Treball de Final de Grau

Grau de Matemàtiques

Facultad de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

PROCESSOS DE RAMIFICACIÓ

Isaac Filella Mercè

Director: Carles Rovira Escofet
Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística

Barcelona, gener de 2016

Índex

Abstract

In this undergraduate thesis we will introduce the branching processes and one of their major applications, the neutron branching processes (one-group, isotropic case). First, in chapter I we begin with Galton-Watson processes and their properties. Chapter II deals with a generalization of branching processes introducing a parameter x (type) for each object of the processes that may represents, energy, position age etc. Finally in chapter III we apply this generalization into a real case, the neutron branching processes.

Introducció

Des dels seus inicis amb Galton i Watson amb l'estudi de l'extinció dels cognoms de famílies nobles([14] i [13]) al segle XIX (1874), els processos de ramificació han anat evolucionant i adaptant-se a diferents branques de la ciència. Ronald Fisher fóra dels primers en introduir-los en el camp de la biologia (1922), més concretament en la genètica i l'estudi de la supervivència d'un gen mutant. És en aquest camp on comencem a tenir un fort impuls de la teoria dels processos de ramificació, recolzats sempre en les seves aplicacions biològiques. A partir de la dècada dels anys 30, amb el desenvolupament de la física de partícules, veiem la incursió dels processos de ramificació en el camp de la física a mans de físics com William Shockley i el seu estudi de la multiplicació d'electrons en dispositius de detecció electrònica, o per part de Leó Szilárd i la introducció que va fer sobre els processos nuclears en cadena (1933). Durant els anys 40, amb el descobriment de la fissió nuclear, els estudis militars sobre la bomba atòmica varen suposar un fort desenvolupament en la teoria dels processos de ramificació tant pel bàndol de l'eix amb científics com Heisenberg, com pel bàndol dels aliats amb matemàtics com Stanislaw Ulam i David Hawkins ([12]). Durant aquesta dècada (1941) també és essencial remarcar els estudis de Kolmogorov sobre les cascades de nucleons en els rajos còsmics. El següent punt d'inflexió pels processos de ramificació ve de la mà de la introducció de la ciència computacional, la qual va permetre no només calcular moltes fórmules de recurrència de vital importància implicades en aquests processos sinó també simular aquests processos per un posterior estudi. Més recentment, els processos de ramificació han estat utilitzats per resoldre problemes en camps més especialitazats com biologia molecular, biologia cel·lular, immunologia i altres.

Tota aquesta aplicabilitat tan directe dels processos de ramificació, especialment la relacionada amb la física i la biologia, és la que em va motivar a voler aprofundir en aquesta branca de la teoria de probabilitats.

En el primer capítol de la memòria parlarem sobre el més simplificat dels processos de ramificació i el primer de tots històricament, és a dir, els processos de Galton-Watson. Els definirem, veurem les seves propietats més bàsiques, parlarem de la funció generadora, eina fonamental per a tractar-los, i farem una primer estudi de les probabilitats d'extinció d'aquests processos.

En el segon i més extens capítol tractarem de fer una generalització dels processos de ramificació d'una sola espècie. Definirem les distribucions puntuals, les quals seran els elements principals de les diferents generacions del procés, farem una construcció de les probabilitats d'aquests processos, primer construint unes probabilitats per les distribucions puntuals i seguidament amb aquestes i la FGM (funció generadora de moments) construirem les probabilitats de transició dels processos de ramificació general. Per finalitzar aquest capítol tractarem com en el capítol anterior, les probabilitats d'extinció dels processos.

Finalment, en l'últim capítol aplicarem tot lo aprés en el capítol anterior sobre processos de ramificació generals i ho aplicarem a un cas pràctic real, els processos de ramificació de neutrons.

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agrair al meu tutor el Carles Rovira la seva dedicació i ajuda constant en l'elaboració d'aquest treball. També al Pablo Orenes, que ha dedicat temps en ajudar-me amb les seves correccions i suggerències. De la mateixa manera, desitjo expressar la meva gratitud a la meva família i amics pel suport que m'han brindat.

1 Processos de Galton-Watson

1.1 Definició i propietats

Definició 1.1.1. Un procés de Galton-Watson és un procés de Markov en $\mathbb{Z}^+$ de forma $\{Z_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$. Els diferents Z_n són variables aleatòries que representen el nombre d'individus en la generació n. Les probabilitats del nostre procés venen determinades per la distribució de probabilitat $\{p_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$, on cada un dels p_k representa la probabilitat que un individu tingui k descendents en la següent generació. Per tant es compleix que $\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} p_k = 1$.

Definició 1.1.2. Anomenarem probabilitats de transició d'una generació a la següent a:

$$P(i, j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = p_j^{*i}.$$

On p_j^{*i} és el i-èssim producte de convolució de la distribució $\{p_k\}$, dit d'una altra manera, la distribució condicional de Z_{n+1}, donat un $Z_n = i$, és la distribució donada per la suma de i variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb distribució $\{p_k\}$. Per tant, si $i = 0$ tenim $P(0, j) = \delta_{ij}$ quan $j \geq 0$, essent δ la delta de Kronecker.

Fixem-nos per exemple en la probabilitat $P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = i)$. Aquesta hauria de ser la probabilitat que $i - 1$ individus de la n-èssima generació tinguessin 0 descendents i que un tingués un descendent, tenint aleshores:

$$P(Z_{n+1} = 1 | Z_n = i) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} p_0^{i-1} p_1.$$

En general, tractarem el cas en què $Z_0 = 1$. En cas que $Z_0 = k$, on $k > 1$, podríem assumir que tenim diferents famílies que es van reproduint independentment. Aleshores per saber el nombre d'individus d'una generació n tindríem la suma de k variables independents que representarien els individus de cada una de les k famílies en la generació n.

Suposem per tant un procés que comença a l'instant $t = 0$ amb una població de Z_0 individus, els quals a $t = 1$ se separen, independentment de la resta, en un nombre donat de descendents segons la funció de distribució $\{p_k\}$. El nombre total Z_1 d'individus produïts és la suma de les Z_0 variables independents. Z_1 passa a constituir la primera generació, que seguirà produint d'igual manera una Z_2(segona generació) i així successivament. Al complir la propietat de Markov, el nombre de descendència produïda per un sol individu en un temps donat és independent de la història del procés i de les partícules de la mateixa generació del individu, és a dir, la descendència d'un individu no depèn ni del passat ni del present del mateix.

Observació 1.1.1. Si $Z_n = 0$, aleshores $Z_{n+k} = 0 \ \forall \ k \geq 0$.

1.2 Funció generadora

Definició 1.2.1. Denotarem per la funció generadora d'un procés de Galton-Watson la funció:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1.$$

on s és una variable complexa i $\{p_k\}$ la funció de distribució que determina el procés. Els iterats de $f(s)$ són $f_0 = s, f_1(s) = f(s), \ldots, f_{n+1}(s) = f[f_n(s)], \ldots$.

Propietat 1.2.1. Cadascun dels iterats de la funció generadora és també una funció generadora.

Demostració: Observem que $f_1(s) = f(s)$ és per definició una funció generadora. A més a més, també és fàcil veure que agafant les probabilitats discretes $p_0 = 0$ i $p_1 = 1$, f_0 serà una funció generadora.

Ara ens queda el cas del iterat, és a dir, f_{n+1}. Fixem-nos que podem escriure f_{n+1} com un iterat de funcions generadores aplicant-se a més funcions generadores:

$$f_{n+1} = f[f_n(s)] = f[f[f_{n-1}(s)]] = f[f[f \ldots f[f(s)] \ldots]]$$

Per tant, si veiem que donada una funció generadora $g(s)$, $f[g(s)]$, és una funció generadora, haurem vist que f_{n+1} ho és (estaríem aplicant iterativament una funció generadora a una altra). Es compleix que:

$$f[g(s)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots)^n. \tag{1.2.1}$$

Desarollant podem escriure doncs que $f[g(s)] = \sum_{l=0}^{\infty} r_l s^l$ on només hem de comprovar veure que $\sum_{l=0}^{\infty} r_l = 1$. Això ho veiem igualant la forma (1.2.1) de $f[g(s)]$ amb l'expressió que n'hem extret i donant $s = 1$:

$$f[g(1)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n 1^k = 1 \quad ; \quad f[g(1)] = \sum_{l=0}^{\infty} r_l \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} r_l = 1$$

$\square$

Propietat 1.2.2. $f_{m+n}(s) = f_m[f_n(s)]$

Demostració: Fixem-nos que:

$$\begin{aligned} f_{m+n}(s) &= f_{m+n-1}[f(s)] = f_{m+n-2}[f[f(s)]] = \cdots = f_m[f[\ldots f[f(s)] \ldots]] \\ &= f_m[f[\ldots f[f_2(s)] \ldots]] = \cdots = f_m[f_n(s)]]. \end{aligned}$$

Observació 1.2.1. En particular veiem que $f_{n+1}(s) = f_n[f(s)]$.

Observem que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(1,j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j = f(s). \tag{1.2.2}$$

Propietat 1.2.3.

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(i,j)s^j = [f(s)]^i \quad i \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓ: Ho demostrarem per inducció sobre i. El cas $i = 1$ és l'equació (1.2.2). Suposem aleshores que és cert que $\sum_{j=0}^{\infty} P(n,j)s^j = [f(s)]^n$ i veiem que també és cert el cas $\sum_{j=0}^{\infty} P(n+1,j)s^j = [f(s)]^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
[f(s)]^{n+1} &= [f(s)]^n[f(s)] = \sum_{j=0}^{\infty} P(n,j)s^j \sum_{k=0}^{\infty} P(1,k)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P(n,j)s^j P(1,k)s^k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P(n+1,j+k)s^{j+k} \\
&= \sum_{k+j\geq 0}^{\infty} P(n+1,j+k)s^{j+k} = \sum_{l=0}^{\infty} P(n+1,l)s^l.
\end{aligned}$$

□

Definició 1.2.2. Notem que $P_n(i,j)$ és la n-èssima probabilitat de transició, és a dir, la probabilitat de passar d'una població de i individus a una població de j individus en n generacions o passos.

Definició 1.2.3. Denotarem per la funció generadora de Z_n a $f_{(n)}(s)$ que s'expressa com:

$$f_{(n)}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_n(1,j)s^j.$$

Amb les dues definicions anteriors podem extreure el següent teorema:

Teorema 1.2.1. *Donat un enter n positiu, per qualsevol s complex ($|s| < 1$)es compleix que:*

$$f_{(n)}(s) = f_n(s),$$

és a dir, la funció generadora de Z_n és el n-èssim iterat de la funció generadora.

DEMOSTRACIÓ: Pel primer pas d'aquesta demostració utilitzarem l'equació de Chapman-Kolmogorov ([3], pàg. 103-107) en un cas discret i la propietat 1.2.3:

$$\begin{aligned}
f_{(n+1)}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{n+1}(1,j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_n(1,k)P(k,j)s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_n(1,k) \sum_{j=0}^{\infty} P(k,j)s^j = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(1,k)[f(s)]^k = f_{(n)}[f(s)],
\end{aligned}$$

per tant ,

$$f_{(n+1)}(s) = f_{(n)}[f(s)]. \tag{1.2.3}$$

Utilitzarem ara (1.2.3) per veure que $f_{(n)}(s) = f_n(s)$. Ho farem per inducció:

Veiem primer que $f_{(0)}(s) = \sum_j P_0(1,j)s^j = s = f_0(s)$. Ara suposarem que $f_{(n)}(s) = f_n(s)$ és cert i arribem a $f_{(n+1)}(s) = f_{n+1}(s)$:

$$f_{(n+1)}(s) = f_{(n)}[f(s)] = f_n[f(s)] = f_{n+1}(s) \qquad .$$

□

Aquest teorema ens permetrà calcular la funció de generació de l'enèsima generació, i per tant, amb uns mètodes d'iteració de la funció generació, la de distribució de Z_n. Aquesta funció de distribució però, rarament agafarà una forma senzilla i explícita, per tant aquest teorema ens servirà per veure propietats asimptòtiques de Z_n.

D'ara en endavant assumirem que cap de les probabilitats $p_0, p_1, \dots$ és igual a 1 i que $p_0 + p_1 < 1$. Això implica que f és estrictament convexa en l'interval unitat:

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k s^{k-1} \to f''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k k(k-1)s^{k-2}$$

on veiem que $k(k-1) > 0$ i que $s^{k-2} > 0$ en ser $k \geq 2$. A més a més, com a mínim una de les probabilitats p_k serà major que 0 degut al fet que $p_0 + p_1 < 1$. Per tant $f''(s) > 0$. També assumirem que l'esperança de Z_1 és finita i per tant, que $f'(1) < \infty$.

1.3 Moments de Z_n

Definició 1.3.1. El moment de primer ordre de Z_n per $n = 0, 1, 2, \dots$ és EZ_n, l'esperança de Z_n.

Propietat 1.3.1.

i) El moment de primer ordre de Z_1 és $f'(1) \equiv m$.

ii) El moment de primer ordre de $Z_{n+1} = m^n$.

iii) La variància de Z_n és:

$$VarZ_n = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{(m-1)} & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

Demostració:

i) Veiem el moment de Z_1:

$$EZ_1 = \sum_{j=0}^{\infty} P(1,j)j = f'(1) \equiv m.$$

ii) El moment de Z_{n+1} és:

$$EZ_{n+1} = \sum_j P_{n+1}(1,j)j = f'_{n+1}(1) = (f_n[f(1)])' = f'_n[f(1)]f'(1) = f'_n(1)f'(1)$$

on en la quarta igualtat hem utilitzat la regla de la cadena. Si fem el mateix procés recursivament obtenim que:

$$EZ_n = f'_n(1) = m^n \quad n = 0, 1, \ldots$$

iii) Considerant $f''(1) < \infty$ tenim:

$$f''_{n+1}(s) = (f(f_n(s))'' = (f'(f_n(s))f'_n(s))' = f''(f_n(s))(f'_n(s))^2 + f'(f_n(s))f''_n(s)$$

$$f''_{n+1}(1) = f''(1)[f'_n(1)]^2 + f'(1)f''_n(1)$$

$$\begin{aligned} f''_n(1) &= f''(1)[f'_{n-1}(1)]^2 + f'(1)f''_{n-1}(1) = f''(1)(m^{2n-2}) + mf''_{n-1}(1) \\ &= f''(1)(m^{2n-2} + m^{2n-3}) + m^2 f''_{n-2}(1) = \ldots \end{aligned}$$

aplicant recursivament podem obtenir:

$$f''_n(1) = f''(1)[m^{2n-2} + m^{2n-3} + \cdots + m^{n-1}]$$

Per una altra banda, fixem-nos en què $f'_n(s) = \sum_j P_n(1,j)js^{j-1}$ i que, per tant:

$$f''_n(s) = \sum_j P_n(1,j)j(j-1)s^{j-2},$$

que avaluada en s=1:

$$f''_n(1) = \sum_j P_n(1,j)j(j-1) = \sum_j P_n(1,j)j^2 - \sum_j P_n(1,j)j = EZ_n^2 - EZ_n.$$

Tenim doncs que:

$$\begin{aligned} VarZ_n &= EZ_n^2 - (EZ_n)^2 = f''_n(1) + EZ_n - (EZ_n)^2 = f''_n(1) + m^n - m^{2n} \\ &= f''(1)[m^{2n-2} + m^{2n-3} + \cdots + m^{n-1}] + m^n - m^{2n}. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Anomenant a $VarZ_1 = \sigma^2 = EZ_1^2 - (EZ_1)^2 = f''(1) + m - m^2 \rightarrow f''(1) = \sigma^2 - m + m^2$ i substituint a l'expressió (1.3.1), obtenim:

$$\begin{aligned} Var(Z_n) &= (\sigma^2 - m + m^2)(m^{2n-2} + m^{2n-3} + \cdots + m^{n-1}) + m^n - m^{2n} \\ &= \sigma^2(m^{2n-2} + \cdots + m^{n-1}) + (m^2 - m)(m^{2n-2} + \cdots + m^{n-1}) + m^n - m^{2n} \end{aligned}$$

Identificant $(m^{2n-2} + \cdots + m^{n-1})$ com la suma d'una sèrie geomètrica de raó m, la seva suma és $\frac{m^{n-1}(1-m^n)}{(1-m)}$. A més a més, $(-m + m^2)(m^{2n-2} + \cdots + m^{n-1})$ donarà la suma d'una serie telescòpica amb resultat $-m^n + m^{2n}$. Tenint tot això en compte, la variància resulta ser:

$$VarZ_n = \begin{cases} \frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{(m-1)} & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

1.4 Probabilitat d'extinció

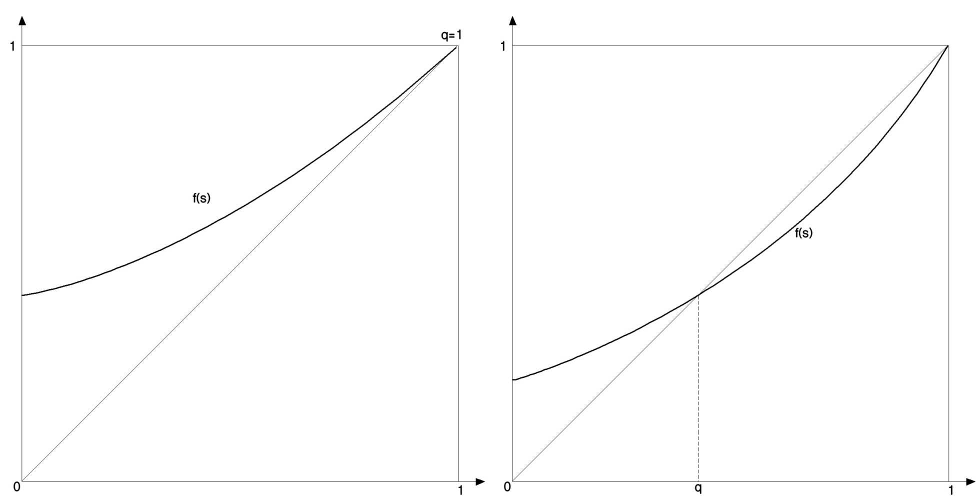
Totes les probabilitats de transició $P_n(i,j)$ estan contingudes a les funcions generadores $f_n(s)$. Com veurem, estudiant el comportament asimptòtic d'aquestes podem obtenir els límits de Z_n. Comencem amb unes propietats senzilles assumint que s és real i recordant que $p_0 + p_1 < 1$ i que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Propietat 1.4.1.

- i) f és estrictament convexa i creixent en l'interval $[0,1]$
- ii) $f(0) = p_0$; $\quad f(1) = 1$.
- iii) si $m \leq 1$ aleshores $f(s) > s$ per $s \in [0,1)$.
- iv) si $m > 1$ aleshores $f(s) = s$ té una única arrel en $[0,1)$.

DEMOSTRACIÓ:

- i) veiem que $f'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j j s^{j-1} > 0$ ja que $p_j > 0$ $\forall j$, $j > 0$ i $s^{j-1} > 0$ ja que $s \in [0,1)$. Per altra banda, $f''(s) = \sum_{j=2}^{\infty} p_j j(j-1)s^{j-2} > 0$ $\forall s \in [0,1]$.
- ii)$f(1) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j 1^j = \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$; $\quad f(0) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j 0^j = p_0$.
- iii), iv) En l'interval [0,1) la funció és creixent i estrictament convexa, per tant $f(s) = s$ tindrà una o cap arrel.



(a) $m \leq 1$ (b) $m > 1$

Figura 1: Funcions generadores per diferents valors de m.

Anomenarem q a l'arrel més petita de $f(s) = s$ en l'interval $[0,1)$.

Fixem-nos en la figura 1, en totes dues gràfiques hem dibuixat a part de $f(s)$ la funció $g(s) = s$ la qual té $g'(s) = 1$ constant. Tant en la gràfica a) com en la gràfica b) tenim representat $f(s)$ tal com està descrit en i) i ii), és a dir, com una funció creixent, estrictament convexa i amb $f(1) = 1$. A més a més, a la gràfica a) està lligada a la propietat iii) ja que l'hem dibuixat de manera que $f(s) > s$ en tot l'interval $[0, 1)$, en canvi la gràfica b) està lligada a la propietat iv), que parla d'una única arrel de $f(s) = s$ en aquest interval.

Tenint tot això present, podem veure clarament que $f(s)$, en el cas de la gràfica a) tindrà un pendent més petit o com a molt igual que $g(s)$ en el punt 1, i que per tant $f'(s) = m \leq g'(s) = 1$. Per altra banda, veiem que en la gràfica b) el pendent de $f(s)$ en 1 és més gran que el de $g(s)$, i per tant, $f'(s) > 1$. □

Lema 1.4.1. *Si $m \leq 1$ aleshores $q = 1$, si $m > 1$ aleshores $q < 1$.*

La demostració d'aquest lema és inmediata utilitzant les propietats i)-iv).

Lema 1.4.2.

- *Si $s \in [0, q)$ aleshores $f_n(s) \uparrow q$ quan $n \to \infty$.*
- *Si $s \in (q, 1)$ aleshores $f_n(s) \downarrow q$ quan $n \to \infty$.*
- *Si $s = q$ o bé $s = 1$ aleshores $f_n(s) = s$ $\forall n$.*

Demostració: En el cas que $0 \leq s < q$ tenim que $s < f(s) < f(q) = q$ ja que sabem que tant per $m \leq 1$ com per $m > 1$ es compleix que $f(s) > s$. Utilitzant la propietat 1.2.1 i la definició de iterat de la funció generadora tenim que $f_1(s) < f_2(s) < \cdots < f_n(s)$. Aleshores, $s < f_1(s) < f_2(s) < \cdots < f_n(s) < f_n(q) = q$ $\forall n \geq 1$. Podem afirmar doncs que $f_n(s) \uparrow L \leq q$. Utilitzant que f és continua tenim que:

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(s) = \lim_{n\to\infty} f[f_n(s)] \to L = f(L)$$

Sabent que q és l'arrel més petita en [0,1] tenim que $L = q$.

En el cas que $q < s < 1$ i raonant de manera similar igual que en el cas anterior obtenim que $1 > f_n(s) \downarrow L \leq q$, on $L = f(L)$. Amb les propietats iii) i iv), sabem que no hi ha arrels de $s = f(s)$ en l'interval $(q, 1)$, per tant $L = q$.

Finalment l'última part del lema és evident sabent que q i 1 són arrels de $f(s) = s$.

Lema 1.4.3. *Les funcions $f_n(s)$ són diferenciables i per $n \to \infty$ $f_n \to q$ en $[0, 1)$. A més a més, per tot s en $[q, 1)$, $f_n'(s) \leq (f'(s))^n$ i per tot s en $[0, q)$, $f_n'(s) \geq (f'(s))^n$*

Demostració: Com hem vist en el lema anterior $f_n(s) \to q$ quan $n \to \infty$ en $[0, 1)$, a més $f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(1, k)s^k$ és clarament diferenciable. Per tant, el que hem de veure és que per tot s en $[q, 1)$, $f_n'(s) \leq (f'(s))^n$ i per tot s en $[0, q)$, $f_n'(s) \geq (f'(s))^n$. Això ho veurem raonant de manera similar que en el lema anterior i utilitzant inducció sobre n.

Comencem pel cas en què $s \in [0, q)$ on sabem, pel lema anterior, que $s < f(s) < f_n(s)$. Fem inducció sobre n. Veiem que el cas $n = 1$ $f'(s) \geq f'(s)$ es compleix, per tant suposem que és cert que $f'_n(s) \geq (f'(s))^n$ (hipòtesis d'inducció) i aleshores intentem veure que $f'_{n+1}(s) \leq (f'(s))^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(f_{n+1}(s))' &= (f[f_n(s)])' = f'[f_n(s)]f'_n(s) \geq f'[f_n(s)](f'(s))^n \geq f'(s)(f'(s))^n \\ &= (f'(s))^{n+1}.\end{aligned}$$

On en la primera desigualtat hem utilitzat la hipòtesis d'inducció i en la segona què $s < f(s) < f_n(s)$ i que f' és creixent. La demostració pel cas en que $s \in [q, 1)$ és simètrica a l'anterior. □

Teorema 1.4.1. *La probabilitat d'extinció d'un procés $\{Z_n\}$ és l'arrel més petita no negativa (q) de l'equació $s = f(s)$. Aquesta serà 1 si $m \leq 1$ o més petita que 1 si $m > 1$*

Demostració: Fixem-nos en el lema 1.4.2, aquest ens diu que $f_n(0) \uparrow q$. Si fem el límit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(0) &= \lim_{n\to\infty} P_n(1,0) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} P(Z_i = 0 \text{ per un } 1 \leq i \leq n) \\ &= P(Z_i = 0 \text{ per un } i \geq 1)\end{aligned}$$

la qual cosa és per definició, la probabilitat que el procés s'extingeixi. La part final del teorema s'extreu aplicant directament el lema 1.4.1. □

Teorema 1.4.2.

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0 \text{ per } k \geq 1$$

$$P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = q$$

Demostració: Si posem $R_k = P(Z_{n+j} = k \text{ per alguna } j \geq 1 \mid Z_n = k)$ podem veure que $R_k < 1$ per qualsevol $k = 0, 1, 2, \ldots$. Separem per casos:

- Cas 1. En el cas que $p_0 = 0 \rightarrow R_k = (p_1^k) < 1$ (recordem la imposició $p_0 + p_1 < 1$).
- Cas 2. Si $p_0 > 0 \rightarrow R_k \leq 1 - P_{k_0} = 1 - p_0^k$ (on P_{k_0} és la probabilitat que tots els k individus siguin 0).

Per tant, degut al fet que $R_k < 1$, per cada $k = 1, 2, \ldots$

$$P(Z_n = k \text{ per un nombre infinit de valors de } n) = \lim_{n\to\infty} (R_k)^n = 0.$$

Com que $R_k < 1$ cada un dels estats $k = 1, 2, \ldots$ és transitori (definició d'estat transitori al llibre [3], pàg. 105). Al ser transitori tenim doncs que $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0$. Podem veure $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0$ de manera més detallada utilitzant que $P^{(j)}(1, k)$ és la probabilitat d'arribar per primer cop en j passos a una poblacio de k individus partint d'un sol individu. Aleshores tenim:

$$P(Z_n = k) = \sum_{j=1}^{n} P^{(j)}(1,k) R_k^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} P^{(j)}(1,k) R_k^{n-j} + P^{(n)}(1,k).$$

on estem suposant per simplicitat una població inicial d'un individu (en cas de voler començar amb una població amb i individus només hauríem de posar una potència i a $P_j(1,k)$). Com $P^{(j)}(1,k) \leq 1$ tenim que:

$$P(Z_n = k) \leq \sum_{j=1}^{n-1} R_k^{n-j} + P^{(n)}(1,k) = \frac{R_k^{n-1}(1 - R_k^n)}{1 - R_k} + P^{(n)}(1,k).$$

Si fem el $\lim\limits_{n\to\infty}$ a banda i banda, recordant que $R_k < 1$, ens queda:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = \lim_{n\to\infty} P^{(n)}(1,k) \to 0.$$

Finalment sabem doncs que Z_n haurà de tendir o a 0 o cap a ∞ i pel teorema anterior sabem que q és la probabilitat que $Z_n \to 0$ per $n \to \infty$. □

Com a curiositat, senyalar que aquesta inestabilitat de les poblacions que es proposa en els processos de Galton-Watson és contrària al comportament biològic de les poblacions, les quals tendeixen a arribar a un equilibri amb l'ecosistema (tot i que oscil·lant).

Definició 1.4.1. Quan $m < 1$, $m = 1$ o $m > 1$ anomenarem el procés de Galton-Watson com subcrític, crític o supercrític, respectivament.

2 Processos de ramificació generals

2.1 Introducció

En física i biologia s'utilitzen processos de ramificació per explicar fenòmens com l'efecte cascada dels rajos còsmics, la multiplicació de neutrons o l'evolució d'una població. En aquests casos, a diferència d'un procés de ramificació de Galton-Watson s'utilitza un paràmetre x. Aquest és l'encarregat de descriure característiques del procés com la posició, el temps, l'energia o fins i tot combinacions d'aquests. Parlarem doncs d'uns processos de ramificació on cada individu estarà caracteritzat per un punt x, el qual anomenarem *classe de l'individu*, en un espai Euclidià R de dimensió d. Els elements d'una generació estaran aleshores descrits per un conjunt aleatòri de punts $x_1, x_2, \ldots$, que anomenarem una *distribució aleatoria de punts*.

En aquest treball, els processos físics en els que ens interessarem són l'efecte cascada dels rajos còsmics i la fissió nuclear, on la x representa l'energia i la posició respectivament.

2.2 Distribucions puntuals i funcions conjunt

Com hem dit a l'introducció ens referirem a x com la classe dels individus del nostre procés de ramificació. Hem de tenir present que x pot estar restringit a certes parts de R les quals denotarem com X. Per exemple, si x representa una edat R seria la recta dels reals i X els reals definits positius.

Definició 2.2.1. Una *distribució puntual* ω en X és $\omega = (x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots; x_k, n_k)$ on $x_i \in X \quad \forall i \in \{1 \ldots k\}$, on $n_i \in \mathbb{Z}^+$ és la freqüència d'aparició de x_i i on k és un enter no negatiu que pot ser 0 (*distribució puntual nul·la*).

En general, suposarem que l'ordre d'aparició de les parelles x_i, n_i no és rellevant a no ser que s'especifiqui.

Definició 2.2.2. Denotarem com Ω_X el conjunt de totes les distribucions puntuals en X.

Definició 2.2.3. Donada una distribució puntual ω en X, una *funció conjunt* $\tilde{\omega}$ està definida de $\mathcal{P}(X) \to \mathbb{Z}^+$ (on $\mathcal{P}(X)$ representa el conjunt de les parts de X), de manera que donat un subconjunt A de X aleshores $\tilde{\omega}(A)$ és el nombre total d'individus a ω amb classe en A:

$$\tilde{\omega}(A) = \sum_{i | x_i \in A} n_i$$

.

Veiem doncs que una funció conjunt queda determinada de manera natural per una distribució puntual ω.

Propietat 2.2.1. Observem que, si ω és nul·la, aleshores $\tilde{\omega}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$.

Propietat 2.2.2. Donada una distribució puntual ω, la seva corresponent funció conjunt $\tilde{\omega}$ i els elements A, $\{A_i\}_{i\geq 1}$ de $\mathcal{P}(X)$ es compleix que:

i) $\tilde{\omega}(A) \in \mathbb{Z}^+$.

ii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són conjunts disjunts dos a dos aleshores:

$$\tilde{\omega}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \tilde{\omega}(A_1) + \cdots + \tilde{\omega}(A_n).$$

iii) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i $\bigcap_i A_i = \emptyset$ aleshores, $\tilde{\omega}(A_n)$ és 0 per un n suficientment gran.

Demostració:

- La propietat i) s'obté de manera natural de la definició, ja que $\tilde{\omega}(A)$ serà un sumatori de freqüències, les quals per definició són o bé 0, o bé enters positius.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són disjunts no tindrem cap $x \in X$ tal que $x \in A_i$ i $x \in A_j$ per cap $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Per tant, en no tenir cap classe que pertanyi a més d'un conjunt, es compleix que $\tilde{\omega}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \tilde{\omega}(A_1) + \cdots + \tilde{\omega}(A_n)$.
- Suposem que donats $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ tals que $\bigcap_i A_i = \emptyset$ aleshores, $\tilde{\omega}(A_n) \geq 0 \ \forall n \geq 0$. Existeix doncs un x_i amb $n_i > 0$ tal que $x_i \in A_n \ \forall n \geq 0$ i per tant $\bigcap A_i \neq \emptyset$. Aquesta contradicció ens diu que la nostra suposició es falsa i per tant es compleix la propietat.

□

Propietat 2.2.3. Suposem $\tilde{\omega}$ una funció conjunt que satisfà els punts de la propietat 2.2.2 . Aleshores, hi ha una única distribució puntual ω que la genera.

Demostració: Per veure l'extistència el que fem és donada una $\tilde{\omega}$, definir ω com

$$\omega = (x_1, \tilde{\omega}(x_1); \ldots; x_i, \tilde{\omega}(x_i); \ldots) = (x_1, n_1; \ldots; x_i, n_i; \ldots), \tag{2.2.1}$$

que s'estendrà per tots els $x_i \in X$. Veiem aleshores que donat qualsevol $A \subseteq X$, $\tilde{\omega}(A) = \sum_{i|x_i \in A} n_i$. Demostrem la unicitat per reducció al absurd. Suposem doncs $\tilde{\omega}$ una funció conjunt que satisfà els punts de la propietat 2.2.2 i que aquest $\tilde{\omega}$ està generat per $\omega_1 = (x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots; x_k, n_k)$ i $\omega_2 = (y_1, m_1; y_2, m_2; \ldots; y_l, m_l)$ distribucions puntuals diferents, és a dir, donat un $A \subset X$:

$$\tilde{\omega}(A) = \sum_{i|x_i \in A} n_i = \sum_{i|y_i \in A} m_i. \tag{2.2.2}$$

Agafem aleshores conjunts de la forma $B_x = \{x\} \ \ \forall x \in X$ i apliquem-los a $\tilde{\omega}$ utilitzant l'expressió (2.2.2):

$$\tilde{\omega}(B_x) = n_i = m_i,$$

aquests n_i, m_i són enters positius o 0 que coincidiran per tot $x \in X$ i per tant, $\omega_1 = \omega_2$. Existeix doncs una contradicció amb la nostra suposició inicial i com a conseqüència tindrem una única distribució puntual $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ que genera $\tilde{\omega}$. $\square$

Existeix doncs una correspondència bijectiva entre les distribucions puntuals i les funcions conjunt. Aprofitarem aquesta correspondència per notar com ω tant a la distribució puntual com a la funció conjunt.

2.3 Probabilitats per les distribucions puntuals

Les probabilitats que ens interessa definir per les distribucions puntuals seran de la forma:

$$\text{Prob}(\omega(A_1) = r_1, \omega(A_2) = r_2, \ldots, \omega(A_n) = r_n).$$

El que farem doncs serà introduïr un conjunt de funcions $p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ definides per cada enter n, per cada conjunt d'enters $r_1, \ldots, r_n$ i per cada conjunt de subconjunts de X $A_1, \ldots, A_n$. Aquest conjunt de funcions $p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ tindrà uns valors determinats per cada problema en qüestió que vulguem tractar. A més a més, aquestes funcions p hauran de complir les següents condicions:

Condició 2.3.1.

i) El conjunt de funcions $p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ forma una distribució de probabilitat sobre les n-tuples $r_1, \ldots, r_n$, que té el mateix valor per permutacions de les parelles $A_1, \ldots A_n$ i $r_1, \ldots, r_n$. Per exemple, es compleix:

$$p(A_1, A_2; r_1, r_2) = p(A_2, A_1; r_2, r_1).$$

ii) La funció p és consistent en el sentit que:

$$\sum_{r_2=0}^{\infty} p(A_1, A_2, r_1, r_2) = p(A_1, r_1).$$

iii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ són conjunts disjunts i $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ aleshores, $p(A, A_1, A_2, \ldots, A_n; r, r_1, \ldots, r_n) = 0$ a no ser que $r = r_1 + \cdots + r_n$ i per tant:

$$p(A, A_1, \ldots, A_n; r_1 + \cdots + r_n, r_1, \ldots, r_n) = p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n).$$

iv) Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i $\bigcap_i A_i = \emptyset$ aleshores, $\lim_{i \to \infty} p(A_i, 0) = 1$.

Imposem aquestes condicions sobre el conjunt de funcions p o sobre cada una d'elles, donat que s'han de complir certes relacions de consistència com i) i ii). D'altra banda, també han d'expressar la condició de funció de conjunt de ω i, per tant, estar amb correspondència amb les propietats 2.2.2. D'aquí iii) que està relacionada amb ii) de la propietat 2.2.2 , i iv) que ho està amb iii) de la mateixa propietat.

Per construir aquestes funcions p és convenient definir-les sobre conjunts $A_1, \ldots, A_n$ disjunts. Per tant considerarem una família de funcions $p_0(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ definides sempre i quan els conjunts $A_1, \ldots, A_n$ siguin disjunts. A més podem considerar que les funcions p_0 defineixen una distribució conjunta de les variables aleatòries $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)$.

Propietat 2.3.1. Suposem que la condició 2.3.1 es compleix sempre quan els A_i són disjunts, i que a més podem expressar cada un dels $A_1, \ldots, A_n$ com a unió d'un nombre finit de conjunts disjunts $A_i = A_{i1} \cup A_{i2} \cup \ldots$, aleshores la distribució conjunta de $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)$ és la mateixa que la distribució conjunta de $\sum_j \omega(A_{1j}), \ldots, \sum_j \omega(A_{nj})$.

Demostració: Agafem $A_1, A_2, \ldots$ conjunts no necessàriament disjunts (si ho provem de manera general també es complirà en el cas concret en que els A_i siguin disjunts). Aquests sempre podran ser expressats com

$$A_i = \bigcup_j \alpha_{ij} B_j,$$

on $\{B_j\}$ és una col·lecció finita de conjunts disjunts i α_{ij} que agafa valors 1 o bé 0 depenent si B_j és o no a la unió que forma A_i. Definim aleshores la distribució conjunta de les variables aleatòries $\omega(A_1)$, $\omega(A_2), \ldots$ com la distribució conjunta de les variables $\bigcup_j \alpha_{1j}\omega(B_j), \bigcup_j \alpha_{2j}\omega(B_j), \ldots$. Suposem aleshores com diu l'enunciat que cada B_j es pot expressar com a unió de conjunts disjunts $C_1, C_2, \ldots$ tal que $B_j = \bigcup_k \beta_{jk} C_k$ amb β_{jk} 0 o 1. D'aquesta manera, podem expressar cada A_i en termes dels C_k com $A_i = \bigcup_k \gamma_{ik} C_k$ on $\gamma_{ik} = \sum_j \alpha_{ij}\beta_{jk}$ amb γ_{ik} agafant valors 0 o 1. Per tant, podem dir que la distribució conjunta dels $\bigcup_k \gamma_{ik}\omega(C_k), \bigcup_k \gamma_{2k}\omega(C_k), \ldots$ és la mateixa que la de $\bigcup_j \alpha_{1j}\omega(B_j), \bigcup_j \alpha_{2j}\omega(B_j), \ldots$ ja que podem expressar les variables $\omega(B_1), \omega(B_2), \ldots$ com $\bigcup_k \beta_{1k}\omega(C_k), \bigcup_k \beta_{2k}\omega(C_k)$.

A més a més, si expressem els A_i en termes de conjunts disjunts B'_j diferents dels B_j, podem trobar conjunts C_k tal que tan els B_j com els B'_j s'expressin només en termes dels C_k. Així les expressions dels A_i en termes dels C_k són úniques i les nostres distribucions conjuntes de les variables aleatòries $\bigcup_k \gamma_{ik}\omega(C_k), \bigcup_k \gamma_{2k}\omega(C_k)$ són independents dels B_j escollits.

Finalment, es pot verificar que les funcions p que defineixien la distribució conjunta sobre les variables aleatòries $\bigcup_k \gamma_{ik}\omega(C_k), \bigcup_k \gamma_{2k}\omega(C_k) \ldots$ compleixen les condicions 2.3.1. $\square$

En resum, aquest teorema ens diu que les funcions p_0 poden ser esteses de manera única a funcions p que satisfan les condicions 2.3.1, i estan amb concordança amb p_0 sempre i quan els A_i siguin disjunts.

Exemple 2.3.1. Siguin A, B, C conjunts disjunts. Segons la propietat 2.3.1 tenim que:

$$p(A, B \cup C; r_1, r_2) = \sum_{r_3 + r_4 = r_2} p_0(A, B, C; r_1, r_3, r_4)$$

Això ens servirà quan extenguem les p_0 dels intervals racionals als conjunts bàsics (definim ambdués coses a continuació).

Ara el que volem veure és que aquestes probabilitats p_0 determinen una probabilitat P sobre l'espai Ω_X. Per fer-ho, necessitarem definir una família de *conjunts bàsics* que generin els Borelians de X.

A partir d'aquí introduirem a $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_d)$ com un conjunt de coordenades cartesianes en R (recordem que d és la dimensió de R).

Definició 2.3.1. Un *interval racional* és la intersecció de X amb un conjunt de la forma $a_i \leq \zeta_i \leq b_i$ amb $i = 1, \ldots, d$ on a_i, b_i són racionals o bé $a_i = -\infty$ i $b_i = \infty$.

Definició 2.3.2. Un *conjunt bàsic* és l'unió finita d'intervals racionals o bé el conjunt buit.

Propietat 2.3.2. Si A i B són conjunts bàsics, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ són també conjunts bàsics.

DEMOSTRACIÓ:

- $A \cup B$: si A i B no són buits, tots dos són unió finita d'intervals racionals, per tant $A \cup B$ també és unió finita d'intervals racionals i per tant un conjunt bàsic. Si $A = \emptyset$, aleshores $A \cup B = B$ que és conjunt bàsic per definició (de manera anàloga si $B = \emptyset$).

- $A \cap B$: si $A = \emptyset$ $A \cap B = \emptyset$ que per definició és un conjunt bàsic (de manera anàloga si $B = \emptyset$). En cas que cap dels dos sigui $\emptyset$, fixem-nos primer de tot que la intersecció de dos intervals racionals és sempre un interval racional o bé el buit. Escribim aleshores $A = [a_{1_1}, b_{1_1}] \cup \cdots \cup [a_{n_1}, b_{n_1}] = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ i $B = [a_{1_2}, b_{1_2}] \cup \cdots \cup [a_{k_2}, b_{k_2}] = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ on cada un dels a_{i_j}, b_{i_j} és un racional o $a_{i_j} = -\infty$, $b_{i_j} = \infty$ (recordem que els elements de $[a_{i_j}, b_{i_j}]$ son els ζ tal que $a_{i_j} \leq \zeta_{i_j} \leq b_{i_j}$). Podem posar doncs:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_k) \\ &= [(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \cdots \cup (A_1 \cap B_k)] \cup [(A_2 \cap B_1) \cup \cdots \cup (A_2 \cap B_k)] \cup \\ & \quad \cup \cdots \cup [(A_n \cap B_1) \cup \cdots \cup (A_n \cap B_k)]. \end{aligned}$$

  Aquesta última expressió és una unió finita d'intervals racionals i buits, per tant és una unió finita d'intervals racionals i aleshores un conjunt bàsic.

- $A \setminus B$: si $A = \emptyset$ tenim $A \setminus B = \emptyset$ i si $B = \emptyset$ aleshores $A \setminus B = A$, on per definició tan A com $\emptyset$ són conjunts bàsics (simètric per $B \setminus A$). Fixem-nos en què la resta de dos intervals racionals és un interval racional, la unió de dos intervals racionals o el conjunt buit. A partir d'aquí la demostració és simètrica a la de $A \cap B$.

□

Amb aquestes propietats es pot veure que els conjunts bàsics formen una semi-àlgebra que anomenarem S. Aleshores, sigui ω una funció conjunt satisfent la propietat 2.2.2 (ω additiva) sempre i quan $A_1, A_2, \ldots$ siguin conjunts bàsics i per tant de S, ω pot ser extesa de manera única a una funció conjunt que també satisfà 2.2.2 (també es additiva) a l'àlgebra generada per S. Aquesta àlgebra que denotarem per $a(S)$ serà el conjunt dels borelians dels racionals. Recordem que aquesta ω extesa serà generada per una única distribució puntual que anomenarem també ω.

Definició 2.3.3. Si $A_1, \ldots, A_n$ són conjunts bàsics, aleshores un conjunt de distribucions puntuals condicionades per $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_n)$ és un *conjunt cilindre* en Ω_X.

Si anomenem C com la família de conjunts cilindre i C^* la seva extensió boreliana, els conjunts de C^* seran aleshores mesurables en Ω_X.

Teorema 2.3.1. *Siguin* $p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ *funcions definides sempre que* $A_1, \ldots, A_n$ *conjunts bàsics i sempre que compleixin les condicions 2.3.1. Aleshores, existeix una única probabilitat* P *definida en* C^* *que satisfà:*

$$P(\omega(A_1) = r_1, \ldots, \omega(A_n) = r_n) = p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n) \tag{2.3.1}$$

quan $A_1, \ldots, A_n$ *són conjunts bàsics.*

Tenim la demostració detallada d'aquest teorema al llibre [4], pàg. 76-77.

Per simplicitat, a partir d'aquest punt assumirem que qualsevol conjunt de Ω_X pertany a C^*.

2.4 Funció generadora de moments

Definició 2.4.1. Suposem una distribució puntual ω de la forma $(x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$ i $h(x)$ una funció qualsevol de x. Aleshores, definim $\int_X h(x)d\omega$ com:

$$\int_X h(x)d\omega = \int_X h(x)d\omega(x) = n_1 h(x_1) + n_2 h(x_2) + \cdots + n_k h(x_k). \tag{2.4.1}$$

Com ω és aleatòria, l'expressió $\int_X h(x)d\omega$ (la qual veiem que és funció de ω), és una variable aleatòria. Per tant, si $h(x)$ és una funció no negativa definida a X, $e^{-\int hd\omega}$ és una variable aleatòria, positiva i no més gran que 1.

Definició 2.4.2. *La funció generadora de moments associada a una* P (FGM) es defineix com:

$$\Phi(s) = E(e^{-\int sd\omega}) = \int_{\Omega_X} (e^{-\int sd\omega})dP,$$

on P és una mesura de probabilitat i s una funció no negativa definida en X.

Definició 2.4.3. Sigui A un conjunt de punts de X, l'indicador d'A denotat com $\mathbb{1}_A$ es defineix com $\mathbb{1}_A = 1$ si $x \in A$, o 0 si $x \notin A$.

Si X és un conjunt finit de k punts diferents, tractarem una distribució puntual en X com un vector aleatori $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ on cadascun dels seus components és un enter no negatiu. Per altra banda, una funció s en X serà un vector de k components. Tenint en compte ambdués coses, tenim que $\int sd\omega = s_1\omega_1 + \ldots s_k\omega_k$.

Propietat 2.4.1. Donat $A \subseteq X$ ii t un enter positiu, aleshores $\Phi(t\mathbb{1}_A)$ és una fgm ordinaria.

DEMOSTRACIÓ: $\Phi(t\mathbb{1}_A) = E(e^{-t\int \mathbb{1}_A d\omega}) = E(e^{-t\omega(A)})$. Per tant $\Phi(t\mathbb{1}_A)$ és una fgm ordinària. $\square$

Ara suposem una probabilitat P sobre les distribucions puntuals tal com l'hem construït al teorema 2.3.1, és a dir, a través d'un conjunt de funcions p que compleixen les condicions 2.3.1. Aleshores, una FGM definida com a la definició 2.4.2 compleix les següents propietats:

Propietat 2.4.2. Si s és una funció no negativa en X, tenim que:

$$0 < \Phi(s) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓ: Hem de veure que $0 < E(e^{-\int sd\omega}) < 1$. Si s és una funció positiva aleshores $\int sd\omega > 0$ per qualsevol ω. Aleshores, $0 < e^{-\int sd\omega} < 1$ i evidentment l'esperança d'una variable que pren valors entre 0 i 1 també prendrà valors entre 0 i 1. $\square$

Propietat 2.4.3. Siguin $A_1, \ldots, A_n$ conjunts de X amb els seus corresponents indicadors $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$. Aleshores la funció d'enters no negatius $t_1, \ldots, t_n$ definida per

$$\varphi(A_1, \ldots, A_n; t_1, \ldots, t_n) = \Phi(t_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + t_n\mathbb{1}_{A_n})$$

és la fgm d'un vector aleatori de n dimensions amb components no negatives i amb funció de probabilitat $p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$.

DEMOSTRACIÓ: Segons l'enunciat tenim:

$$\begin{aligned}
\varphi(A_1, \ldots, A_n; t_1, \ldots, t_n) &= \Phi(t_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + t_n\mathbb{1}_{A_n}) = Ee^{-t_1\omega(A_1)-\cdots-t_n\omega(A_n)} \\
&= \sum_{r_1,\ldots,r_n}^{\infty} e^{-t_1r_1-\cdots-t_nr_n} p(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n),
\end{aligned}$$

on en la tercera igualtat hem utilitzat el teorema 2.3.1. Derivant segons els diferents t_i, obtenim els diferents moments de les diferents dimensions d'un vector de n dimensions de components $r_1, \ldots, r_n$. $\square$

Propietat 2.4.4. Siguin $s, s_1, s_2, \ldots$ funcions no negatives tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ per tot $x \in X$, aleshores $\lim_{n\to\infty} \Phi(s_n) = \Phi(s)$ (Φ és continua).

DEMOSTRACIÓ: Tenim doncs $s, s_1, s_2, \ldots$ no negatives tal que $s_n(x) \to s(x)$ quan $n \to \infty$ i $\forall x \in X$. Recordem que per una $\omega = (x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$ tenim que

$$\int s_n d\omega = n_1 s_n(x_1) + \cdots + n_k s_n(x_k),$$

on, si fem el límit quan $n \to \infty$ tenim que:

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n d\omega = \lim_{n\to\infty} (s_n(x_1) + \cdots + n_k s_n(x_k)) = n_1 s(x_1) + \cdots + n_k s(x_k) = \int sd\omega.$$

Per tant $\forall\omega$, $\int s_n d\omega \to \int s d\omega$ quan $n \to \infty$. Sabent que $e^{-\int s_n d\omega} < 1$, el teorema de Lebesgue de convergència dominada (mirar [1], pàg. 84.) implica que

$$Ee^{-\int s_n d\omega} \to Ee^{-\int s d\omega}.$$

$\square$

El següent teorema ens permetrà saber si una funció $\Phi(s)$ qualsevol és o no una FGM.

Teorema 2.4.1. *Sigui $\Phi(s)$ una funció definida sempre i quan s una funció de la forma $\sum_{i=0}^{n} t_i \mathbb{1}_{A_i}$ on t_i enters no negatius i $\mathbb{1}_{A_i}$ indicadors dels conjunts A_i. Suposem que sempre que $A_1, \dots, A_n$ siguin conjunts disjunts, aleshores, $\Phi(t_1\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + t_n\mathbb{1}_{A_n})$ és la fgm d'un vector aleatori n-dimensional amb components no negatives. Denotem per $p_0(A_1, \dots, A_n; r_1, \dots, r_n)$ la funció de probabilitat d'aquest vector. Suposem a més a més que si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i $\bigcup_i A_i = 0$ es compleix que $\Phi(t\mathbb{1}_{A_i}) \to 1$ per tot $t \geq 0$ quan $i \to \infty$. Aleshores les funcions p_0 poden ser exteses de manera única a funcions p definides tan si els A_i són disjunts com si no. A més a més les funcions p satisfaran les condicions de la secció 2.3 i per tant, segons el teorema 2.3.1 definiran una probabilitat P, la FGM de la qual té el mateix valor que Φ per funcions s com les que hem definit a l'inici.*

Aquest teorema, per tant, ens diu que podem definir FGM Φ donat qualsevol funcional Φ de funcions s que compleixin les condicions del teorema.

Teorema 2.4.2. *Siguin $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ FGM de distribucions puntuals aleatòries. Aleshores la funció $\Phi(s) = \Phi_1(s)\Phi_2(s)\dots\Phi_n(s)$ és la FGM d'una distribució puntual aleatòria.*

Definint la suma d'un nombre finit de distribucions puntuals com la suma de les seves corresponents funcions conjunt, podem pensar aleshores que Φ (del teorema anterior) és la FGM de la suma de distribucions puntuals diferents i independents amb FGM's $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

Una formulació alternativa de Φ es fa a [2], pàg. 150-210. En aquest llibre s'escull especificar les probabilitats de les distribucions puntuals per una seguit de funcions $f_n(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$, on cadascuna representa la probabilitat de tenir n individus dels quals el primer està l'interval $(x_1, x_1 + dx_1)$ el segon en $(x_2, x_2 + dx_2)$... (per simplicitat considerem que X té dimensió 1 i que podem distinguir els individus per un cert ordre com l'edat). Aleshores tenim que :

$$\Phi(s) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \dots \int f_n(x_1, \dots, x_n) e^{-s(x_1) - \dots - s(x_n)} dx_1 \dots dx_n,$$

on f_0 és la probabilitat d'obtenir 0 individus. Es pot verificar que Φ satisfà el criteri del teorema 2.4.1 i que per tant és una FGM d'una distribució puntual.

2.5 Processos de ramificació generals

Descriurem l'evolució d'una família d'individus per una seqüència de distribucions puntuals $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$, on cada Z_i representa els individus en la generació i-èssima. A més a més, cadascun d'aquests individus estarà descrit pel seu valor x en el seu temps de naixement. Denotarem doncs $Z_n(A)$ com el nombre d'individus amb classe dins del conjunt A en la generació n-èssima. A partir d'aquest punt farem tres suposicions:

1) La classe x d'un individu és suficient per descriure'l.

2) Si coneixem la distribució puntual Z_n, el coneixement de distribucions puntuals de generacions prèvies no ens ajudara de cap manera a predir les futures.

3) La capacitat d'un individu per tenir descendència és independent de la presència d'altres individus.

En general podem dir que tractem amb un procés de Markov com els descrits en el cas de Galton-Watson però amb la peculiaritat que ara tractem amb un paràmetre x, que fa que enlloc de que un sol nombre representi cada generació, ara ho farà una distribució puntual. La tercera suposició, és l'encarregada de fer que el nostre procés de Markov sigui realment un *procés de ramificació*.

Per descriure el nostre procés en tenim prou amb la generació inicial Z_0 i amb una funció de probabilitat de transició:

$$P^{(1)}(\omega, B) = \text{Prob}(Z_{n+1} \in B \mid Z_n = \omega),$$

amb $\omega \in \Omega_X$ i $B \subseteq X$. A més tindrà una recurrència:

$$P^{(m+n)}(\omega, B) = \int_{\Omega_X} P^{(n)}(\omega', B) d_{\omega'} P^{(m)}(\omega, \omega'), \tag{2.5.1}$$

on $P^{(n)}(\omega, B)$ és la n-funció de transició, és a dir, la probabilitat que en n generacions la nostre distribució ω passi a pertànyer a un conjunt B de Ω_X.

Ara el que volem és definir aquestes probabilitats de transició.

Definició 2.5.1. Definim una *família de probabilitats per cada* $x \in X$ com $\{p_x\}$ on cada $p_x(A_1, \ldots, A_n; r_1, \ldots, r_n)$ és la probabilitat que un individu amb classe x tingui r_1 descendents amb classe dins de A_1, r_2 descendents dins de $A_2, \ldots$ i r_n descendents en A_n.

La forma d'aquesta família $\{p_x\}$ estarà determinada per cada problema en concret. A més assumirem que $\{p_x\}$ compleix que:

- Per cada $x \in X$, $\{p_x\}$ satisfà les condicions de la secció 2.3.
- Si els arguments $A_1, \ldots, A_n, r_1, \ldots, r_n$ són fixats aleshores p_x és una funció Borel mesurable de x.

Per la construcció de probabilitats feta en el teorema 2.3.1 cada família $\{p_x\}$ determina una mesura de probabilitat $P_x^{(1)}$ en Ω_X, i a la vegada, aquesta $P_x^{(1)}$ determina una FGM $\Phi_x^{(1)}(s)$.

Definició 2.5.2. Si ω és una distribució puntual $\omega = (x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$ definim $\Phi(\omega, s)$ com:

$$\Phi(\omega, s) = [\Phi^{(1)}_{x_1}(s)]^{n_1} \cdots [\Phi^{(1)}_{x_k}(s)]^{n_k} \tag{2.5.2}$$

En cas que ω sigui una distribució nul·la posem $\Phi(\omega, s) = 1$.

Aquesta $\Phi(\omega, s)$ és també una FGM (es veu utilitzant el teorema 2.4.2) i és interpretada com la FGM dels descendents de n_1 individus de classe x_1,... i n_k individus de classe x_k.

Per cada ω la probabilitat associada a la FGM $\Phi(\omega, s)$ correspondrà a la probabilitat de transició $P^{(1)}(\omega, \cdot)$. Agafem doncs $P^{(1)}(\omega, \cdot)$ com la probabilitat de transició d'una generació amb distribució puntual ω. A més a més, recordant la fórmula de recurrència (2.5.1) i tenint $P^{(1)}$, podem obtenir $P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots$. El càlcul específic d'aquestes probabilitats de transició pot ser complicat, ja que requereix passar d'una *FGM* a la seva probabilitat associada, procés que requereix l'ús de transformades de Laplace o Furier.

Si inicialment tenim un individu amb classe x denotarem la FGM de Z_n per

$$\Phi^{(n)}_x(s) = E_x e^{-\int s dZ_n},$$

i aleshores $\Phi^{(0)}_x = e^{-s(x)}$.

Suposem a partir d'ara que la distribució puntual inicial Z_0 no és aleatòria.

Observació 2.5.1. Si g és una funció mesurable a Ω_X aleshores l'esperança condicionada $E[g(Z_{n+m}) \mid Z_n]$ és avaluada agafant $E[g(Z_{n+m}) \mid Z_n = \omega] = \int_{\Omega_X} g(\omega') d\omega' P^{(m)}(\omega, \omega')$.

Per acabar aquesta secció recordem que quan fèiem Galton-Watson teníem la relació de recurrència $f_{n+1}(s) = f[f_n(s)]$ de les funcions generadores. Si canviem s per e^{-s} i posem aleshores $\psi_n(s) = f_n(e^{-s})$ tenim que la relació de recurrència passa a ser

$$\psi_{n+1}(s) = \psi[-\log\psi_n(s)],$$

on d'ara en endavant notarem per log al logaritme en base e.

Teorema 2.5.1. *Si $\omega = (x_1, n_1; \ldots; x_k, n_k)$, aleshores*

$$E(e^{-\int s dZ_{n+m}} \mid Z_n = \omega) = [\Phi^{(m)}_{x_1}(s)]^{n_1} \cdots [\Phi^{(m)}_{x_k}(s)]^{n_k} = e^{\int_X log \Phi^{(m)}_x(s) d\omega(x)} \tag{2.5.3}$$

per $m, n = 0, 1, \ldots$ A més a més,

$$\Phi^{(m+n)}_x(s) = \Phi^{(n)}_x(-log\Phi^{(m)}_{\cdot}(s)) \tag{2.5.4}$$

per $m, n = 0, 1, \ldots$

Demostració: Utilitzant (2.5.2) i l'observació 2.5.1 en el nostre procés de Markov temporalment homogeni tenim que:

$$\begin{aligned} E(e^{-\int s dZ_{n+1}} \mid Z_n = \omega) &= \int (e^{-\int s d\omega'}) d_{\omega'} P^{(1)}(\omega, \omega') \\ &= \Phi(\omega, s) = [\Phi^{(1)}_{x_1}]^{n_1} \ldots [\Phi^{(1)}_{x_2}]^{n_k} = e^{\int_X \log \Phi^{(1)}_{x_1}(s) d\omega(x)}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

En l'última igualtat hem usat la definició (2.4.1). Per tant, per $m = 1$ la primera equació del teorema es compleix. Agafem l'esperança als dos costats de la igualtat (2.5.5) i tenim:

$$\begin{aligned} E_x\left(e^{-\int sdZ_{n+1}}\right) &= \Phi_x^{n+1}(s) = E_x\left(\Phi_{x_1}^{(1)}]^{n_1}\dots[\Phi_{x_k}^{(1)}]^{n_k}\right) \\ &= E_x\left(e^{\int \log\Phi_y^{(1)}(s)dZ_n(y)}\right) = \Phi_x^{(n)}(-\log\Phi_\cdot^{(1)}(s)). \end{aligned}$$

Aquesta última igualtat prova la segona igualtat del teorema quan $m = 1$. Seguidament suposem que $\Phi_x^{(n+m)}(s) = \Phi_x^{(n)}(-\log\Phi_\cdot^{(m)}(s))$ és cert i veiem si també és cert per $\Phi_x^{(n+m+1)}(s) = \Phi_x^{(n)}(-\log\Phi_\cdot^{(m+1)}(s))$:

$$\Phi_x^{(n+m+1)}(s) = \Phi_x^{(n+m)}(-\log\Phi_\cdot^{(1)}(s)) = \Phi_x^{(n)}(-\log\Phi_\cdot^{(m)}(-\log\Phi_\cdot^{(1)})) = \Phi_x^{(n)}(-\log\Phi_\cdot^{(m+1)}(s))$$

Per tant, ja tenim provada la segona igualtat del teorema per qualssevol $m, n = 0, 1, \dots$. Finalment utilitzant altre cop l'observació 2.5.1 tenim:

$$\begin{aligned} E(e^{-\int sdZ_2} \mid Z_0 = \omega) &= E(E(e^{-\int sdZ_2} \mid Z_1)|Z_0 = \omega) = E(\Phi(Z_1, s) \mid Z_0 = \omega) \\ &= \int e^{\int \log\Phi_x^{(1)}(s)d\omega'(x)}d\omega' dP^{(1)}(\omega, \omega') = \Phi(\omega, -\log\Phi_\cdot^{(1)}(s)) \\ &= e^{\int \log\Phi_x^{(1)}(-\log\Phi^{(1)}\cdot(s))d\omega(x)} = e^{\int \log\Phi_x^{(2)}(s)d\omega(x)} \end{aligned}$$

Amb això hem provat que per qualsevol n, quan $m = 2$ es compleix la igualtat del teorema. Repetint el procediment podem veure-ho per $m = 3$,$m = 4$, ... i així, recursivament, queda provada la primera igualtat del teorema. □

2.6 Exemple: Efecte cascada de nucleons

Aquest tipus de procés de ramificació es caracteritza pel fet que els descendents d'un individu comparteixen algun element del seu predecessor, com l'energia o la massa. De moment, per introduir aquest tipus de processos, considerarem sempre el nombre de descendents que es van generant i la seva classe x, que anirà éssent compartida de generació en generació (no farem encara un desenvolupament temporal del procés).

Considerem un nucleó (aquest serà Z_0), és a dir, un neutró o un protó molt energètic que entra a la part més alta de l'atmosfera. Eventualment, aquest nucleó patirà una col·lisió amb un nucli atòmic en la qual arrencarà un o més nucleons d'aquest. Els resultants de la col·lisió, és a dir, el nucleó inicial i els arrancats del nucli atòmic formant Z_1. Aquests elements de Z_1, s'hauran repartit l'energia de l'individu inicial de Z_0 i per tant, la suma de totes les classes dels elements de Z_1 serà menor o igual a la classe de l'element de Z_0 (el menor és degut a que de manera general en aquestes col·lisions tenim pèrdues d'energia). A partir d'aquest punt els elements de Z_1 patiran noves col·lisions creant Z_2 que a la vegada crearant Z_3 i així successivament, fins que no quedi cap nucleó amb suficient energia per continuar el procés.

Considerem ara un procés com aquest en el qual, després de la primera col·lisió només arranquem un nucleó. Per tant, tindrem un nucleó (Z_0) amb energia E que després d'una col·lisió arrenca un segon nucleó d'un nucli atòmic, aquests dos formarant Z_1, i tindran energia $U_1 \cdot E$ i $U_2 \cdot E$, respectivament on $0 \leq U_1, U_2$; $U_1 + U_2 \leq 1$ tals que U_1, U_2 tenen densitat de probabilitat continua $f(u_1, u_2)$ (simètrica en u_1, u_2 i independent d'E). Ara definim aquest procés de ramificació general on x és l'energia dels nucleons i X els reals positius. Recordant la formulació alternativa que vàrem fer al final de la secció 2.4, tenim que la FGM pels dos nucleons produïts en una generació per un nucleó d'energia x es pot escirure com:

$$\Phi_x^{(1)}(s) = \iint_{\{0<u_1+u_2\leq 1; 0<u_1,u_2\}} e^{-s(xu_1)-s(xu_2)} f(u_1, u_2) du_1 du_2,$$

i usant la igualtat (2.5.4), substituint $\cdot$ per x (ja que en aquest cas x és un valor fixat) n per 1 i m per n tenim que:

$$\Phi_x^{(n+1)}(s) = \Phi_x^n(-log\Phi_x^{(1)}(s)) = \Phi_x^1(-log\Phi_x^{(n)}(s)) \tag{2.6.1}$$

que desenvolupant queda:

$$\Phi_x^{(n+1)}(s) = \iint \Phi_{xu_1}^{(n)}(s)\Phi_{xu_2}^{(n)}(s) f(u_1, u_2) du_1 du_2 \text{ per } n = 0, 1, \ldots \tag{2.6.2}$$

Propietat 2.6.1. En aquest procés de ramificació tenim que $\Phi_x^{(n)}(s) = \Phi_1^{(n)}(s^{(x)})$ on $s^{(x)}(y) = s(xy)$ per $n = 1, 2, \ldots$.

Demostració: Utilitzant (2.6.1) i (2.6.2) podem veure-ho per inducció sobre n. Fixat x, veiem el cas per $n = 1$:

$$\Phi_1^{(1)}(s^{(x)}(y)) = \Phi_1^{(1)}(s(xy)) = \iint_{\{0<u_1+u_2\leq 1; 0<u_1,u_2\}} e^{-s(xu_1)-s(xu_2)} f(u_1, u_2) du_1 du_2 = \Phi_x^{(1)}(s).$$

Si suposem que es compleix la igualtat per n, és a dir, que $\Phi_x^{(n)}(s) = \Phi_1^{(n)}(s^{(x)})$ i veiem que $\Phi_x^{(n+1)}(s) = \Phi_1^{(n+1)}(s^{(x)})$, haurem acabat:

$$\begin{aligned}\Phi_x^{(n+1)}(s) &= \iint \Phi_{xu_1}^{(n)}(s)\Phi_{xu_2}^{(n)}(s) f(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ &= \iint \Phi_{u_1}^{(n)}(s^{(x)})\Phi_{xu_2}^{(n)}(s^{(x)}) f(u_1, u_2) du_1 du_2 = \Phi_1^{(n+1)}(s^{(x)}).\end{aligned}$$

□

Sigui $\varphi^{(n)}(t, y)$ la fgm de la variable "nombre de nucleons a la generació n amb energia menor que y"(considerem que el primer té energia 1). Recordem que les funcions generadores de moments en el cas de les distribucions puntuals ω són de la forma $\Phi(t\mathbb{1}_A) = E(e^{-t\omega(A)})$ on A és un conjunt de X. Per tant $\varphi^{(0)}(t, y) = 1$ si $y < 1$ (ja que la variable nombre de nucleons és 0) i $\varphi^{(0)}(t, y) = e^{-t}$ si $y \geq 1$ (ja que la variable nombre de nucleons és 1). Tenim aleshores que $\varphi^{(n)}(t, y) = \Phi_1^{(n)}(ts_y)$ (per la propietat 2.4.1) on $s_y(u) = 1$ si $0 < u \leq y$ en qualsevol altre cas $s_y(u) = 0$ (és a dir, s_y funciona com un indicador pels nucleons amb energia menor que y).

Finalment podem extreure una fórmula de recurrència per φ:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(t,y) &= \Phi_1^{(n+1)}(ts_y) = \iint \Phi_{u_1}^{(n)}(ts_y)\Phi_{xu_2}^{(n)}(ts_y)f(u_1,u_2)du_1du_2 \\
&= \iint \Phi_1^{(n)}(ts_y^{(u_1)})\Phi_1^{(n)}(ts_y^{(u_2)})f(u_1,u_2)du_1du_2 \\
&= \iint \Phi_1^{(n)}(ts_y(u_1u)\Phi_1^{(n)}(ts_y(u_2u))f(u_1,u_2)du_1du_2 \\
&= \iint \Phi_1^{(n)}(ts_{y/u_1}\Phi_1^{(n)}(ts_{y/u_2}))f(u_1,u_2)du_1du_2 \\
&= \iint \varphi^{(n)}(t,\tfrac{y}{u_1})\varphi^{(n)}(t,\tfrac{y}{u_2})f(u_1,u_2)du_1du_2
\end{aligned}$$

per $n = 0, 1, \ldots, t \geq 0$ i $y > 0$.

2.7 Exemple: Model de multiplicació de neutrons unidimensionals

De moment considerarem el model més senzill possible, en el qual tenim una barra de longitud L, on en aquesta barra es mouen electrons cap a un sentit o cap un altre. Agafarem el nostre espai de classes X com l'interval $(0, L)$, i per tant, x és la posició del neutró (en aquest cas en el moment del seu naixement). Un neutró amb classe x tindrà una probabilitat de $0,5$ d'anar cap a un sentit o cap un altre, i una probabilitat αdx de transformar-se en dos neutrons en un interval dx (cadascun dels quals novament amb una probabilitat independent i de $0,5$ per anar en un sentit o un altre). Considerem també que un neutró que arriba als límits de la barra no retorna a aquesta. Com la probabilitat de no patir una col·lisió en una distància x és $e^{-\alpha x}$ la FGM de la primera generació és:

$$\begin{aligned}
\Phi_x^{(1)}(s) &= \tfrac{1}{2}(e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(L-x)}) + \tfrac{1}{2}\int_0^x \alpha dy e^{-2s(y)}e^{-\alpha(x-y)} + \tfrac{1}{2}\int_x^L \alpha dy e^{-2s(y)}e^{-\alpha(y-x)} = \\
&= \tfrac{1}{2}(e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(L-x)}) + \tfrac{1}{2}\alpha\int_0^x dy e^{-2s(y)}e^{-\alpha|y-x|}.
\end{aligned}$$

Veurem un desenvolupament més detallat d'aquest exemple en el següent capítol.

2.8 Moments de primer ordre

La idea principal d'aquesta secció és obtenir una expressió (o almenys una fórmula de recurrència) que ens permeti calcular les esperances de les successives generacions d'un procés de ramificació.

Agafem doncs un procés de ramificació general que comença amb una 'població Z_0 d'un sol individu de classe x. Recordem que en la propietat 2.4.1, teniem que donat un conjunt A de X i el seu indicador, tenim que $\Phi_x^{(1)}(t\mathbb{1}_A)$ és la fgm de la variable $Z_1(A)$, és a dir, el nombre d'individus de la següent generació amb classe dins d'A. Amb tot això tenim que:

$$E_x Z_1(A) = -\left.\frac{\partial \Phi_x^{(1)}(t\mathbb{1}_A)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Definició 2.8.1. Anomenarem $M(x, A) = E_x Z_1(A)$.

Propietat 2.8.1. Si $A_1, A_2, \ldots$ conjunts disjunts numerables, tenim que:

$$M(x, A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = M(x, A_1) + M(x, A_2) + \ldots$$

DEMOSTRACIÓ: Només hem d'utilitzar ii) de la propietat 2.2.2 que ens diu que per conjunts disjunts $Z_1(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = Z_1(A_1) + Z_1(A_2) + \ldots$, i aleshores aplicar l'esperança a banda i banda. $\square$

Amb la propietat anterior, veiem que M, per un x fixat, és una *mesura σ-additiva.*

A partir d'aquest punt assumirem que $M(x, X)$ és una funció fitada de x. A més a més per notació, quan posem $dM(x, y)$ la diferencial sempre farà referència a la segona variable.

Definició 2.8.2. Sigui $M_1(x, A) = M(x, A)$, definim:

$$M_{n+1}(x, A) = \int_X M_n(y, A) dM(x, y) = \int_X M(y, A) dM_n(x, y) \text{ per } n = 1, 2, \ldots$$

Propietat 2.8.2. Si $M(x, A) \leq c \ \forall x$, aleshores $M_n(x, A)$ és fitada i més petita que $c^n \ \forall x$

DEMOSTRACIÓ:

$$M_n(x, X) = \int_X M(y, X) dM_{n-1}(x, y) \leq \int_X c dM_{n-1}(x, y) = c M_{n-1}(x, X) \leq \cdots \leq c^n.$$

Propietat 2.8.3. $M_n(x, X)$ per un x fixat, és una mesura σ-additiva.

DEMOSTRACIÓ: Demostrem-ho per inducció sobre n. Primer de tot recordem que ja hem vist que $M(x, A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = M(x, A_1) + M(x, A_2) + \ldots$ per $A_1, A_2, \ldots$ col·lecció numerable i disjunta (σ-additiva). Aleshores, suposem que $M_n(x, A)$ també és σ-additiva i per tant, $M_n(x, A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = M_n(x, A_1) + M_n(x, A_2) + \ldots$ per $A_1, A_2, \ldots$ col·lecció numerable i disjunta. Sabem que per definició

$$\begin{aligned} M_{n+1}(x, A_1 \cup A_2 \ldots) &= \int_X M_n(y, A_1 \cup A_2 \ldots) dM(x, y) \\ &= \int_X [M_n(x, A_1) + M_n(x, A_2) + \ldots] dM(x, y) \\ &= \int_X \lim_{n \to \infty} \sum_i^n M_i(x, A_i) dM(x, y). \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Finalment, utilitzant el teorema de convergència monòtona podem permutar el límit amb la integral i obtenir $M_{n+1}(x, A_1 \cup A_2 \ldots) = M_{n+1}(x, A_1) + M_{n+1}(x, A_2) + \ldots$ i per tant afirmar que M_{n+1} és una mesura σ-additiva $\square$.

Recordem de la secció 2.4 que, $\int_X h d\omega = n_1 h(x_1) + n_2 h(x_2) + \cdots + n_k h(x_k)$ per una distribució puntual $\omega = (x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots; x_k, n_k)$ i $h(x)$ una funció. Aleshores si agafem

$h(x)$ com un indicador d'un conjunt A i ω com la generació Z_1 tenim que $E_x \int \mathbb{1}_A dZ_1 = E_x Z_1(A) = M(x,A)$, definit $s(x)$ com un indicador qualsevol o com una combinació linial finita d'indicadros, l'igualtat següent:

$$E_x \int\limits_X s(y) dZ_1(y) = \int\limits_X s(y) dM(x,y), \tag{2.8.2}$$

és certa sempre i quan la integral de la dreta de la igualtat existeixi.

Considerant $s(y)$ del la igualtat anterior com una funció no negativa i mesurable, aleshores $s(y)$ és límit creixent de funcions elementals mesurables no negatives ($\{s_n(y)\} \uparrow s(y)$) les quals per definició són sumatoris d'indicadors de la forma, $s_i(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ (per $a_i \in \mathbb{R}$ disjunts dos a dos). Per tant, el lema anterior també es complirà per funcions elementals no negatives, ja que són combinacions lineals d'indicadors i aplicant el teorema de convergència dominada (mirar llibre [1], pàg. 84.) també és complirà per $s(y)$ no negativa i mesurable.

Lema 2.8.1. *La següent igualtat se satisfà:*

$$E_x\{Z_{n+1}(A) \mid Z_n = \omega\} = \int M(y,A) d\omega(y).$$

Demostració: Afagant la primera igualtat del teorema 2.5.1 per $m = 1$ i $s = t\mathbb{1}_A$, per un conjunt A i $t \geq 0$, tenim que:

$$E_x\{e^{tZ_{n+1}(A)} \mid Z_n = \omega\} = [\Phi^{(1)}_{x_1}(t\mathbb{1}_A)]^{n_1} \cdots [\Phi^{(1)}_{x_k}(t\mathbb{1}_A)]^{n_k},$$

on $\omega = (x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots; x_k, n_k)$. Derivant per t a banda i banda d'aquesta igualtat i avaluant a $t = 0$ tenim que:

$$E_x\{Z_{n+1}(A) \mid Z_n = \omega\} = \sum_i n_i M(x_i, A) = \int M(y,A) d\omega(y)$$

on en l'última igualtat hem utilitzat la definició d'integral de la secció 2.4. □

Teorema 2.8.1. *Els iterats M_n de M, definits a la definició 2.8.2 són els primer moments de les diferents distribucions Z_n:*

$$E_x Z_n(A) = M_n(x,A) \text{ per } n = 1,2,\ldots$$

a més:

$$E_x\{Z_{n+m}(A) | Z_n = \omega\} = \int M_m(y,A) d\omega(y) \text{ per } m,n = 0,1,\ldots$$

Demostració: Primer de tot veiem que utilitzant l'igualtat del lema 2.8.1 per $n = 1$ tenim:

$$E_x\{Z_2(A) \mid Z_1 = \omega\} = \int\limits_X M(y,A) d\omega(y),$$

aplicant esperança a totes dues bandes i tenint en compte que l'esperança d'una esperança condicionada és l'esperança de la variable:

$$E_x(Z_2(A)) = E_x[\int M(y,A)d\omega(y)] = \int M(y,A)dM(x,y) = M_2(x,A),$$

on en la penúltima igualtat hem utilitzat (2.8.2) per $M(y,A)$, la qual sabem que és no negativa i mesurable. Per altra banda en l'última igualtat hem utilitzat senzillament la definició 2.8.2. Ara que tenim $E_x(Z_2(A)) = M_2(x,A)$ podem veure que (2.8.2) també es compleix per Z_2:

$$E_x \int s(y)dZ_2(y) = \int s(y)dM(x,y).$$

Repetint el procediment anterior, és a dir, començar per la igualtat del lema 2.8.1 i desenvolupar-la, obtenim que $E_x(Z_3(A)) = M_3(x,A)$. Recurrentment veiem que $E_x Z_n(A) = M_n(x,A)$. Per veure la igualtat presentada en el teorema farem el mateix procediment que hem fet en el lema 2.8.1. Comencem doncs amb la igualtat del teorema 2.5.1 amb $s = \mathbb{1}_A$ i $t \geq 0$:

$$E_x[e^{tZ_{n+m}(A)} \mid Z_n = \omega] = [\Phi_{x_1}^{(m)}(s)]^{n_1} \cdots [\Phi_{x_k}^{(n)}(s)]^{n_k}$$

derivant segons t a banda i banda i avaluant a $t = 0$ tenim:

$$E_x\{Z_{n+1}(A) \mid Z_n = \omega\} = \sum_i n_i M_m(x_i, A) = \int M_m(y,A)d\omega(y)$$

on en la primera igualtat hem utilitzat que $\Phi_{x_1}^{(m)}(t\mathbb{1}_A) = E_x Z_n(A) = M_n(x,A)$ cosa que hem vist al llarg d'aquesta demostració.

□

2.9 Funcions i valors propis de M

Per poder entendre i estudiar el comportament asimptòtic dels processos de ramificació generals que estem treballant, és important conèixer els valors i les funcions pròpies de l'operador M.

Definició 2.9.1. Definim V com una mesura en X tal que $0 < V(x) < \infty$.

Aquesta mesura V ens servirà per introduir un element de volum dV de X, de manera que si X és finit i té coordenades $(x_1, \ldots, x_d)$, aleshores $dV = dx_1 dx_2 \cdots dx_d$ o, de manera general, $dV = v(x_1, \ldots, x_d)dx_1 \cdots dx_d$ on v és una funció positiva en X.

Definició 2.9.2. Una funció f de X és *uniformement positiva* si existeix una constant positiva c tal que $f(x) \geq c$, $\forall x \in X$.

La definició anterior es pot estendre per funcions de la forma $f(x,y)$ per $x, y \in X$, de manera que $f(x,y)$ serà uniformement positiva si existeix una constant c positiva tal que $f(x,y) \geq c$, $\forall x, y \in X$.

Definició 2.9.3. Direm que M_n *té densitat* si existeix una funció no negativa $m_n(x,y)$ tal que $\forall x \in X$:

$$M_n(x, A) = \int\limits_A m_n(x,y)dV(y).$$

Propietat 2.9.1. Si M_n té densitat, M és una funció fitada i X està acotat, aleshores la densitat de M_{n+1} serà:

$$m_{n+1}(x,y) = \int\limits_X m_n(y,z)dM(x,y).$$

DEMOSTRACIÓ: Agafant la definició anterior i la definició 2.8.2 tenim que:

$$M_{n+1}(x,A) \;=\; \int\limits_X M_n(y,A)dM(x,y) = \int\limits_X \int\limits_A m_n(y,z)dV(z)dM(x,y),$$

on hem utilitzat el *teorema de Fubini* (veure [15]) per permutar les integrals. Per tant, tenim que:

$$m_{n+1}(x,y) = \int\limits_X m_n(y,z)dM(x,y).$$

$\square$

Es pot donar el cas en què M_{n+1} tingui densitat tot i que M_n no.

D'aquí en endavant suposem que M té densitat m.

Definició 2.9.4. Una funció μ no nul·la és una funció pròpia per la dreta de M amb valor propi ρ si per cada $x \in X$ tenim:

$$\rho\mu(x) = \int\limits_X m(x,y)\mu(y)dV(y).$$

Anàlogament direm que $v(y)$ és una funció pròpia per l'esquerra amb valor propi ρ si és una funció no nul·la i per cada $x \in X$ tenim:

$$\rho v(y) = \int\limits_X v(x)m(x,y)dV(y)$$

Teorema 2.9.1. *Sigui $M(x,X)$ una funció fitada de X amb densitat m i amb un enter n_0 tal que $m_{n_0}(x,y)$ és uniformement positiva i fitada, és a dir, $\exists\ a,b \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < a \leq m_{no}(x,y) \leq b$. Aleshores M té un valor propi màxim ρ positiu corresponent tant a una funció pròpia μ (per la dreta) i a una funció pròpia v (per l'esquerra), que són també fitades i uniformement positives. A més, μ i v són les úniques funcions pròpies per la dreta i l'esquerra respectivament no negatives. Finalment si normalitzem μ i v de manera que $\int \mu(x)v(x)dV(x) = 1$ tenim que:*

$$m_n(x,y) = \rho^n \mu(x)v(y)[1 + O(\Delta^n)], \quad \textit{per } n \to \infty$$

on $0 < \Delta < 1$ pot ser agafat independentment de x i y.

Tenim la demostració detallada d'aquest teorema al llibre [4], pàg. 78-80.

2.10 Moments de segon ordre

Condició 2.10.1. A partir d'aquest punt suposarem que qualsevol moment de segon ordre $E_x(Z_1(X))^2$ és una funció fitada per x.

Definició 2.10.1. Siguin A i B subconjunts de X definim $M_n^{(2)}(x, A, B)$ i $v(x, A, B)$ com:

$$M_n^{(2)}(x, A, B) = E_x(Z_n(A)Z_n(B)) \text{ per } n = 0, 1, \dots$$

$$v(x, A, B) = M_1^{(2)}(x, A, B) - M(x, A)M(x, B).$$

Definició 2.10.2. Una funció $F(A, B)$ amb A, B subconjunts de X s'anomena *mesura bivariant* si:

i) F és finita i no negativa.

ii) $F(A_1 \cup A_2 \cup \dots, B) = F(A_1, B) + F(A_2, B) + \dots$ per tot $A_1, A_2, \dots$ subconjunts disjunts de X. Igualment per $F(A, B_1 \cup B_2 \cup \dots) = F(A, B_1) + F(A, B_2) + \dots$ per tot $B_1, B_2, \dots$ disjunts.

Definició 2.10.3. Una funció F s'anomena *mesura bivariant signada* si $F = F_1 - F_2$, on F_1 i F_2 són mesures bivariants.

Propietat 2.10.1. $M_1^{(2)}$ és una mesura bivariant per cada x.

Demostració: Siguin $A_1, A_2, \dots$ subconjunts disjunts de X i B subconjunt de X. $Z_1(A_i)$ i $Z_1(B)$ són sempre positius per tot i, per tant $Z_1(A_i) \times Z_1(B)$ també és positiu per tot i. Aleshores, $M_1^{(2)}(x, A, B) = E_x(Z_1(A)Z_1(B)) > 0$ per cada x. A més a més, per definició $Z_1(X)$ serà finit i per tant, també ho serà qualsevol dels seus subconjunts. Finalment:

$$M_1^{(2)}(x, A_1 \cup A_2 \cup \dots, B) = E_x(Z_1(A_1 \cup A_2 \cup \dots)Z_1(B)) = E_x((\sum_i Z_1(A_i))Z_1(B))$$
$$= \sum_i E_x(Z_1(A_i)Z_1(B)) = M_1^{(2)}(x, A_1, B) + M_1^{(2)}(x, A_2, B) + \cdots$$

Si repetim el procés anterior per A i $B_1, B_2, \dots$ disjunts acabem veient que $M_1^{(2)}$ és una mesura bivariant. $\square$

Propietat 2.10.2. $v(x, A, B)$ és una mesura bivariant signada per cada x.

Demostració: Utilitzant un raonament similar al vist a la demostració anterior veiem que $M(x, A)M(x, B)$ és també una mesura bivariant per cada x. Primer definim

$$F(x, A, B) = M(x, A)M(x, B)$$

$\forall A, B \subset X$, aleshores veiem que F és no negativa, ja que, $M(x, A) = E_x Z_1(A) > 0$ (per definició $Z_1(A)$ és el nombre d'individus de la primera generació amb classe dins d'A, i per tant un nombre enter positiu.) i $M(x, B) > 0$, aleshores $F(x, A) > 0$. També veiem que

F és finita, ja que, $Z_1(X)$ finit. Finalment, utilitzant la propietat 2.8.1 veiem directament que $F(A_1 \cup A_2 \cup \ldots, B) = F(A_1, B) + F(A_2, B) + \ldots$ per $A_1, A_2, \ldots$ subconjunts disjunts de X i $F(A, B_1 \cup B_2 \cup \ldots) = F(A, B_1) + F(A, B_2) + \ldots$ per $B_1, B_2, \ldots$ disjunts.

Per tant, com que $v(x, A, B) = M_1^{(2)}(x, A, B) - M(x, A)M(x, B)$ és una diferència de mesures bivariants, $v(x, A, B)$ és una mesura bivariant signada. □

Observació 2.10.1. Podem fer que una mesura bivariant F determini una mesura en $X \times X$, espai producte.

Amb aquesta mesura podrem definir integrals en $X \times X$ com:

Definició 2.10.4. Suposem $f(\zeta, \eta)$ una funció definida en $X \times X$. Aleshores definim una integral aleatòria doble (anàlogament a com vàrem fer a l'inici de la secció 2.4) com:

$$\int_X \int_X f(\zeta, \eta) dZ_1(\zeta) dZ_1(\eta) = \sum_{i,j} n_i n_j f(x_i, x_j),$$

on Z_1 és una distribució puntual de la forma $(x_1, n_1; x_2, n_2; \ldots)$.

De manera similar a la construcció de l'equació (2.8.2) de la secció de moments de primer ordre, es veu que:

$$E_x \int \int f(\zeta, \eta) dZ_1(\zeta) dZ_1(\eta) = \int \int f(\zeta, \eta) d_{\zeta,\eta} M_1^{(2)}(x, \zeta, \eta)$$

sempre i quan la integral de la dreta de la igualtat existeixi.

Definició 2.10.5. Definim T com una transformació d'una mesura bivariant signada F com:

$$TF(A, B) = \int_X \int_X M(\zeta, A) M(\eta, B) d_{\zeta,\eta} F(\zeta, \eta).$$

Fixem-nos que al ser F una mesura bivariant signada podem expressar $TF(A, B)$ com:

$$TF(A, B) = \int_X \int_X M(\zeta, A) M(\eta, B) d_{\zeta,\eta} F_1(\zeta, \eta) - \int_X \int_X M(\zeta, A) M(\eta, B) d_{\zeta,\eta} F_2(\zeta, \eta).$$

A la demostració de la propietat 2.10.2 hem vist que $M(x, A)M(x, B)$ és una mesura bivariant. Procedint de la mateixa manera podem veure que $M(\zeta, A)M(\eta, B)$ és també una mesura bivariant. Al fer la doble integral sobre aquesta mesura bivariant $M(\zeta, A)M(\eta, B)$ es mantindran les propietats de mesura bivariant, i per tant $\int_X \int_X M(\zeta, A) M(\eta, B) d_{\zeta,\eta} F_i(\zeta, \eta)$ amb $i = 1, 2$ són també mesures bivariants. Per tant TF serà una mesura bivariant signada i aleshores, T una transformació de mesures bivariants signades.

Amb la definició anterior es pot veure la següent relació de recurrència:

$$M^{(2)}_{n+1}(x,A,B) = TM^{(2)}_n(x,A,B) + \int\limits_X v(y,A,B)d_yM_n(x,y) \text{ per } n = 0,1,2,\dots$$

Propietat 2.10.3. Amb la condició 2.10.1, $M^{(2)}_n(x,X,X)$ és per cada n una funció fitada de x.

Demostració: Per la condició inicial 2.10.1 $M^{(2)}_1(x,X,X) = E_x(Z_1(X))^2$ és fitat per x. Considerem ara $M^{(2)}_n(x,X,X)$ fitat per x, és a dir, que $\forall x \in X$, existeix un $C \in \mathbb{Z}^+$ tal que $M^{(2)}_n(x,X,X) < C$. Ara hem de veure que $M^{(2)}_{n+1}(x,X,X)$ està fitat per x.

$$\begin{aligned}
M^{(2)}_{n+1}(x,X,X) &= TM^{(2)}_n(x,X,X) + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)\\
&= \int\limits_X\int\limits_X M(\zeta,X)M(\eta,X)d_{\zeta,\eta}M^{(2)}_n(x,\zeta,\eta) + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)\\
&= \int\limits_X\int\limits_X E_\zeta Z_1(X)E_\eta Z_1(X)d_{\zeta,\eta}M^{(2)}_n(x,\zeta,\eta) + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)
\end{aligned}$$

En un procés de ramificació general $\forall \zeta,\eta \in X$, $E_\zeta Z_1(X) = E_\eta Z_1(X) = E_r Z_1(X)$, és a dir, l'esperança del nombre d'elements d'una generació no depèn de la classe de l'element primogeni de la generació anterior, per tant :

$$\begin{aligned}
M^{(2)}_{n+1}(x,X,X) &= (E_rZ_1(X))^2\int\limits_X\int\limits_X d_{\zeta,\eta}M^{(2)}_n(x,X,X) + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)\\
&= (E_rZ_1(X))^2M^{(2)}_n(x,X,X) + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)\\
&\leq (E_rZ_1(X))^2C + \int\limits_X v(y,X,X)d_yM_n(x,y)\\
&= (E_rZ_1(X))^2C + \int\limits_X (M^{(2)}_1(x,X,X) - M(x,X)M(x,X))d_yM_n(x,y)\\
&= (E_rZ_1(X))^2C + \int\limits_X (M^{(2)}_1(x,X,X) - M(x,X)M(x,X))d_yM_n(x,y)\\
&\leq (E_rZ_1(X))^2C + \int\limits_X (C - (E_xZ_1(X))^2)d_yM_n(x,y)\\
&= (E_rZ_1(X))^2C + (C - (E_xZ_1(X))^2)M_n(x,X)\\
&= (E_rZ_1(X))^2C + (C - (E_xZ_1(X))^2)E_xZ_n(X)\\
&= (E_rZ_1(X))^2C + (C - (E_rZ_1(X))^2)E_rZ_n(X).
\end{aligned}$$

Per tant, $M^{(2)}_{n+1}(x,X,X) = (E_rZ_1(X))^2C + (C-(E_rZ_1(X))^2)E_rZ_n(X)$ que és un valor finit i independent de x. Aleshores, $M^{(2)}_{n+1}$ és també fitat. □

Propietat 2.10.4. Els iterats de T tenen la forma:

$$T^nF(A,B) = \int\limits_X\int\limits_X M_n(\zeta,A)M_n(\eta,B)d_{\zeta,\eta}F(\zeta,\eta).$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot veure aplicant la definició 2.10.5 i la relació de recurrència dels moments de primer ordre $M_{n+1}(x,A) = \int\limits_X M(y,A)dM_n(x,y)$. □

Finalment, si les condicions del teorema 2.9.1 es compleixen i recordant la condició 2.10.1 podem calcular $M_n^{(2)}$ amb la recurrència vista prèviament i utilitzant la propietat 2.10.4 per a calcular els iterats de T que ens apareixeran en la relació de recurrència. Tenim doncs que:

$$M_n^{(2)}(x,A,B) = \rho^{2n}[U(x)\int_A v(x)dV(x)\int_B v(x)dV(x) + O(\Delta_1^n)] \text{ per } n \text{ suficientment grans,}$$

on $0 < \Delta_1 < 1$, Δ_1 és independent de x, A i B, ρ és el valor propi màxim positiu del teorema 2.9.1 i a més,

$$U(x) = (\mu(x))^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-2k} \int_X \left(\int_X \int_X \mu(y_1)\mu(y_2) d_{y_1,y_2} v(\zeta, y_1, y_2) \right) d_\zeta M_{k-1}(x,\zeta).$$

Tenim un càlcul detallat d'aquestes expresions al llibre [4], pàg. 72-73.

2.11 Probabilitats d'extinció

La idea d'aquesta secció és fer un anàleg al que vàrem fer al capítol anterior de Galton-Watson en la secció de probabilitats d'extinció però per processos de ramificació generals. És a dir, analitzar les generacions d'un procés de ramificació general Z_n si $n \to \infty$.

Definició 2.11.1. Definim $q_n(x) = P_x\{Z_n(X) = 0\}$ per $n = 0, 1, \dots$ i $q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) = P_x\{Z_n(X) = 0 \text{ per algun n}\}$

Lema 2.11.1. *Sigui $M(x,X)$ una funció fitada de X amb densitat m i amb un enter n_0 tal que $m_{n_0}(x,y)$ és uniformement positiva i fitada, és a dir, $\exists\ a,b \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < a \leq m_{no}(x,y) \leq b$. Suposem a més que $\exists N > 0$ enter tal que $q_N(x) > 0$ $\forall x \in X$. Aleshores $q_{n_0+N}(x)$ és una funció de x uniformement positiva.*

La demostració del lema 2.11.1 és a [4], pàg. 68-69.

Teorema 2.11.1. *Suposem que les condicions d'existència de n_0 i N del lema anterior es compleixen. Aleshores, per cada x de X i cada enter $K > 0$ tenim:*

$$P_x\{0 < Z_n(X) \leq K \text{ infinites vegades }\} = 0.$$

La demostració d'aquest teorema és a [4], pàg. 69-70.

Aquest teorema ens diu que el nostre procés de ramificació sempre tendirà o bé cap a l'extinció, és a dir, que per algun $N > 0$ $Z_N(x) = 0$ i per tant el procés acabarà, o bé cap a ∞.

Ara el que ens falta fer és estudiar els diferents resultats asimptòtics depenent del valor de ρ:

- $\rho \leq 1$

Teorema 2.11.2. *Suposem que les condicions del lema 2.11.1 per m, n_0 i N es compleixen i que per tant tenim un enter positiu N tal que per qualsevol x, $q_N(x) > 0$. Si a més a més $\rho \leq 1$, es compleix que:*

$$q(x) = 1.$$

DEMOSTRACIÓ: Del teorema 2.9.1 veiem que $E_x Z_n(X)$ és una funció fitada d'n i x quan $\rho < 1$, aleshores tindrem que la probabilitat $P_x(Z_n(X) \to \infty) = 0$ per qualsevol x. Finalment, utilitzant el teorema 2.11.1 veiem que $P_x(Z_n(X) \to 0) = 1$. □

Pel teorema anterior hem vist que quan es compleixen certes condicions i $\rho \leq 1 \Longrightarrow Z_n \to 0$ i per tant, la distribució de probabilitat de Z_n quan $n \to \infty$ no és d'interès.

- $\rho > 1$

Teorema 2.11.3. *Suposem certes les condicions sobre m i n_0 del lema 2.11.1, la condició 2.10.1 i $\rho > 1$. A més per cada subconjunt A de X definim $W_n(A) = Z_n(A)/\rho^n$ per $n = 0, 1, \ldots$ Aleshores per cada x tenim:*

$$P_x\left(\lim_{n\to\infty} W_n(A)\right) = W(A) = 1$$

on $W(A)$ és una variable aleatòria tal que

$$E_x(W(A)) = \mu(x) \int v(x) dV(y) \tag{2.11.1}$$

$$E_x(W(A))^2 = U(x) \int_A (v(y) dV(y))^2$$

on U està definit al final de la secció 2.10. També si A i B són subconjunts de X tals que $V(A)$ i $V(B)$ són positius la correlació entre $W(A)$ i $W(B)$ és 1.

De l'equació (2.11.1) del teorema anterior podem extreure que $W(X)$ té probabilitat no nul·la de ser positiva. A més a més, es pot provar que la probabilitat condicionada $P(W(X) = 0 \mid Z_n(X) \to \infty)$ és 0. Assumint aquests dos punts i recordant que $Z_n(X) = W_n(X)\rho^n$, podem posar límits i arribar a que:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(X) \sim \rho^n W(X)$$

on $\rho^n > 0$ i $W(X)$ pot ser més gran que 0. Per tant tenim que:

Corol·lari 2.11.1. *Per $\rho > 1$ i amb les condicions del teorema 2.11.3 la probabilitat d'extinció $q(x)$ és per cada x més petita que 1.*

Veiem ara un teorema que ens servirà com a mètode per calcular la probabilitat d'extinció en el cas que $\rho > 1$, mitjançant un mètode iteratiu.

Teorema 2.11.4. *Suposem que es compleixen les condicions sobre* n_0 *del lema 2.11.1, la condició 2.10.1, que* $\rho > 1$ *i que existeix un enter* N *tal que* $q_N(x) > 0 \;\; \forall x$. *Aleshores:*

1) *q és una funció positiva uniforme i més petita que* 1
2) *q és l'única funció positiva uniforme i més petita que* 1 *que satisfà l'equació funcional:*
$$q(x) = \Phi_x^{(1)}(-logq)$$
3) *Si $q^{(0)}$ és una funció positiva i uniforme més petita que 1 i definim la seqüència $q^{(1)}, q^{(3)}, \ldots$ com:*
$$q^{(n+1)}(x) = \Phi_x^{(1)}(-logq^{(n)}) = \Phi_x^{(n+1)}(-logq^{(0)})$$
aleshores $\lim_{n\to\infty} q^{(n)}(x) = q(x), \quad x \in X$

La demostració d'aquest teorema està realitzada al llibre [4], pàg. 74.

3 Processos de ramificació de neutrons

Des d'un punt de vista de la física clàssica, un neutró està unívocament determinat en tot instant per la seva posició, la seva direcció i la seva energia. En el cas del nostre estudi considerem un neutró desplaçant-se per un medi en el qual, en qualsevol moment, pot col·lisionar amb un nucli atòmic, rebotant i perdent energia en el procés, essent absorbit pel nucli (fusió) o inclús trencant aquest nucli en un procés de fissió.

Durant un procés de fissió es generen un seguit de diferents partícules, entre les quals un nombre de neutrons i (que en el nostre cas considerarem aleatori) que tindràn unes certes energies i direccions (que també considerarem aleatòries). Qualsevol altra partícula elemental generada en aquest procés de fissió queda fora del nostre estudi. Els neutrons produïts en aquesta fissió podran, a la vegada, produir noves fissions amb altres nuclis atòmics. És important destacar, que al contrari de l'exemple de l'efecte cascada vist en el capítol anterior, en el cas de la fissió de neutrons els descendents podran tenir energia superior als progenitors.

Les probabilitats d'aquests processos de scattering, de fissió i de fusió depenen de manera no trivial de l'energia, de les direccions dels neutrons i del medi en el qual estiguem. En el nostre cas però, simplificarem el procés negligint l'efecte de l'energia en aquestes reaccions i assumint que la direcció del moviment dels neutrons produïts per scattering o fissió després d'una col·lisió és isòtropa en l'esfera unitat (no hi ha direccions privilegiades). Aquest model és anomenat *grup-1 isotròpic*, on assumirem que tots els neutrons generats tenen la mateixa velocitat o energia constant. També considerarem irrellevant per cada nova col·lisió la història de les col·lisions prèvies (propietat de Markov). Aquestes simplificacions faran que el nostre model no sigui aplicable de manera general a exepció de casos molt concrets com en les reaccions nuclears de l'isòtop de plutoni número 239 o de l'urani 235, reaccions en les quals el nostre procés coincidirà de manera notable amb els resultats d'un experiment real.

3.1 Introducció del procés de ramificació de neutrons

Per tractar les col·lisions successives de neutrons contra nuclis atòmics utilitzarem el tipus de procés de ramificació desenvolupat en el capítol anterior. No introduirem per tant, una dependència temporal de manera que no podrem calcular el nombre de neutrons esperats en un instant donat, tot i la importància física que pot tenir aquesta dependència. El que sí que podrem calcular seran les probabilitats d'extinció d'aquests processos, i el nombre de neutrons esperats a cada generació.

Considerarem el nostre espai X, on els neutrons viuran, com un espai tridimensional, convex, finit, físicament homogeni (espai igual en totes les direccions) i isòtrop. A més a més assumirem que un neutró creat en un punt $x \in X$ es mourà en línia recta en una direcció uniformement distribuïda dins les direccions de l'esfera unitat centrada en x. Aquestes propietats d'homogeneïtat i isotropia de l'espai faran que si volem, puguem fer un tractament matemàtic unidimensional d'aquest. Aleshores el moviment del neutró, com hem dit, seguirà en línia recta fins que pateixi una col·lisió o bé surti de X. Si surt de X considerarem que no té manera de tornar-hi i que per tant desapareix.

D'altra banda definirem la probabilitat que un neutró tingui una col·lisió en un interval de longitud Δ com $\alpha\Delta + o(\Delta)$, on α serà independent de la posició i energia del neutró. Amb tot això, la probabilitat que un neutró es desplaci una distància major que l sense patir cap col·lisió serà de $e^{-\alpha l}$(veure [7]).

Definició 3.1.1. Anomenarem a α la *secció eficaç* i a $1/\alpha$ el *recorregut lliure mig.*

Finalment, cal remarcar que a diferència de l'exemple vist en el capítol anterior secció 2.7, on consideràvem que un neutró després d'una col·lisió només tenia l'opció d'arrencar un nou neutró i canviar la seva direcció, tenint així dos neutrons resultants, en aquest cas suposarem que el neutró en patir una col·lisió, donarà lloc a un nombre aleatori de nous neutrons. A més a més, si només tenim un fenomen de scattering on el neutró original només canvia de manera isotròpica la seva direcció, aquest serà considerat, per conveniència, com un neutró descendent de l'anterior.

3.2 Probabilitats del procés

Definició 3.2.1. Quan un neutró pateix una col·lisió considerarem que tenim probabilitats $p_0, p_1, \ldots$ de tenir $0, 1, \ldots$ neutrons descendents, on p_0 és la probabilitat que el neutró sigui absorbit pel nucli atòmic en un procés de fusió, p_1 és la probabilitat de scattering del neutró progenitor en un nou neutró descendent amb direcció resultant isotròpica, i $p_2, p_3, \ldots$ és la probabilitat que la col·lisió del nostre neutró original amb el nucli atòmic resulti en $2, 3, \ldots$ neutrons lliures (fissió).

Com ja hem dit en la introducció d'aquest capítol, aquests p_r són independents del passat del neutró progenitor i per tant el nostre procés compleix la propietat de Markov.

Anomenant a x com el punt d'X on ha nascut un neutró, i y com el punt on patirà una col·lisió, recordant que estem en un espai tridimensional i que per tant x i y són vectors, tenim que:

Propietat 3.2.1. La densitat de probabilitat que un neutró nascut en x pateixi una col·lisió en y és:

$$g(y) = R(\alpha(y-x))\alpha^3 \text{ on } R(y) = \frac{e^{-|y|}}{4\pi|y|^2}.$$

Demostració: Siguin doncs $x \in X$, i S la superfície d'una esfera de radi r centrada en x. Ara agafem un diferencial de volúm dins de X amb dS de l'esfera i amb una alçada dr. La probabilitat que un neutró nascut en x es mogui amb una direcció tal que acabi travessant dS és $\frac{dS}{4\pi r^2}$. A més la probabilitat que aquest neutró pateixi una col·lisió a una distància de x entre r i $r+dr$ és $\alpha dr e^{-\alpha r}$. Aleshores, la probabiltat que un neutró nascut en x tingui la seva primera col·lisió en el volum dy en y és:

$$\alpha e^{\alpha|y-x|} dy/4\pi|y-x|^2 = R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy = g(y)dy \text{ on } R(y) = \frac{e^{-|y|}}{4\pi|y|^2}.$$

3.3 Procés de ramificació de neutrons

Utilitzant la notació del capítol anterior direm que la classe x del nostre procés de ramificació per neutrons és el punt on neixen els neutrons. Juntament amb aquests punts de naixement hauríem de posar les direccions que agafen, però com estem en un espai homogeni i isotròpic no les haurem d'especificar, de manera que podem considerar que x i y són unidimensionals. A més no utilitzarem una dependència temporal, només ens preocuparem del nombre de neutrons en cada generació.

Definició 3.3.1. Definim la funció generadora del procés de ramificació de neutrons com

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r t^r \text{ per } t \in \mathbb{C} \text{ tal que } |t| < 1.$$

Seguint la notació del capítol anterior, anomenarem Z_0 a la distribució puntual de la primera generació, que sense pèrdua de generalitat, podem dir que es tracta d'un sol neutró nascut en la posició $x \in X$. La següent generació Z_1, tindrà n neutrons (resultants de la col·lisió del neutró de Z_0) tots amb classe y, lloc on es produirà la col·lisió del neutró de Z_0 i per tant on neixaran tots els neutrons de Z_1. Si $s(y)$ és una funció no negativa d'y la FGM de Z_1 és el funcional d's:

$$\Phi_x^{(1)}(s) = E_x e^{-\int\limits_X s(y) dZ_1(y)}.$$

Sabent que la probabilitat que el nostre neutró inicial tingui una col·lisió en $y \in X$ i que aleshores resulti en n nous neutrons és $p_n R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy$, i que la probabilitat que el neutró surti d'X sense col·lisions és $1 - \int\limits_X R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy$, tenim que:

$$\begin{aligned} \Phi_x^{(1)}(s) &= (1 - \int\limits_X R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy) + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int\limits_X R(\alpha(y-x))\alpha^3 e^{-ns(y)} dy \\ &= 1 - \int\limits_A R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy + \int\limits_X R(\alpha(y-x)) f(e^{-s(y)})\alpha^3 dy, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

on hem utilitzat la notació alternativa per les FGM vista en el capítol anterior secció 2.4.

Amb aquesta funció generadora ja som capaços de generar les probabilitats de transició del nostre procés de ramificació de neutrons (secció 2.5).

A partir d'aquí assumirem $f'(1)$, $f''(1)$ finits i $p_0 \neq 1$.

Seguint la notació sobre moments del capítol anterior, posarem $M(x, A) = E_x Z_1(A)$, és a dir, M serà el valor esperat de neutrons de la primera generació nascuts en l'interval $A \subset X$ si el neutró de Z_0 té classe x. Agafant $\Phi_x^{(1)}(s)$ per $s(y) = \lambda \mathbb{1}_A(y)$ tenim doncs que:

$$\begin{aligned} M(x, A) &= -\frac{\partial \Phi_x^{(1)}(\lambda \mathbb{1}_A)}{\partial \lambda}\Bigg|_{\lambda=0} = -\frac{\partial\left(1 - \int\limits_X R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy + \int\limits_X R(\alpha(y-x)) f(e^{-\lambda \mathbb{1}_A})\alpha^3 dy\right)}{\partial \lambda}\Bigg|_{\lambda=0} \\ &= \int\limits_X R(\alpha(y-x)) f'(e^{-\lambda \mathbb{1}_A(y)}) e^{-\lambda \mathbb{1}_A}\alpha^3 dy\Bigg|_{\lambda=0} = f'(1)\int_A R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy, \end{aligned}$$

on podem dir, tenint en compte la secció 2.9, que la densitat de M és $m_1(x,y) = f'(1)R(\alpha(y-x))\alpha^3 = f'(1)\frac{e^{-\alpha|y-x|}}{4\pi|y-x|^2}$. Fixem-nos que $R(y)$ és una funció no fitada i per tant $m_1(x,y)$ tampoc ho és, però és un resultat conegut que la densitat $m_4(x,y)$ és una funció continua i fitada (veure [8], pàg. 29).

Propietat 3.3.1. $m_1(x,y)$ és uniformement positiva.

Demostració: Tenim que $m_1(x,y) = f'(1)\frac{e^{-\alpha|y-x|}}{4\pi|y-x|^2}$, on és evident que $|y-x| > 0 \;\; \forall x,y$, aleshores fem el canvi de variable $t = |y-x| > 0$ tenim doncs $m_1(t) = f'(1)\frac{e^{-\alpha t}}{4\pi t^2}$ que derivant queda:

$$m_1'(t) = \frac{f'(1)}{4\pi}\frac{e^{-\alpha t}(-\alpha)t^2 - 2te^{-\alpha t}}{t^4} = \frac{f'(1)}{4\pi}\frac{-e^{-\alpha t}t(\alpha t+2)}{t^4},$$

on tan $\frac{f'(1)}{4\pi}$ com α són positius per tant, $m_1'(t) < 0 \;\; \forall t$, és a dir, $m_1(t)$ és sempre decreixent. Fixem-nos a més que $\lim\limits_{t\to\infty} m_1(t) = 0$, però com hem dit que el nostre espai X és finit, t prendrà valors entre 0 i $t_{\text{màx}}$. Per tant, si agafem $C = m_1(t_{\text{màx}}) + \epsilon$ $(\forall\epsilon > 0)$, C serà una cota inferior de $m_1(t)$. $\square$.

Propietat 3.3.2. $m_n(x,y)$ és uniformement positiva.

Demostració: Ho demostrarem per inducció sobre n. Com hem vist $m_1(x,y)$ és uniformement positiva, suposem aleshores que $m_n(x,y)$ també és uniformement positiva i veiem que $m_{n+1}(x,y)$ ho és. Recordem de la secció 2.9 que $m_{n+1}(x,y) = \int\limits_X m_n(y,z)dM(x,y)$ i que $M_1(x,A) = \int\limits_A m_1(x,y)dV(y)$ que substituint la segona a la primera obtenim:

$$m_{n+1}(x,y) = \int\limits_X m_n(y,z)m_1(z,x)dz.$$

Amb aquesta relació de recurrència i sabent que en ser $m_1(x,y)$ i $m_n(x,y)$ uniformement contínues existeixen constants C_1 i C_n tals que $m_1(x,y) \geq C_1$ i $m_n(x,y) \geq C_n \;\; \forall x,y \in X$ tenim que:

$$m_{n+1}(x,y) = \int\limits_X m_n(y,z)m_1(z,x)dz \leq \int\limits_X C_1C_ndz = C_1C_n\int\limits_X dz,$$

que en ser X un interval finit podem dir que existeix una constant $C_{n+1} = C_1C_n\int\limits_X dz \leq 0$ tal que $\forall x,y \; m_{n+1}(x,y) \geq C_{n+1}$. $\square$

Tenim doncs $m_n(x,y)$ uniformement continua $\forall n$, $m_4(x,y)$ fitada i a més a més, en ser X finit M és fitada. Aleshores podem utilitzar el teorema 2.9.1 amb $n_0 = 4$ i afirmar que existeix una única funció pròpia μ de M uniformement positiva (on no farem distinció entre dreta i esquerra en ser R simètric) per un valor propi màxim i positiu ρ. Amb aquest resultat tindrem que:

$$\rho\mu(x) = \int_X m_1(x,y)\mu(y)dy = \int_X \mu(y)m_1(x,y)dy.$$

Notació: si és necessari indicar el valor d'α ho anotarem com $\mu_{(\alpha)}$ i $\rho_{(\alpha)}$.

Amb la igualtat del final del teorema 2.9.1 ($m_n(x,y) = \rho^n\mu(x)v(y)[1+O(\Delta^n)]$, on $0 < \Delta < 1$) agafada per n suficientment grans tenim que:

$$m_n(x,y) \simeq \rho^n\mu(x)v(y).$$

Aleshores, si $f(y)$ és una funció qualsevol fitada, podem calcular ρ integrant la igualtat multiplicada a banda i banda per $f(y)$ de manera que:

$$\int_X m_n(x,y)f(y)dy \simeq \int_X \rho^n\mu(x)\mu(y)f(y)d(y) = \rho^n\mu(x)\int_X \mu(y)dy = \mu(x)\rho^n M,$$

on M és una constant. Si fixem un x i calculem ρ per uns quants n suficientment grans podrem aproximar un valor d'aquest ρ.

Seguidament sabent ρ podem calcular amb facilitat la seva funció propia μ. El càlcul d'aquesta ρ serà d'importància vital a l'hora de fer l'estudi dels possibles escenaris que pot acabar prenent el nostre procés de ramificació de neutrons a mesura que passen les generacions.

Segons el valor de ρ el nostre procés tindrà diferents resultats asimptòtics.

Definició 3.3.2. Direm que el nostre espai X és *subcrític* si $\rho < 1$, *crític* si $\rho = 1$ i *supercrític* si $\rho > 1$.

Teorema 3.3.1. *Si X és un espai fitat i convex, aleshores el valor propi $\rho_{(\alpha)}$ és una funció contínua creixent amb α, que tendeix a 0 a mesura que $\alpha \to 0$ i que tendeix a $f'(1)$ a mesura que $\alpha \to \infty$.*

Tenim una demostració d'aquest teorema per superfícies planes i esferes a l'article [9].

Amb el resultat del teorema veiem doncs que un espai X fitat i convex és sempre subcrític si $f'(1) < 1$ i és sempre supercrític (per α suficientment grans) si $f'(1) > 1$.

Veiem ara el significat de tots tres casos:

- Si $\rho > 1$, les condicions del teorema 2.11.3 es compleixen i per tant, tal com diu el corol·lari 2.11.1, tenim una probabilitat no nul·la que un neutró tingui una família de descendents que creixi indefinidament en el nostre espai X. Un creixement desmesurat com aquest dins un cos X comprès en un espai físic finit acabaria donant lloc a una explosió (bombes atòmiques). Per tant, veiem que com és lògic, una manera de provocar aquestes explosions és injectar en el nostre espai X més neutrons de manera que α augmenti (en disminuir el recorregut lliure mig) i de retruc (segons el teorema 3.3.1) $\rho_{(\alpha)}$. Direm que $\rho_{(\alpha)}$ representa el *factor multiplicatiu per generació.*

- Si $\rho < 1$, segons el teorema 2.11.2 $q(x) = 1$, i per tant, és segur que el nostre procés de ramificació de neutrons acabarà extingint-se.
- Si $\rho = 1$, pel teorema 2.11.2 el procés també acabarà extingint-se però, tot i que les famílies de tots els neutrons són finites, el valor esperat del total de progenitors en totes les generacions és infinit.

3.4 Càlcul numèric dels processos de ramificació de neutrons

És teòricament possible calcular qualsevol probabilitat d'un procés de ramificació general com en el cas dels neutrons, és a dir, es pot calcular a priori la probabilitat que una certa generació enèssima tingui exactament r neutrons. Això és així, ja que, com vàrem veure al capítol anterior, podem calcular les probabilitats de transició del procés gràcies a les FGM i les fórmules de recurrència de les FGM. No obstant això, aquests càlculs acostumen a ser complicats ja que depenem de transformades inverses de Furier o Laplace, per tant de manera general, ens haurem de conformar amb calcular valors esperats a partir de primers moments tal com vàrem veure en el capítol anterior.

Tot i això, hi ha certes probabilitats del procés que si que podrem calcular:

Càlcul de la probabilitat d'extinció q(x) en un espai supercrític: La probabilitat que en un procés supercrític cap neutró tingui una família de descendents que creixi indefinidament pot ser més petita que 1. Aquesta probabilitat és simplement la probabilitat d'extinció $q(x)$ estudiada en el capitol 2. Utilitzant doncs $\Phi_x^{(1)}(s)$ calculat pel procés de ramificació dels neutrons (igualtat (3.3.1)) i el resultat conegut vist en 2.11.4 veiem que:

$$q(x) = 1 - \int_X R(\alpha(y-x))\alpha^3 dy + \int_X R(\alpha(y-x)) f(q(y))\alpha^3 dy$$

així doncs la funció q pot ésser calculada numèricament per aproximacions successives.

Càlcul de la probabilitat del nombre total de neutrons d'una família en un espai crític: Com hem vist, si el nostre espai X és crític ($\rho = 1$), la família de qualsevol neutró s'extingirà amb probabilitat 1, tot i que el valor esperat del nombre total de descendents en totes les generacions serà infinit. En el cas que considerem que els neutrons es moguin seguint un moviment de difusió en lloc del postulat en la secció 3.1, podem dir que la probabilitat de tenir n membres d'una família en totes les generacions, quan el neutró original comença a x, és:

$$P_n(x) = c\mu(x)n^{-\frac{3}{2}} + O(n^{-\frac{5}{2}}), \text{ per } n \to \infty,$$

on $\mu(x)$ és la funció pròpia anomenada anteriorment i c val:

$$c = \sqrt{\frac{f'(1)\int \mu(x)dx}{2\pi f''(1)\int \mu^3(x)dx}}.$$

Aquest resultat es troba l'article [10]

4 Últimes paraules

M'agradaria remarcar que el que he trobat més enriquidor i gratificant del treball és el fet de començar a desenvolupar un tema teòric del qual no en tenia cap coneixement previ. Aquest desenvolupament s'ha fet des de 0, només amb uns pocs coneixements generals de probabilitats i de teoria de la mesura.

Finalment voldria comentar les possibles ampliacions que es podrien fer d'aquest treball, ja sigui per la banda més aplicada com per la banda més teòrica. Per la banda aplicada es podrien simular els processos de ramificacions de neutrons amb l'ús d'un llenguatge de programació com per exemple el R. D'aquesta manera veuríem el desenvolupament d'aquests processos per diferents valors de les seves probabilitats $\{p_r\}$ i α. També es podria seguir ampliant la teòria parlant dels processos de ramificació amb un paràmetre temporal t continu i aplicar-los després a altres casos físics com l'efecte cascada d'electrons en un dispositiu de detecció electrònica.

Referències

[1] L.Royden, H. *Real Analysis*. New York: Collier Macmillan, 1988.

[2] Moyal, J.E. *Stochastic processes and statistical physics*. London: Wiley, 1949.

[3] M.Ross, Sheldon. *Stochastic processes*. New York: Wiley, 1983.

[4] E.Harris, Theodore. *The theory of branching processes*. Berlin: Springer, 1963.

[5] T.W, Mullikin. Limiting distributions for critical multitype branching processes with discrete time. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1963, 469-494.

[6] E.Hardy, G , E.Littlewood, J i G.Pólya. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[7] B.Cooper,Jhon. The Poisson and Exponential Distributions. *Applied Probability Trust* [en línia]. 2005 [consulta 29 de desembre del 2015]. Pàg. 123. Disponible a: `https://physics.ucsd.edu/neurophysics/courses/physics_171/exponential.pdf`.

[8] G.Petrovskii, Ivan. *Lectures on the theory of integral equations*. Rochester(N.Y): Graylock Press, 1957.

[9] T.W, Mullikin. Criticaly estimates for spheres and slabs. *Proceedings of the National Academy of Sciencies, U.S.A*. 1961, 349-351.

[10] A.Sevastyanov, Boris. Branching stochastic processes for particles diffusing in a restricted domain with absorbing boundaries. *Theory of Probability and Its Applications*. 1958, 121-136.

[11] B.Athreya, Krishna i P. E. Ney. *Branching process*. New York: Springer, 1972.

[12] Hawkins, D. i Ulam, Stanislaw. Theory of multiplicative process. *Atomic Energy Commission* [en línia]. 1946 [consulta 2 de gener del 2016]. Disponible a: `http://publishing.cdlib.org/ucpressebooks/view?docId=ft9g50091s&chunk.id=d0e630`

[13] Watson, H.W i Galton, Francis. On the Probability of the Extinction of Familie. *Journal of the Anthropological Institute of Great Britain*, volume 4. 1875, pages 138–144.

[14] Galton, Francis. *Natural Inheriance*. London: Macmillan and Co, 1889.

[15] Teschl, Gerald. *Topics in Real and Functional Analysis*[en línia]. University of Vienna. 2001[consulta 17 de gener del 2016]. Pàg. 182. Disponible a: `http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf`