensenyament com Miguel de Guzmán he escollit dos dels seus llibres: *Para pensar mejor* i *Tendencias innovadoras en educación matemàtica*, començant per aquest últim.

Per Miguel de Guzmán les matemàtiques no tenen perquè ser senzilles o fàcils. S'ha de tenir en compte que són una matèria que s'ha usat durant molts anys per resoldre molts problemes. En quan a l'educació que haurien de rebre els matemàtics, hauria de ser el més oberta possible i que els permetés estar oberts a canvis ràpids i profunds, tot i que l'educació es resisteixi al canvi.

Entre els anys 60 i 90 s'han produït profunds canvis en l'ensenyament de les matemàtiques. A l'any 1991, any que l'autor escriu aquest llibre encara s'està experimentant amb l'educació i canvi, però va ser entre els anys 60-70 quan es va produir una renovació cap a la matemàtica moderna, lo que va comportar:

1. Més importància a les estructures abstractes, sobretot en àlgebra.
2. Més rigor en la comprensió. Fonamentació a través de les nocions inicials de la teoria de conjunt.
3. Menys geometria elemental i intuïció espacial, lo qual dificulta el rigor.
4. Menys problemes interessants.

Molts dels canvis que es van introduir no van ser encertats, produint més inconvenients l'anomenada matemàtica moderna, com ja ha fet notar Lluís Santaló. Aquesta reforma cap a la matemàtica moderna es va produir al temps que la corrent més important era la formalista.

Per Guzmán, l'ensenyament de les matemàtiques hauria de considerar-se com una immersió en les formes de procedir del mateix ambient matemàtic. En els anys 80 després de la reforma de l'ensenyament matemàtic cap a la formalització, es van adonar que havien formalitzat massa i que s'havia de tornar un poc més cap a la intuïció i recolzar-se en la realitat, com ja deia bastants anys abans Emma Castelnuovo. També considera que per formalitzar rigorosament primer s'han de tenir experiències inicials, com Emma Castelnuovo que considerava que l'ensenyament ha de ser cíclic.

Per entendre la relació entre les matemàtiques i la realitat Guzmán apel·la a utilitzar la història de les matemàtiques i mostrar als alumnes les aplicacions de la matemàtica. La història de les matemàtiques no s'hauria d'explicar com anècdotes per entretenir l'alumnat ni fer-li més amè, sinó per ensenyar com es va assolir el coneixement actual, haurien de servir com a guia pràctica. L'ensenyament matemàtic hauria d'intentar mostrar el caràcter humà de les matemàtiques, per tal de fer-les més assequibles, dinàmiques, interessants i atractives. Això es pot aconseguir en part utilitzant la història, estimulant la recerca autònoma amb una guia. És important remarcar que moltes vegades l'ordre lògic no és l'ordre històric ni l'ordre didàctic. És indispensable que el professor conegui un poc de la història de les matemàtiques per[44]:

1. Comprendre millor els problemes que pot tenir la humanitat per entendre les idees matemàtiques
2. Entendre millor la il·lació de les idees.
3. Utilitzar aquest coneixement per la pròpia pedagogia.

Com Puig Adam, l'autor considera que és més important transmetre estratègies heurístiques adequades per resoldre problemes que donar formules com a solució per a cada problema que se'ns presenti. Com Pólya considera que la resolució de problemes hauria de ser un dels mètodes d'ensenyament més utilitzat, fomentant un aprenentatge actiu. A més, degut a l'aparició de les calculadores i ordinadors considera inútils els exercicis de càlculs, considerant més important el procediment que l'execució d'aquests. Com Pólya considera vital la motivació dels alumnes. L'ensenyament per resolució de problemes té que considerar com a més important[45]:

1. L'alumne ha de manipular objectes matemàtics
2. L'alumne ha d'activar la seva pròpia capacitat mental.
3. L'alumne ha d'exercitar la seva creativitat.
4. L'alumne ha de reflexionar sobre el seu procés de pensament per millorar-lo.

[44] *Tendencias innovadoras en educación matemática*. (1992). Pàgina 16.
[45] *Tendencias innovadoras en educación matemática.* (1992). Pàgina 18.

5. L’alumne ha d’aplicar el coneixement obtingut a altres aspectes.
6. L’alumne ha d’obtenir confiança en ell mateix i es té que divertir.
7. L’alumne s’ha de preparar per altres problemes ciències i de la vida quotidiana.

Miguel de Guzmán considera que l’ensenyament mitjançant la resolució de problemes requereix d’una immersió personal i que és més efectiu en grups petits, per la familiaritat que transmet, per la recerca d’estratègies possibles, per la selecció d’estratègies i portar-les a terme i, finalment, per reflexionar sobre l’estratègia que s’ha seguit. Per l’autor, les matemàtiques tenen una important component lúdica:

“*El matemático experto comienza su aproximación a cualquier cuestión de su campo con el mismo espiritu explorador con el que un niño comienza a investigar un juguete recien estrenado”*[46]

La importància que té la presentació i motivació és deguda a l’atracció que tenen els alumnes pels mitjans de comunicació. Guzmán considera que s’haurien d’aprofitar més els mitjans tècnics per l’ensenyament, com ara són els vídeos. Finalment, l’autor fa notar que la geometria ha de tornar a ser més intuïtiva ja que ha anat massa cap al formalisme, que ha portat a les males conseqüències actuals.

En el llibre *Para pensar mejor,* l’autor comença anunciant que aquest llibre té una clara intenció pràctica. Com Pólya, és de la opinió que s’ha de tenir molt clar el que es vol fer abans de fer-ho.

“En el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil”[47]

L’autor considera que es poden detectar estratègies generals de pensament que ajudin a resoldre problemes, és necessària una bona estructuració del pensament. Un cop una persona té unes estructures de pensament assentades, intentar canviar-les exigeix un esforç considerable.

En aquesta obra podem trobar multitud de similituds amb George Pólya, per Guzmán un problema és un autèntic repte, on sabem més o menys on volem arribar però desconeixem el camí. S’han d’evitar una sèrie d’actituds negatives que poden perjudicar la resolució d’un problema:

1. La por a lo desconegut.

[46] *Tendencias innovadoras en educación matemática.* (1992). Pàgina 25.
[47] *Para pensar mejor*. (1991). Pàgina 2, cita de George Pólya.

2. Pressa per acabar.
3. Desànim davant la prova.

L'actitud que Pólya deia que era vital per la resolució de problemes Guzmán la plasma en tenir confiança en un mateix, no tenir presses per resoldre un problema, una bona disposició per aprendre i curiositat i sobretot gust per l'activitat mental.

Molts cops els hàbits mentals que tenim ens poden produir bloquejos en la resolució de problemes, per tal de solucionar-los:

1. S'ha d'intentar veure el problemes des d'un punt de vista diferent al propi.
2. Fer "excursions" mentals fora dels propis hàbits conceptuals.
3. Tenir contacte amb gent amb diferents inquietuds per enriquir el teu punt de vista.
4. Viatja i conèixer noves cultures i formes de pensar.

A continuació l'autor fa una classificació dels bloquejos als quals es pot enfrontar una persona quan intenta resoldre un problema:

1. Tipus afectiu: Com deia Pólya, degut a les emocions, a la por del fracàs davant un problema, els problemes s'han de prendre com una preparació per la vida. A més de la por a fracassar també pot ser degut per apatia del alumne cap a les matemàtiques o fins i tot per la mandra que li pot suposar el començar a resoldre un problema, fet que condicionarà tot el desenvolupament.

   En el cas dels bloquejos per por, Guzmán remarca que a un alumne brillant a un examen li pot passar i llavors no serien significatius, com ja hem vist que opinen altres autors.

   Tot i així, Guzmán considera que experimentar el fracàs fins un cert punt és sa per ajudar a corregir-nos en el futur.
2. Tipus cognitiu: Poden ser deguts a dificultats en la percepció del problema, incapacitat per desglossar el problema o com atacar el problema. Molt sovint també influeix el tenir una visió dels problemes estereotipades que fa que vegem el que volem veure, degut a la pròpia rigidesa mental.
3. Tipus cultural o ambiental: Deguts a les formes de pensar que ens transmetem els uns als altres entre generacions o pels mitjans de comunicació. En aquest punt Guzmán introdueix el concepte d'idea inert, que és una idea que no té cap capacitat de posar la ment en acció.

Contra tots aquests bloquejos, suggereix fer llistes d'idees i preguntar sempre com una actitud positiva, igual que deia Puig Adam quan suggeria interrogar al professor.

En aquest llibre Guzmán proposa un esquema per la resolució de problemes molt similar al que ja va proposar en el seu moment Pólya, i considera que les matemàtiques són realment com un gran joc amb moltes regles. Per resoldre un problema es fa la distinció entre el mètode trivial que no aporta res i un altre mètode que quan has resolt aquell problema et serveix de patró per resoldre molts altres.

Per resoldre un problema que a primer cop de vista ens sembli massa gran o massa complicat, aconsella començar amb cassos particulars, o amb restriccions en aquell problema que ens puguin facilitar el procés. L'experimentació considera que és una de les tècniques més eficients en quan al descobriment i resolució de problemes.

Com Emma Castelnuovo, suggereix que s'haurien d'utilitzar més materials per il·lustrar problemes i ajudar a la seva comprensió, tot i que un problema evident i important que fa notar és la notació escollida amb un exemple trivial, de dues sumes, la primera la fa amb nombres romans i la segona amb notació decimal:[48]

$$\begin{array}{r} MCCCLXVI \\ +DCLXIX \\ \hline MMXXV \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1366 \\ +\,669 \\ \hline 2035 \end{array}$$

Tot i que aquest exemple sigui molt evident, salta a la vista que les notacions faciliten els processos mentals. Quan no sabem com abordar un problema, Guzmán proposa com Pólya cercar-ne un similar per intentar trobar processos que ens serveixin pel nostre problema.

En quan a mètodes per resoldre problemes Guzmán menciona que la inducció és un dels mètodes de demostració més freqüents, i una tècnica molt comú i útil és suposar el problema ja resolt, en exercicis del tipus:[49]

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} = ?$$

Moltes vegades els alumnes pensen que veuen la solució i deixen indicat una espècie de camí a seguir per arribar a la solució, però això es auto-enganyar-se i pot portar a problemes en el futur.

Guzmán considera que els professors han de tenir coneixements específics de la seva matèria, tot i que no té perquè donar-se una gran quantitat de coneixement en l'ensenyament, sinó per poder transmetre bé el coneixement. A l'hora de transmetre bé el coneixement no s'ha de presentar com un llistat de fets, s'ha de posar com una estructura dinàmica, d'aquesta manera:

4. Es facilita la seva assimilació, memorització e integració.
5. Facilitat l'accés al coneixement.

[48] *Para pensar mejor*. (1991). Pàgina 112.
[49] *Para pensar mejor.* (1991). Pàgina 130.

6. La seva utilització serà més profitosa.

"Lo que el professor dice en clase no carece de importancia, pero lo que los alumnos piensan es mil veces más importantes"[50]

Finalment, fa un petita reflexió sobre heurística. Considera molt important conèixer-se a un mateix per saber les pròpies limitacions, els punts forts i els punts dèbils en la resolució de problemes. Això ens pot indicar quina activitat heurística ens podem dedicar amb més confiança. Per obtenir un autoretrat heurístic referit a la resolució de problemes el millor mètode és l'examen detingut d'un bon nombre de protocols de resolució de problemes variats. S'han de considerar aspectes externs, afectius i cognitius, els aspectes que poden causar bloquejos.

En resum, Miguel de Guzmán és un autor sobretot de la segona meitat del segle, de la vessant matemàtica més del formalisme i no és tant optimista en quan a les capacitats de tots els alumnes. Tot i ser un autor que va viure en la època més formalista de les matemàtiques, considera un error la gran formalització i es mostra més partidari de la matemàtica clàssica, donant molta importància a la història per ensenyar a l'alumne com s'ha arribat al coneixement que es té actualment.

[50] *Para pensar mejor.* (1991). Pàgina 160, cita de George Pólya.

4. CONCLUSIONS

Un cop acabat el desenvolupament del treball, m'he anat adonant de varies coses. Primer de tot voldria fer notar que hi ha tres autors, que pels anys que van tenir activitat matemàtica i didàctica, poden resultar més interessants: Pere Puig Adam, per correspondre a la primera meitat de segle, Miguel de Guzmán, per correspondre a la segona meitat de segle i Emma Castelnuovo, per haver viscut durant tot el segle i haver-se mantingut activa durant la majoria del temps. A més, voldria observar que tant Puig Adam com Guzmán són espanyols, i ens donen una visió més nacional d'aquest tema mentre que Castelnuovo essent italiana ens dóna un poc d'idea més internacional.

Durant la primera meitat de segle Puig Adam ja criticava la situació en que es trobava l'ensenyament de les matemàtiques, sobretot per les demostracions força complicades que s'allunyaven d'una matemàtica més quotidiana. En definitiva, començaven a haver-hi crítiques per un excés de rigor que podia produir avorriment, diagnòstic que compartia Emma Castelnuovo, considerant aquest fet la causa de que les matemàtiques acabin resultant difícils. Tots els autors que he consultat coincideixen que és vital que els nens/alumnes tinguin més experiència abans d'anar cap a la formalització dels conceptes.

En quant els mètodes d'ensenyament, és generalitzada també la crítica que es fa sobre la poca psicologia que s'aplica per intentar ajudar més a l'alumne. Es tracta als alumnes com si fossin simples contenidors de coneixement. Per Emma Castelnuovo la culpa de que falli la transmissió del coneixement la tenen tant els alumnes com els professors, però els problemes que es consideraven més eren els problemes de programa.

La didàctica prioritzava més aprendre que ensenyar. Ja a meitat de segle però, s'observa que el que es pot anomenar didàctica moderna planteja més activitat, el professor ha de ser més guia, i es promou més l'aprenentatge actiu mitjançant l'acció. Un dels problemes pot ser degut a la desconfiança generalitzada que va provocar l'escola en la intuïció, ja que la majoria d'autors coincideix en que la falta d'intuïció és un dels punts febles de l'ensenyament de les matemàtiques.

En quan a Emma Castelnuovo, sempre va fomentar l'aprenentatge actiu i autònom, a més considerava que l'ensenyament de les matemàtiques no havia d'entendre de fronteres geogràfiques, la idea era fer un ensenyament el més internacional possible. Comparant els autors espanyols amb els de fora d'Espanya, com ara són George Pólya o Caleb Gattegno, s'observa que coincidien en moltes de les idees de com havia de ser l'ensenyament, per exemple, el plantejament d'ensenyar matemàtiques mitjançant la resolució de problemes, tot i que després cada un tingués els seus matisos. En aquest sentit, Guzmán era defensor de que l'ensenyament de matemàtiques es basés més en la resolució de problemes que no exercicis de càlcul, i per la diferencia generacional amb Pólya, podríem pensar que és per la seva influència.

Un altre aspecte que m'ha cridat l'atenció és la consideració que fan alguns autors de les proves o exàmens. En general, creuen que no tenen gaire sentit ni utilitat, que poden crear una competició entre els alumnes poc saludable que acabi causant, en alguns casos extrems, el fracàs d'algun d'ells.

Una altre tendència que ha perdurat durant tot el segle XX és el mètode heurístic. Puig Adam va ser un dels grans defensors, però també en l'àmbit internacional George Pólya s'interessava força per la resolució de problemes i ja més endavant Miguel de Guzmán fa menció a l'heurística com un bon mètode d'ensenyament de les matemàtiques.

En general, els autors en les seves obres diuen que les matemàtiques són assequibles per tota la gent, menys Miguel de Guzmán. Ell considera que son una matèria que s'ha desenvolupat durant molts anys i ha tingut molta utilitat, i que per tant, no tenen perquè ser fàcils. Això pot ser degut a que, en la època que ell va treballar i estudiar més, ja s'havia produït la forta formalització de la segona meitat del segle XX, i les matemàtiques havien deixat de ser intuïtives i relativament més senzilles, passant a la teoria de conjunts que sovint complicava la transmissió de coneixement en cursos avançats.

Caleb Gattegno i Maria Antonia Canals van tractar més l'ensenyament de matemàtiques durant la primària, i com Emma Castelnuovo consideraven que l'ús de materials ajuda a la transmissió de coneixement. Canals donava importància a que els professors coneguin bé la seva matèria. Això pot ser degut a que, en l'actualitat, els mestres de matemàtiques a la primària no són graduats en matemàtiques i pot ser no han rebut tanta formació com caldria.

Finalment, voldria acabar remarcant uns punts que he observat repetidament i més en general:

1. Es considera que la geometria hauria de ser més intuïtiva i no tant formal.
2. Molts autors estan a favor de l'ús de materials per ajudar en la transmissió dels coneixements, i en l'ensenyament mitjançant experimentació.
3. Un dels problemes més greus és que sovint les matemàtiques s'ensenyen de forma mecànica, no s'ensenya a raonar i això a la llarga causa bloquejos i avorriment. Són partidaris de l'ensenyament mitjançant la resolució de problemes i no per la resolució de càlculs sense sentit.
4. Les matemàtiques modernes van provocar problemes en quan la seva formalització va resultar massa complicada.
5. La figura de professor com a conferenciant està obsoleta, el professor hauria d'ajudar als alumnes, guiar-los més que adoctrinar-los.

Quan vaig començar aquest treball va ser impulsat per intentar conèixer quins problemes en quan a l'ensenyament de matemàtiques havia en el segle passat, o quins problemes es creia que havia, ja que durant tota la meva educació primària i secundaria vaig veure que les matemàtiques eren (i són) una de les matèries més complicades i que provocaven més aversió a la gent. Al final del treball, podria concloure que això és degut en bona part a la falta d'una aplicació que pugui resultar d'utilitat als alumnes, alguna cosa que els alumnes puguin veure a la vida diària i associar-ho a les matemàtiques.

Els autors en didàctica de les matemàtiques han proposat moltes solucions al problema de l'allunyament de les matemàtiques de la realitat, però fins ara en la majoria dels cassos l'ensenyament de les matemàtiques porta unes fortes inèrcies, que difícilment són corregides, com ara els exercicis de contes i càlculs en lloc d'exercicis més contextualitzats o d'aplicació real. En l'actualitat, moltes classes es porten a terme mitjançant exposicions de PDF on difícilment es veu una realitat matemàtica que podria veure's mitjançant la manipulació de materials com són senzillament unes cartolines amb formes geomètriques o els materials de Cuisenaire als primers nivells de l'ensenyament.

5. BIBLIOGRAFIA

La biografia segueix el format APA, que ha estat extret de la pàgina web del CRAI de la Universitat de Barcelona, que explica com citar llibres i documents tant físics com electrònics, en la següent direcció web:

http://crai.ub.edu/es/que-ofrece-el-crai/citaciones-bibliograficas/especialidades

[1] Puig Adam, P. (1960). *La matemàtica y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional

[2] Martín Casalderrey, Francisco. (2000). Casi todas las ideas didácticas de Puig Adam. *Suma* (34), 113-120. Recuperat de http://revistasuma.es/IMG/pdf/34/SUMA_34.pdf

[3] Aubanell, A. (2005). *Galeria de didactes il·lustres: Pere Puig i Adam* [Apunts acadèmics]. Campus Virtual UB.

[4] Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. México, D.F.: Trillas.

[5] De la Llave Canosa, Ángel. (2011). Aprender y enseñar matemáticas. *Padres y maestros* (338), 15-19. Recuperat de https://revistas.upcomillas.es/index.php/padresymaestros/article/download/432/350

[6] Ortiz Rodriguez, I., i Ramirez Alvarez, M. (2014). Emma Castelnuovo: Las matemáticas de lo cotidiano. *Divulgación matemàtica, VII* (3), 11-13. Recuperat de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4760651.pdf

[7] Vernor Arguedas, T. (2012). George Pólya: el razonamiento plausible. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 12* (2), 1-11. Recuperat de http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Historia/RevistaDigital_VArguedas_V12_N2_2012/index.html

[8] Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D. F. : Trillas

[9] Aubanell, A. (2005). *Galeria de didactes il·lustres: George Pólya* [Apunts acadèmics]. Campus Virtual UB.

[10] Gattegno, C. (1963). *Introducción a los números en color*. Cuisenaire de España.

[11] Lluis A. Santaló. (1975). *La educación matemática, hoy.* Barcelona: Teide.

[12] Santaló, L. (1993). *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*. Vic: Eumo editorial.

[13] De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Buenos Aires: Talleres gráficos EDIPUBLI S.A.

[14] De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

[15] Biniés, P. (2008). *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals: O com fer de les matemàtiques un aprenentatge apassionant*. (1ª edició). Barcelona: Editorial GRAÓ, d'IRIF SL

[16] K. Gravemeijer y J. Teruel. (2000). HANS FREUDENTHAL, un matemático en Didáctica y teoría curricular, *32* (6), 777-796. Recuperat de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/hansfreudenthal.pdf

[17] Freudenthal Institute. (1990). *Freudenthal Institute*. Recuperat de http://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute

[18] Zoltan Dienes. *Zoltan Dienes' web site*. Recuperat de http://www.zoltandienes.com/

6. ANNEXOS

6.1. LLUÍS ANTONI SANTALÓ

Lluís Antoni Santaló va néixer el 9 d'octubre de 1911 a Girona. Va estudiar matemàtiques a la universitat de Madrid, on es va doctorar l'any 1935, però també va cursar a estudis a Hamburg, París o Chicago. Va treballar com a professor d'universitat a Espanya, però degut a la guerra civil va tenir que deixar-ho. Es va allistar a l'aeronàutica republicana, però com van perdre la guerra es va tenir que exiliar. Va acabar treballant a Argentina aconsellat per Julio Rey Pastor, que també havia estat mentor de Pere Puig Adam on va treballar com a professor universitari. Cal destacar que es va especialitzar en el camp de la geometria diferencial i integral a la universitat de Buenos Aires, i va ser una eminència en aquest camp, tant per les seves investigacions com per la seva forma de transmetre el coneixement.

De Lluis Santaló, he agafat els llibre titulats *La matemàtica: una filosofia i una tècnica* i *La educación matemática, hoy*. Començaré per aquest últim.

Aquest llibre tracta bàsicament tres punts de vista per enfocar un mateix problema, el de com es planteja l'educació matemàtica en qualsevol nivell al voltant del món. El llibre comença remarcant que les matemàtiques han format sempre part del sistema educatiu i fent un repàs històric, anant fins a l'antiga Grècia, i citant a Plató ens dóna la visió de com s'entenia la matemàtica en aquell temps, com una forma de instruir millor als homes que en el futur tindrien al seu càrrec protegir i organitzar la República. En aquella època es donava molta importància a l'aritmètica i en segon lloc a la geometria. El gran error de la matemàtica grega va ser la limitació que li va imposar Sòcrates, que la excloïa del tractament de les ciències naturals del home. L'ensenyament de les matemàtiques va ser limitat a l'estudi de formules exactes per calcular àrees i volums de cossos molt regulars. Això no té massa sentit, ja que la majoria de cossos són irregulars.

Les matemàtiques a l'antiguitat també tenien una aplicació força important: la guerra. Podies saber si una civilització o un poble estava avançat en matemàtiques per com li anaven els conflictes bèl·lics. En el mon més recent també té la seva importància, només cal remuntar-se a la segona guerra mundial per veure que es va guanyar gràcies a la bomba atòmica, que sense molts càlculs i matemàtiques no hagués estat possible.

Superada ja l'època grega, tenim que quan apliquem les matemàtiques a les ciències del home no són exactes: sorgeixen més recentment la probabilitat i la estadística, que tot i perdre exactitud en els càlculs fan que les matemàtiques es puguin aplicar a més cassos. És el que es coneix com la matemàtica moderna, a la qual no li falten critiques per sonar com una simple fantasia. Per Lluis Santaló aquesta matemàtica ha de ser inclosa a l'educació, ja que la considera més útil, més flexible, per al mon real. Fins ara els autors que hem vist fan menció que l'ensenyament de matemàtiques ha d'estar enfocat a problemes reals i quotidians més que problemes de simples càlculs o abstractes que avorreixen, però és el primer cop que es parla de la probabilitat i la estadística com a eina per aquest objectiu.

Per l'autor, la educació en l'àmbit de les matemàtiques ha de ser adaptada per viure en el mon actual, no poden servir els mateixos programes de fa 100 anys ja que els problemes diaris d'avui són molt diferents. Fa especial referència a les calculadores i els ordinadors, com una eina molt fructífera per l'ensenyament i suggereix que s'hauria d'educar en matemàtiques orientant més a l'alumne en el coneixement de taules de nombres (estadística) i gràfics de les pròpies taules.

Considera les matemàtiques com un eina que permet donar solucions no evidents a problemes, unes solucions que molts cops seran més útils que la solució trivial que es veu a simple vista. En l'estudi d'un problema, no hi ha que conformar-se a trobar la solució fàcil ja que probablement no ens aporti res. L'objectiu de la educació matemàtica ha de ser ensenyar a descobrir aquestes solucions no evidents.

Les matemàtiques les compren com una dualitat entre ciència natural que persegueix modelitzar i entendre les lleis de la natura i com una filosofia en el més sentit platònic. Els perills que presenta l'ensenyament de les matemàtiques són una polarització cap un d'aquests aspectes, que portaria a un ensenyament incomplert o en cas contrari una extrapolació de les matemàtiques més enllà dels seus límits, el perill de lo qual resideix en la falta de verificació experimental.

Igual que Pólya, en la resolució de problemes dóna molta importància a l'actitud i la voluntat de resoldre'l, sent insuficient la potència dels ordinadors o les calculadores. L'ensenyament de les matemàtiques hauria de contemplar dos aspectes:

1. Informatiu, donant els elements necessaris per desenvolupar-se en la vida diària. Aquest aspecte molts cops esta massa basat en càlculs, com diu més endavant Miguel de Guzmán, i és poc real com diu Emma Castelnuovo.
2. Formatiu, ensenyant com pensar i fomentant un esperit crític.

El dilema entre aquests dos aspectes és la proporció en la que s'han de donar i quina metodologia és la millor. En l'ensenyament, Puig Adam deia que el centre té que ser l'alumne, mentre que Lluís Santaló considera que és molt important interessar a l'alumne, que ve essent molt similar.

En quan a l'educació primària, Santaló considera que els alumnes no s'han de dedicar només a operar sinó que tenen que començar a raonar. Això, es pot fer com hem vist amb

Gattegno, mitjançant jocs. Com deia també Castelnuovo, l'ensenyament formatiu ha d'anar de la ma de l'ensenyament actiu.

En quan a les matemàtiques, considera que el més important és saber resoldre problemes reals més que memoritzar formules, teoremes, etc. En el mon actual és mes necessari la matemàtica, per tant, torna a indicar que és necessari una reforma en els programes per fer-los mes adients als problemes actuals. La matemàtica que en aquella època es dona més importància per resoldre problemes és la teoria de conjunts.

Per Lluis Santaló l'escola secundaria presenta les mateixes característiques, en línies generals, que la de primària, i la diferència la veu en els temes i el nivell de abstracció. És important que s'elimini la idea que la matemàtica moderna esta absent de càlcul. Considera important que la geometria analítica més senzilla com és el càlcul en coordenades i les transformacions afins més bàsiques siguin matèria d'estudi a la secundaria. El professor de secundaria ha de assumir que el que l'alumne ha après a primària esta bé i ha d'edificar el nou coneixement sobre el que ja sap l'alumne. També considera que les propietats dels grups, anells i grups poden anar-se'n introduint quan sigui convenient.

Les matemàtiques durant la secundaria han de tenir aplicacions pràctiques per tal de motivar a l'alumne, si tota la matèria fos abstracta es podria provocar la frustració dels alumnes i acabar perdent les ganes d'aprendre-les.

A partir dels cursos universitaris es pot distingir l'existència de les matemàtiques pures i les matemàtiques aplicades. La tendència és fer-ho abans dels primers cursos universitaris, per a l'autor això es un error. La gran quantitat de matèria matemàtica implica que en els cursos avançats l'ensenyament ha de ser més especialitzats. Per ensenyar matemàtiques a no matemàtics, el problema que observa Santaló és quins temes ensenyar, problema que ja observaven els anteriors autors en l'educació en general. El problema en tots els nivells en general és que s'han d'ensenyar moltes matemàtiques en poc temps.

En la època que va escriure el llibre Santaló, observa que el treball del docent era més senzill quan el coneixement matemàtic estava més estàtic, però en ple dinamisme matemàtic el professor s'ha d'anar actualitzant constantment. El problema de la transferència de informació matemàtica és la notació que s'usa en molts cassos, que no entén tot el mon i molts cops fan difícil la transmissió. Sempre en el coneixement primer ve la creació i després la simplificació, que fa més fàcil la seva transmissió. Això també pot ser un problema, ja que la matemàtica clàssica ha sofert tanta síntesis que al final ha quedat molt rígida i obsoleta, però la matemàtica moderna d'altra banda té tanta generalitat que és difícil concentrar-la a cassos concrets de la vida real.

Al final del llibre, Santaló proposa fomentar que l'alumne es comporti de forma lògica en societat, educant en la observació i reflexió. Senyala les següents aplicacions en l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques[51] :

1. Els alumnes han d'estar capacitats per relacionar els coneixements matemàtics i les habilitats que han aconseguit amb el mon real.
2. Els alumnes han de saber utilitzar en la vida diària elements matemàtics com taules de dades, gràfiques, etc.
3. Els alumnes han d'utilitzar com eines temes o idees matemàtiques tot i que no se'ls hi hagi ensenyat explícitament a l'escola/institut.
4. Els alumnes han de comprendre que les matemàtiques són una ciència oberta.

En el llibre *La matemàtica: una filosofia i una tècnica* comença fent una comparació entre el que són les matemàtiques i el que és l'art, les matemàtiques i la màgia i les matemàtiques i la filosofia. Considera que les matemàtiques són en molts aspectes un art ja que un artista és creador i un matemàtic és creador i descobridor. Durant l'edat mitjana, les matemàtiques tenien aspectes màgics i misteriosos, un exemple molt trivial són els quadrats màgics:

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Aquest quadrat és la única combinació que la suma de files, columnes i les dues diagonals és sempre constant. Finalment considera les matemàtiques com una filosofia per quantificar lleis, i la diferència entre matemàtiques i filosofia és que les matemàtiques són una ciència.

En aquest llibre, Santaló fa un repàs històric de com s'ha arribat al coneixement actual de les matemàtiques, és important notar que el primer cop que la geometria es va deslligar de la observació va ser ja a la Grècia clàssica davant la impossibilitat de comprovar experimentalment alguns dels resultats. Més anteriorment, les matemàtiques babilòniques i egípcies eren més empíriques i eren considerades una eina. En el papir Rhind, s'han trobat problemes pràctics lo que ens indica que ja existia la curiositat pels problemes d'enginy i probablement va ser el que va impulsar la creació matemàtica.

Plató considerava les matemàtiques com una eina per "elevar el coneixement de l'ànima fins al coneixement del bé"[52]. Això va comportar que la matemàtica aplicada es donés de banda i clarament va condicionar l'ensenyament de les matemàtiques que s'ha fet en els

[51] *La educación matemática, hoy.* (1975). Pàgines 93-94.
[52] *La matemática: una filosofía i una técnica.* (1993). Pàgina 32.

segles posteriors. Va fer que les matemàtiques es consideressin bàsicament una ciència deductiva.

Durant l'edat mitjana tenim que no va haver res nou en quan a la producció matemàtica, l'únic que es van dedicar va ser a copiar el que tenien els egipcis i els grecs fent ús d'elles en poques situacions. Va ser una època de decadència de les matemàtiques. L'ensenyament de les matemàtiques es basava en la repetició d'obres clàssiques com podien ser els *Elements* d'Euclides, que fins fa poc van ser una guia en l'ensenyament de la geometria. Sobre l'any 1000 Gerbert d'Orlhac va ser un dels principals propulsors del sistema indo-aràbic de numeració.

El renaixement va arribar a les matemàtiques cap al segles XV-XVI juntament amb la invenció de la impremta, lo que va ajudar molt a la difusió del coneixement. Tot i així, les matemàtiques no es van aplicar a les ciències del home com són la economia fins al segle XX, lo qual limitava el seu desenvolupament. Tot i que matèries com la probabilitats daten de temps molt remots (jocs d'atzar, pressa de decisions,...), no va ser fins en aquest punt que es van desenvolupar d'un punt més formal, igual que la estadística.

En resum, en aquest llibre Santaló ens mostra una evolució històrica de les matemàtiques cap al formalisme i la generalització. Actualment gràcies als ordenadors, les probabilitats es poden calcular mitjançant repeticions de molts successos aleatoris sense necessitat de fer-ho realment, lo que duria molt treball i molt temps. La principal desavantatge del gran desenvolupament de les matemàtiques és que actualment ja no es pot tenir tot el coneixement concentrat a una mateixa biblioteca tradicional, no es pot accedir a tot el coneixement original.

En quan a l'ensenyament de les matemàtiques, Santaló fa menció també a com les olimpíades matemàtiques formen un fort impuls cap als alumnes en l'estudi i la dedicació a les matemàtiques, posant problemes de secundaria que tractin més l'enginy que no el càlcul sense cap motiu no fonament. Els problemes que s'han de tractar no han de ser problemes obsolets, sinó que s'ha d'intentar cridar l'atenció de l'alumne. Tot i així, les olimpíades matemàtiques són molt debatudes des del punt de vista formatiu.

6.2. ZOLTÁN PAUL DIENES

Zoltán Paul Dienes va néixer a Hongria a l'any 1916, però als 16 anys es va traslladar a Anglaterra. Va viatjar per tot el món difonent la seva visió de l'ensenyament de les matemàtiques, sobretot per a nens més que per alumnes d'ensenyaments superiors, ja que la seva visió era d'un ensenyament de matemàtiques sobretot mitjançant jocs.

Dienes va desenvolupar el camp de la Psico-matemàtica, és a dir, la psicologia de l'aprenentatge de les matemàtiques, treballant com a director del centre d'investigació d'aquesta mateixa matèria a la universitat de Sherbrooke a Quebec. Una vegada ja jubilat va treballar com a professor en el departament d'ensenyament de la universitat d'Arcàdia. D'aquesta última època molts mestres recordaran amb estima les seves visites a les classes.

A la pàgina web del Zoltán Dienes, he trobat una de les seves teories, en la qual considera sis estadis en l'aprenentatge de les matemàtiques. Aquests estadis que explicaré a continuació, són progressius, essent més assequibles els primers estadis a la primària i progressivament puja el nivell:

1. Estadi 1: Aquest estadi es pot anomenar estadi del joc lliure. És el principi de l'aprenentatge, en la qual els alumnes s'enfronten a problemes que no saben com enfrontar-s'hi. En aquests casos, el mètode que solen utilitzar per intentar solucionar-lo és assaig-error. En aquest estadi els alumnes es familiaritzen amb la situació.
2. Estadi 2: Aquest estadi es pot anomenar estadi de jugar amb les normes. Després de l'experimentació de l'estadi un i d'haver comés errors intentar solucionar el problema, l'alumne sen adona de certes regularitats que pot tenir el problema, com un joc. Les activitats es poden convertir ara en jocs, considera que aquesta part és fonamental per l'aprenentatge.
3. Estadi 3: Aquest estadi es pot anomenar estadi de la comparació. Un cop els nens estan fent diferents problemes similars (jugant a varis jocs semblants), és l'hora de discutir sobre aquests jocs, comparant-los amb altres de similars, utilitzant diferents materials. És convenient posar nom a les operacions que els alumnes porten a terme i els materials utilitzats, diferents noms per diferents jocs, observant la correspondència d'aquests materials i operacions entre jocs.

   D'aquesta forma els alumnes s'acaben de donar conta que els materials són el menys important, i a partir d'aquí es poden donar els primers casos cap a l'abstracció.
4. Estadi 4: Aquest estadi es pot anomenar estadi de la representació. Quan ja s'ha identificat el contingut abstracte de diversos jocs, és el moment de suggerir alguna forma de representació gràfica, com són esquemes, taules o sistemes de coordenades, que ajudi a fixar-se en el nucli comú dels diferents jocs.

No sempre s’ha d’esperar veure d’un joc una possible abstracció, però podem intentar inventar una representació que ens doni un flash del que s’ha extret o abstret de les activitats o jocs.

5. Estadi 5: Aquest estadi es pot anomenar estadi de la simbolització. Un cop tenim la representació feta de l’estadi anterior, podem extreure’n propietats que tenen tots els jocs estudiats. Els descobriments es poden comprovar jugant a un o més dels jocs. Es pot desenvolupar un llenguatge elemental per expressar aquestes propietats. Aquest llenguatge pot aproximar-se al llenguatge matemàtic normal però també pot inventar-se els símbols lliurement. De qualsevol manera, es pot inventar un sistema de símbols.
6. Estadi 6: Aquest estadi es pot anomenar estadi de la formalització. Molts cops el llenguatge de símbols que hem creat a l’estadi anterior és redundant. És necessari establir uns ordres, suggerir que a lo millor seria suficient amb unes poques descripcions inicials per poder deduir l’esquema de la resta de propietats.

   D’aquesta manera es donen els primers passos cap a l’axiomatització, essent les propietats bàsiques els axiomes i les altres que es poden deduir d’aquestes, els teoremes amb les seves demostracions.

Finalment, és important remarcar que en quan a materials, a Dienes se l’associa als multi-links, també coneguts com *Dienes blocs*, que ell mateix va inventar per explicar per exemple el concepte d’àrea. Va ser també escriptor de llibres de lògica, i entre altres va inventar materials per l’ensenyament de l’àlgebra. En aquest sentit és similar a Emma Castelnuovo, però Castelnuovo es dedicava més a l’educació superior. Per ell el coneixement i les habilitats han de girar al voltant de l’experiencia, més que de l’abstracció.

6.3. Línia Temporal

Degut a la recopilació d’autors feta en el treball, es va considerar convenient fer una línia temporal que ajudes a veure l’ordre, amb un petit resum dels autors tractats. Aquesta línia temporal s’ha fet mitjançant l’aplicació Timeline [JS] de la Northwestern University, knight lab, a partir d’una plantilla d’excel de la qual posaré una imatge a continuació i un compilador online per aquesta full de càlcul. La pàgina web d’on he extret la plantilla i serveix per compilar-la, l’adjunto també a continuació:

http://timeline.knightlab.com/

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Year	Month	Day	Time	End Year	End Month	End Day	End Time	Display Date	Headline	Text	Media	Media Credit	Media Caption
2	1887	12	13		1985	9	7			George Polya		http://www.amt.edu.au/images/root-imgs/biogpolya.jpg		Ampliar informació
3	1900	5	12		1960	1	12			Pere Puig Adam		http://catedu.es/matematicas_mundo/TEXTOS/PuigAdam.JPG		Ampliar informació
4	1905	9	17		1990	10	13			Hans Freudenthal		http://pieth.home.xs4all.nl/CWI/FIGS/hf22.gif		Ampliar informació
5	1911	10	9		2001	11	22			Lluís Antoni Santaló		http://www.cienciaenlavidriera.com.ar/wp-content/santalo-luis-7-sonrie.jpg		Ampliar informació
6												https://sites.google.com/site/provatfg3/_/rsrc/1448389335544/home/caleb-gattegno/caleb-gattegno.gif?height=320&wid		<a href="https://sites.google.com/site/provatfg3/home/caleb-gattegno" title="Ampliar informació">Ampliar

I, la línia temporal, ja compilada premen aquí.

A la línia temporal, s’hi adjunta al peu de cada foto un enllaç de una web de google sites que he creat per ampliar informació.