Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

EL PROCÉS DE RAMIFICACIÓ DE GALTON-WATSON: EL PROBLEMA DE L'EXTINCIÓ DELS COGNOMS

Guillem Tarragó Pascual

Director: Dr. Carles Rovira Escofet
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística
Barcelona, 3 de febrer de 2016

Abstract

From ancient times, people have been worried about the possibility of their lineages and surnames being extinguished. This question affected, above all, to the highest classes. Even though they looked for social and/or biologycal conditions at the beginning, the problem was focused from a statistic perspective during the 18th and 19th centuries.

The main objective of our work is studying the mathematical model behind this question, known as the branching process of Galton-Watson. Once the main results of this theory have been developed, we will be able to calculate the extinction probability of a population or family, though also we will be able to estimate it from a set of empyrical observations.

Resum

Des de l'antiguitat les persones han estat preocupades per la possible desaparició dels seus llinatges i cognoms. Aquesta qüestió afectava sobretot a les famílies de classes socials més elevades. Tot i que al principi se'n van voler buscar els motius en les condicions socials i/o biològiques, en els segles XVIII i XIX es va començar a enfocar aquest problema des d'una vessant estadística i matemàtica.

L'objectiu principal del nostre treball és estudiar el model matemàtic que hi ha darrere d'aquesta qüestió, conegut com el procés de ramificació de Galton-Watson. Un cop desenvolupats els resultats principals d'aquesta teoria podrem calcular la probabilitat d'extinció d'una població o família, o bé estimar-la a partir d'un conjunt d'observacions empíriques.

Índex

1 Introducció

Els processos de ramificació ofereixen un model matemàtic per a l'estudi de poblacions en les que els seus membres es reprodueixen i moren, subjectes a unes lleis de canvi. Els objectes poden ser de molts tipus diferents, depenent de la seva edat, energia, posició, o altres factors. No obstant, han de complir una premissa: no poden interferir els uns amb els altres. És a dir, objectes diferents es reprodueixen independentment l'un de l'altre. Aquesta hipòtesi, que unifica la teoria matemàtica, sembla garantida per a algunes poblacions de partícules físiques, com ara els neutrons o els raigs còsmics, però només sota circumstàncies molt restrictives en el cas de poblacions biològiques.

El procés de ramificació més senzill és el de Galton-Watson, el qual estudiarem en aquesta treball. Té la peculiaritat que cadascun dels objectes que formen part de la població tenen una distribució de probabilitat comuna. Un cop desenvolupada la teoria bàsica d'aquest model matemàtic, l'aplicarem a la resolució del problema de l'extinció dels cognoms.

La memòria està dividida en dues parts. A la primera part farem l'estudi clàssic del procés, per després aplicar-lo a la qüestió original que pretenia resoldre aquesta teoria, calcular la probabilitat d'extinció d'una cognom o del llinatge dels homes d'una família. A la segona part ens centrarem en l'estudi de l'estimació dels paràmetres del procés de Galton-Watson, a partir d'un conjunt d'observacions d'una població.

Abans de començar amb els resultats, però, explicarem com i perquè es va originar aquest problema, per després presentar-ne els principals precursors i pioners.

1.1 L'extinció de famílies

El declivi de les famílies amb homes que havien ocupat posicions destacades en el passat ha estat un tema de freqüent observació, i ha donat lloc a diverses conjectures. Els estudis i treballs sobre aquest problema han estat interessats en l'evidència estadística de l'extinció de famílies, així com en les consideracions sobre els motius de l'extinció. Els casos són molt nombrosos quan es tracta de cognoms que van ser comuns fa un temps i s'han tornat escassos o han desaparegut en la seva totalitat.

A l'antiguitat només es mostrava interès en l'extinció de les classes socials més altes. Al mateix temps es creia que les famílies extingides eren reemplaçades contínuament per famílies dels estrats socials més baixos.

Més tard es va fer evident que el fenomen també ocorria en els altres estrats de la població. En els segles XVIII i XIX això va ser demostrat en pobles i ciutats. Aparentment no es va fer cap investigació de la població rural, però ja en el 1762 el pastor rural danès Westenholtz es va adonar que moltes famílies de pagesos s'extingien. Però, com que vivien "en la foscor", és a dir, sense ser coneguts i sense tenir un cognom, no es notava ni es sentia.

Les raons per a l'extinció de famílies van ser buscades en condicions socials o biològiques, o en combinacions de les dues. La principal de les raons biològiques era la "degeneració", i les raons socials es centraven en l'efecte de les guerres, la solteria i els estils de vida refinats.

No obstant, el problema de l'extinció de famílies té també una vessant matemàtica i estadística. Breument la podem expressar de la forma següent. Si sabem la probabilitat que un home tingui $0, 1, 2, ...$ fills, és possible calcular la probabilitat que la seva família s'extingeixi? Aquesta idea és tant simple que s'ha ocorregut de forma independent a una sèrie d'investigadors. Tot seguit farem una descripció de com s'ha formulat matemàticament el problema en diversos moments de la història, com s'ha oblidat en algunes èpoques i com altres investigadors l'han represès més endavant.

1.2 La història del problema

Els primers indicis sobre l'ús dels processos de ramificació es troben en el segle XVIII, en el famós llibre de tres volums de l'investigador Thomas Malthus (1766-1834), titulat *An Essay on the Principle of Population*. En aquest llibre Malthus va establir la idea fonamental per la qual una població no controlada ha de créixer exponencialment. En les seves pròpies paraules, la població es duplica en intervals regulars, és a dir, augmenta en una proporció geomètrica. Cap al final del primer volum, Malthus relata que, a la ciutat de Berna, d'un total de 487 famílies burgeses existents, 379 es van extingir en un període de dos segles, del 1583 al 1783. Es pot dir que la teoria dels processos de ramificació neix del fet de reconèixer que un descens tan notable no és una estranya coincidència. Al contrari, reflexa una antípoda bàsica i paradoxal al ràpid creixement del total, i també reflexa un principi d'extinció de línies familiars independents freqüent.

El primer en tractar d'explicar el fenomen relatat per Malthus fou l'estadístic francès Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878). Bienaymé va ser capaç de determinar correctament la probabilitat d'extinció d'una família o, en qualsevol cas, la relació entre aquesta probabilitat i el nombre mitjà de descendents mascles per pare. No obstant, Bienaymé no va donar la solució en forma matemàtica, sinó una explicació verbal del seu treball. L'obra anunciada que anava a exposar els seus pensaments mai va ser publicada, fet que va provocar que el seu treball romangués ocult fins l'any 1972, quan Heyde i Seneta van descobrir un article datat del 1845 on Bienaymé considerava el problema de l'extinció de famílies. Així doncs, sembla que Bienaymé havia emprès una investigació completa sobre el problema i ja coneixia la solució que va ser publicada per primer cop l'any 1930 per Steffensen.

El 1869, l'anglès Francis Galton (1822-1911) va publicar el llibre *Hereditary genius*, en el qual tractava l'extinció de diferents grups socials, centrant-se sobretot en el declivi de la noblesa anglesa i d'altres famílies notables del moment. Galton va atribuir-ne l'extinció als motius socials i biològics, que causaven una reducció de la fertilitat. L'aparició del botànic suís Alphonse de Candolle (1806-1893), que va publicar l'any 1873 el llibre *Histoire des sciences et des savants*, va fer girar l'atenció de Galton cap a la possibilitat que hi hagués una interpretació probabilística. En el llibre d'Alphonse de Candolle, el suís va començar un anàlisi de la bibliografia del moment sobre les famílies nobles i burgeses, presentant les dades numèriques disponibles. De Candolle creia que, aparentment, tots els cognoms s'havien d'extingir, però no ho va poder confirmar. No obstant, en el seu treball ja va indicar que havia de ser possible calcular la probabilitat que una família s'extingís si les seves circumstàncies de fertilitat eren conegudes. Ell no va tractar aquest problema en el seu llibre, i la seva formulació del problema descartava un coneixement del treball anterior de Bienaymé.

Abans inclús de la publicació del llibre de de Candolle, Galton ja s'havia adonat de la naturalesa estadística del problema i havia intentat resoldre alguns exemples numèrics, però els càlculs de seguida es van fer complicats i va haver de desistir. Però l'aparició del llibre de de Candolle va provocar que Galton tornés a revisar el problema de l'extinció de famílies. El mateix any 1873, Galton va publicar el següent problema per als lectors de la revista *Educational Times*:

"Problema 4001. Una nació gran, de la qual només ens preocuparem dels mascles adults, que sumen un total de N individus i on cadascun té un cognom diferent, colonitzen un districte. La seva llei de població és tal que, en cada generació, a_0% dels mascles adults no tenen descendents mascles que arribin a la vida adulta, a_1% en tenen només un, i així fins a_5%, pels que en tenen cinc. Trobar (1) quina proporció dels cognoms s'haurà extingit després de r generacions; i (2) quants casos hi haurà del mateix cognom estant retingut per n persones."

Com que no va obtenir cap resposta satisfactòria al seu problema, va consultar un amic matemàtic anglès, el Reverend Henry William Watson (1827-1903). Uns mesos després Watson va publicar la resposta a *Educational Times*. Watson va transformar el problema en un d'iteració de funcions generadores. No obstant, simplement a causa d'un error algebraic, Watson va concloure erròniament que cada família s'extingiria, inclús quan el tamany de la població, en mitjana, augmentava d'una generació a la següent. Ell era molt conscient que la seva resposta estava en desacord amb el principi del creixement exponencial de la població total de Malthus, i va argumentar, subtilment i extensament, que la població total bé podia créixer tot i que cada cognom específic es pogués perdre eventualment.

Al cap de dos anys, el 1875, Galton i Watson van publicar un article conjunt titulat *On the probability of extinction of families*, amb el problema plantejat per Galton i la resolució per part de Watson.

Durant mig segle després aproximadament, el model matemàtic de Galton-Watson semblava haver estat descuidat. Però el 1922, el científic, matemàtic i estadístic Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) va mencionar el tema de passada en un context genètic. Fisher va usar un model matemàtic idèntic al de Galton-Watson per estudiar la supervivència de la descendència d'un gen mutant i per estudiar variacions aleatòries en les freqüències dels gens. Cinc anys després, John Burdon Sanderson Haldane (1892-1964) va aplicar igualment el model a la genètica. Haldane va ser capaç d'esbossar la resposta correcta al problema, ja que va trobar que la probabilitat d'extinció era 1 quan la reproducció mitjana era més petita o igual que 1.

Va ser un matemàtic, estadístic i actuari danès, Johan Frederik Steffensen (1873-

1961), el primer a publicar, l'any 1930, un anàlisi complet i correcte de la probabilitat d'extinció del procés de Galton-Watson. Steffensen va provar que la tant desitjada probabilitat d'extinció d'una família depèn del nombre mitjà de descendents per individu, i també va justificar com calcular-la. I ho va fer responent a un repte per part del matemàtic i estadístic Agner Krarup Erlang (1878-1929), que va publicar el problema per a ser solucionat en el seu llibre *Matematik Tidskrift*. Erlang no era conscient de les notes angleses sobre el tema, però estava interessat en el problema per motius personals, ja que la seva mare pertanyia a una família danesa molt coneguda que havia desaparegut.

El problema també va ser tractat per Andrei Nikolàievitx Kolmogórov (1903-1987), que el 1938 va determinar la forma asimptòtica de la probabilitat que la família seguís existint després d'un gran nombre finit de generacions.

D'altra banda, ja en el 1875 Galton i Watson havien manifestat que un progrés més gran en aquest problema seria impossible fins que no hi haguessin dades estadístiques sobre la probabilitat que un home tingués $0, 1, 2, \ldots$ fills. Doncs bé, només 56 anys després, els resultats d'un còmput basat en dades empíriques fou publicat pel matemàtic i estadístic americà Alfred James Lotka (1880-1949). Lotka va dur a terme la idea de Galton usant dades de fertilitat americanes per a determinar la probabilitat d'extinció de la població blanca americana de l'any 1920, restringint-se únicament als individus varons.

A més, les aplicacions dels processos de ramificació a problemes del món real requereixen estimacions dels seus paràmetres. En conseqüència, l'estadística de la ramificació s'ha estat desenvolupant durant les últimes 3 dècades.

Actualment, la teoria matemàtica que va ser desenvolupada a partir de la base de la solució de Watson al problema de Galton sobre l'extinció dels cognoms es coneix com el procés de ramificació de Galton-Watson.

Després d'aquesta introducció històrica ja podem centrar-nos en l'anàlisi del procés.

2 El procés de ramificació de Galton-Watson

En aquest capítol estudiarem el procés de ramificació de Galton-Watson, amb temps i espai d'estats discrets (els naturals junt amb el 0). Donarem una definició formal del procés, junt amb les seves hipòtesis bàsiques, i ens ajudarem de molts resultats teòrics sobre les funcions generadores de probabilitats que aplicarem al nostre problema. Això ens portarà a trobar la funció generadora del nostre procés, junt amb unes expressions per la seva mitjana i variància, per finalment calcular-ne la probabilitat d'extinció. Un cop vistos tots els resultats del procés, comentarem l'exemple més destacat del procés, el cas lineal fraccionari. Aquest va ser usat per Lotka per a determinar, per primera vegada, la probabilitat d'extinció d'una població a partir de dades empíriques. També veurem un seguit de resultats sobre el comportament asimptòtic del procés.

En general, la nostra línia de treball de l'estudi del procés estarà basada en els llibres de Harris [8], Jagers[10] i Athreya-Ney[3].

2.1 Definició del procés de Galton-Watson

Imaginem-nos objectes o individus que poden generar nous objectes o individus del mateix tipus. Un conjunt inicial d'objectes, que anomenem la generació 0, tenen descendents que conformen la primera generació; els descendents d'aquesta donen lloc a la segona generació, i així successivament. Per exemplificar aquesta situació podem pensar en bacteris, persones, gens, neutrons en una reacció en cadena, entre d'altres.

El model matemàtic més simple per modelar aquesta situació és el model de Galton-Watson.

En primer lloc, només fem un seguiment de les mides de les successives generacions. No registrem els moments (en el temps) en els quals cada individu neix, ni tampoc les seves relacions familiars individuals.

Així, denotem per $Z_0, Z_1, Z_2, ...$ el nombre d'individus a la generació zero, primera generació, segona generació,... A més, es consideren les tres hipòtesis següents:

(i) Si coneixem la mida de la generació n-èssima, aleshores la llei de probabilitat que governa les generacions posteriors no depèn de les mides de les generacions que precedeixen a la n-èssima. En altres paraules, $Z_0, Z_1, Z_2, ...$ formen una cadena de Markov.

(ii) Aquestes cadenes de Markov tenen una propietat especial, que consisteix en assumir que individus diferents no interfereixin l'un amb l'altre. És a dir, el nombre de descendents d'un individu no depèn de la quantitat d'altres individus presents, i les famílies de cada progenitor es desenvolupen independentment les unes de les altres.

(iii) La funció de probabilitat de la descendència és la mateixa per a cada individu, és a dir, tots els descendents de totes les generacions tenen una distribució de probabilitat comuna.

2.1.1 Definició formal

Definició 2.1.1. *Sigui $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ un procés estocàstic en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, on $Z_0, Z_1, Z_2, ...$ és una seqüència de variables aleatòries que prenen valors enters no negatius, definida recursivament per*

$$Z_0 = N \in \mathbb{Z}^+ \quad i, \quad per\ n \geq 1, Z_{n+1} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{Z_n} X_{ni} & si\ Z_n > 0, \\ 0 & si\ Z_n = 0, \end{cases}$$

on $\{X_{ni} : n, i \in \{0,1,2,3,...\}\}$ és una família de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes que prenen valors enters $k \geq 0$ i tenen una distribució de probabilitat comuna $\{p_k\}_{k\geq 0}$, independent de Z_0, on $p_k = P(X_{ni} = k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. X_{ni} representa el nombre de descendents que té l'individu i de la generació n, Z_n representa el nombre d'individus que hi ha a la generació n-èssima i p_k és la probabilitat que un individu de qualsevol generació tingui k fills, que pertanyeran a la generació següent. Sota aquestes condicions, el procés estocàstic a temps discret $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ s'anomena un procés de ramificació de Galton-Watson amb una distribució de la descendència $\{p_k\}_{k\geq 0}$ i Z_0 progenitors.

De la definició és obvi que el procés $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ és una cadena de Markov, és a dir,

$$P(Z_{n+1} = j_{n+1} | Z_0 = j_0, Z_1 = j_1, Z_2 = j_2, ..., Z_n = j_n) = P(Z_{n+1} = j_{n+1} | Z_n = j_n).$$

En particular, és una cadena de Markov on el 0 és un estat absorbent, ja que si $Z_n = 0$ aleshores $Z_m = 0\ \forall m \geq n$ amb probabilitat 1. En aquest cas diem que el procés ha mort o s'ha extingit.

Si denotem per $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, ..., Z_n)$ la σ-àlgebra generada per $Z_0, Z_1, ..., Z_n$, aleshores, per la definició de Z_n,

$$P(Z_{n+1} = k | \mathcal{F}_n) = P\left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{ni} = k | Z_n\right).$$

D'aquesta manera $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ és una cadena de Markov homogènia amb probabilitats de transició

$$p_{ij} = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i), \quad i, j, n \geq 0.$$

Per tant la matriu de transició ve donada per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Hipòtesis bàsiques

A menys que establim el contrari, sempre assumirem les 3 hipòtesis següents:

(a) Hem definit que $Z_0 = N \in \mathbb{Z}^+$, però sempre suposarem que $Z_0 = 1$ a menys que establim el contrari. De l'assumpció que els diferents individus no interfereixen l'un amb l'altre (ho hem comentat a la hipòtesi (ii)), és ben clar que el procés de Galton-Watson amb N progenitors es comporta com la suma de N processos de Galton-Watson independents, tots començant amb un progenitor.

(b) Prendrem $p_k < 1 \; \forall k \in \{0, 1, 2, ...\}$, $p_0 > 0$ i $p_0 + p_1 < 1$.

(c) El valor esperat $E(Z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$ ha de ser finit. Com que $Z_0 = 1$, notem que $Z_1 = X_{01}$ i, per tant, Z_1 té la mateixa distribució de probabilitat $\{p_k\}_{k\geq 0}$ que X_{01}.

2.2 La funció generadora de probabilitat i els moments del nombre d'individus a la n-èssima generació

L'eina principal que tenim per estudiar els processos de Galton-Watson és la funció generadora de probabilitat. Primer en farem un estudi general, per després aplicar-ho al nostre procés de Galton-Watson $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, amb l'objectiu d'obtenir la funció generadora de Z_n, així com les expressions de la seva mitjana i variància.

2.2.1 La funció generadora de probabilitat

Definició 2.2.1. *Considerem una variable aleatòria X que pren valors en el conjunt $\{0, 1, 2, ...\}$. Aleshores, la funció generadora de probabilitat de X ve donada per*

$$f_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k),$$

definida per a valors complexos de s tals que $|s| \leq 1$, tot i que normalment considerarem que $s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Si X té la distribució de probabilitat $\{p_k\}_{k\geq 0}$ del nombre de descendents del procés de Galton-Watson escriurem $f(s)$ en lloc de $f_X(s)$. En aquest cas,

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Observació. *La funció generadora de probabilitat (f.g.p.) és una sèrie de potències en s. Com que, per $|s| \leq 1$,*

$$|f(s)| = |\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s^k p_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |s^k| p_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

i, per $|s| = 1$,

$$|f(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

aleshores la sèrie de potències és absolutament convergent per $|s| \leq 1$*. Això implica que la sèrie de* $f(s)$ *convergeix per tot valor complex* s *tal que* $|s| \leq 1$ *i, per tant,* $f(s)$ *és una funció analítica per* $|s| < 1$*.*

Normalment considerarem la funció $f_X(S)$ *a l'interval real* $[0, 1]$*, on presenta un bon comportament* $\forall s < 1$*. No obstant, si* X *no està acotada, aleshores* $f_X(s)$ *podria fallar en el fet de ser analítica, o inclús diferenciable en els reals, a* $s = 1$*.*

Proposició 2.2.1. *(Propietats de la f.g.p.). Sigui* X *una variable aleatòria discreta que pren valors en els enters no negatius, amb f.g.p.* $f_X(s)$*.*

1. $f_X(s)$ *i totes les seves derivades existeixen i són no negatives en* $[0, 1)$*.*
2. *Si l'n-èssim moment factorial de* X *existeix llavors*

$$\lim_{s \nearrow 1} \frac{d^n}{ds^n} f_X(s) = E(X(X-1)\ldots(X-n+1)).$$

3. $f_X(s)$ *és contínua, creixent i convexa a* $[0, 1]$*.*
4. $f_X(0) = P(X = 0)$ *i* $f_X(1) = 1$*.*
5. $E(X) = f'_X(1)$*, o* $+\infty$ *si* $f'_X(1)$ *no existeix.*
6. $Var(X) = f''_X(1) + f'_X(1) - (f'_X(1))^2$*, o* $+\infty$ *si* $f''_X(1)$ *no existeix.*

<u>Demostració:</u>

1. Del fet que $f_X(s)$ és analítica per $|s| < 1$, totes les derivades estan definides per una sèrie de potències

$$f_X^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)s^{k-n}P(X = k),$$

amb tots els termes no negatius quan $s \in [0, 1)$.

2. Com que les sèries de potències es poden derivar terme a terme conservant el mateix radi de convergència, es té que

$$f'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} ks^{k-1}P(X = k) \Rightarrow \lim_{s \nearrow 1} f'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k).$$

Com que per hipòtesi l'esperança existeix, aleshores

$$\lim_{s \nearrow 1} f'_X(s) = E(X).$$

Si tornem a derivar,

$$f''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(X=k) \Rightarrow \lim_{s\nearrow 1} f'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X=k).$$

Com que per hipòtesi el moment de segon ordre existeix, llavors

$$\lim_{s\nearrow 1} f'_X(s) = E(X(X-1)).$$

Anàlogament, si derivem un total de n cops,

$$f_X^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)s^{k-n}P(X=k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{s\nearrow 1} f_X^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)P(X=k).$$

Com que per hipòtesi el moment d'ordre n existeix, llavors

$$\lim_{s\nearrow 1} f_X^{(n)}(s) = E(X(X-1)\dots(X-n+1)).$$

3. Per la propietat 1, $f_X(s)$ és contínua en $[0,1)$. Pel Teorema de convergència monòtona,
$$f_X(s) = E(s^X) \xrightarrow{s\to 1^-} E(1^X) = f(1),$$
de manera que $f_X(s)$ és contínua a $s=1$. La monotonia i la convexitat queden provades ja que, per 1, $f'_X(s), f''_X(s) \geq 0$ en $[0,1)$.

4. $\quad f_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k p_k = P(X=0) \quad$ i $\quad f_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k p_k = 1.$

5. Pel Teorema de convergència monòtona,
$$f'_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} ks^{k-1}P(X=k) = E(Xs^{X-1}) \xrightarrow{s\to 1^-} E(X).$$
D'aquesta manera, $E(X) = f'_X(1)$, o $E(X) = +\infty$ si $f'_X(1)$ no existeix.

6. Pel Teorema de convergència monòtona,
$$f''_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P(X=k) = E(X(X-1)s^{X-2}) \xrightarrow{s\to 1^-} E(X(X-1)).$$
Així, $E(X(X-1)) = f''_X(1)$, o $+\infty$ si $f''_X(1)$ no existeix. Per tant,
$$Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2 = f''_X(1)+f'_X(1)-(f'_X(1))^2,$$
si $f''_X(1)$ existeix, o $Var(X) = +\infty$, en cas contrari. $\square$

Lema 2.2.1. *Siguin $X_1, X_2, ..., X_y$ variables aleatòries independents, que prenen valors en $\{0, 1, 2, ...\}$, amb funcions generadores de probabilitat respectives $f_{X_1}(s), f_{X_2}(s), ..., f_{X_y}(s)$. Aleshores,*

$$f_{X_1+X_2+...+X_y}(s) = f_{X_1}(s)f_{X_2}(s)...f_{X_y}(s).$$

En particular, si a més de ser independents les variables aleatòries $X_1, X_2, ..., X_y$ són idènticament distribuïdes amb f.g.p. $f_X(s)$, aleshores

$$f_{X_1+X_2+...+X_y}(s) = (f_X(s))^y.$$

<u>*Demostració:*</u>

Siguin $X_1, X_2, ..., X_y$ variables aleatòries independents, que prenen valors en $\{0, 1, 2, ...\}$, amb funcions generadores de probabilitat respectives $f_{X_1}(s), f_{X_2}(s), ..., f_{X_y}(s)$. Llavors,

$$f_{X_1+X_2+...+X_y}(s) = E(s^{X_1+X_2+...+X_y}) = E(s^{X_1}s^{X_2}\dots s^{X_y}) = E(s^{X_1})E(s^{X_2})\dots E(s^{X_y}) =$$

$$= f_{X_1}(s)f_{X_2}(s)\dots f_{X_y}(s).$$

Així, si les variables aleatòries $X_1, X_2, ..., X_y$ són idènticament distribuïdes amb f.g.p. $f_X(s)$,

$$f_{X_1+X_2+...+X_y}(s) = f_{X_1}(s)f_{X_2}(s)\dots f_{X_y}(s) = (f_X(s))^y.$$

□

Ara suposem que y no és un nombre fixat, sinó una variable aleatòria Y. Aleshores tenim el resultat següent.

Lema 2.2.2. *Siguin $Y, X_1, X_2, ...,$ variables aleatòries independents que prenen valors en $\{0, 1, 2, ...\}$. Assumim que les variables $X_1, X_2, ...,$ estan idènticament distribuïdes amb funció generadora de probabilitat $f_X(s)$, esperança $E(X)$ i variància $Var(X)$. Considerem també que Y té f.g.p. $f_Y(s)$. Aleshores, si $Z = \sum_{j=1}^{Y} X_j$ (si $Y = 0$ llavors $Z = 0$),*

$$f_Z(s) = f_Y(f_X(s)).$$

A més,

$$E(Z) = E(X)E(Y) \quad i \quad Var(Z) = Var(X)E(Y) + (E(X))^2Var(Y),$$

on les dues últimes igualtats es conserven en el sentit que si una banda és finita llavors l'altra també ho és i són iguals.

<u>*Demostració:*</u>

Usant el Teorema de probabilitats totals, podem escriure

$$P(Z = k) = \sum_{y=0}^{\infty} P(Z = k|Y = y)P(Y = y).$$

D'altra banda, si $Y = y$ és una constant, pel lema 2.2.1 tenim que

$$f_Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z = k|Y = y)s^k = (f_X(s))^y.$$

Així, usant aquestes dues consideracions resulta

$$f_Z(s) = E(s^Z) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} s^k P(Z = k|Y = y)P(Y = y) =$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y) \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z = k|Y = y) = \sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y)(f_X(s))^y = f_Y(f_X(s)).$$

Ens falta provar les expressions per l'esperança i la variància de Z. Les demostrarem diferenciant l'expressió que ja hem provat i avaluant-la en $s = 1$.

$$f_Z(s) = f_Y(f_X(s)) \Rightarrow f'_Z(s) = f'_Y(f_X(s))f'_X(s) \Rightarrow f'_Z(1) = f'_Y(f_X(1))f'_X(1).$$

Sabem que

$$f_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X = x) \Rightarrow f_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1 \Rightarrow f'_Y(f_X(1)) = f'_Y(1).$$

Ara, per la propietat 5 de la proposició (2.2.1) tenim que

$$f'_Z(1) = E(Z), \quad f'_Y(1) = E(Y) \quad i \quad f'_X(1) = E(X) \quad i,$$

per tant,

$$E(Z) = E(Y)E(X).$$

Ens falta provar l'expressió de $Var(Z)$.
Tornant a derivar l'expressió $f'_Z(s) = f'_Y(f_X(s))f'_X(s)$ i avaluant en $s = 1$ obtenim

$$f''_Z(s) = f''_Y(f_X(s))(f'_X(s))^2 + f'_Y(f_X(s))f''_X(s) \Rightarrow f''_Z(1) = f''_Y(1)(E(X))^2 + E(Y)f''_X(s).$$

Ara, per la propietat 6 de la proposició (1.2.1) tenim que

$$f''_Z(1) = E(Z(Z-1)), \quad f''_Y(1) = E(Y(Y-1)) \quad i \quad f''_X(1) = E(X(X-1)).$$

Per tant,

$$E(Z^2) - E(Z) = (E(Y^2) - E(Y))(E(X))^2 + E(Y)(E(X^2) - E(X)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(Z^2) - E(Z) = E(Y)(E(X^2) - (E(X))^2) + E(Y^2)(E(X))^2 - E(Y)E(X)$$

Usant que $E(Z) = E(Y)E(X)$, resulta

$$E(Z^2) = E(Y)Var(X) + E(Y^2)(E(X))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(Z^2) - (E(Z))^2 = E(Y)Var(X) + E(Y^2)(E(X))^2 - (E(Y)E(X))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Var(Z) = E(Y)Var(X) + (E(X))^2(E(Y^2) - E(Y))^2 =$$

$$= E(Y)Var(X) + (E(X))^2 Var(Y).$$

□

2.2.2 La funció generadora de probabilitat i els moments de Z_n

Ara apliquem la idea de les funcions generadores al nostre procés de Galton-Watson $\{Z_n\}_{n\geq 0}$.

Com que les variables aleatòries $\{X_{ni} : n, i \in \{0, 1, 2, 3, ...\}\}$ tenen la distribució de probabilitat comuna $\{p_k\}_{k\geq 0}$, podem escriure la seva funció generadora com

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

D'altra banda, si $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, denotem per $f_n(s)$ la funció generadora de Z_n, aleshores

$$f_n(s) = f_{Z_n}(s) = E(s^{Z_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_n = k), \quad on \quad s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Com que per hipòtesi tenim que $P(Z_0 = 1) = 1$, aleshores

$$f_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_0 = k) = s.$$

Notant que la variable aleatòria Z_1 es distribueix igual que la variable aleatòria X_{01}, observem que

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Z_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X_{01} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = f(s).$$

A partir d'aquestes dues observacions, podem intuir que la funció generatiu de Z_n és la composició de la funció generadora $f(s)$ n vegades. Efectivament, això és ben cert. Abans de provar-ho, però, hem de definir dos conceptes que ens seran útils en la caracterització dels moments de Z_n.

Definició 2.2.2. *Anomenarem reproducció mitjana (nombre mitjà de descendents per individu) a*

$$m = E(Z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = f'(1).$$

És a dir, m denota el nombre esperat de fills per individu. Recordem que, per la tercera hipòtesi bàsica del nostre model de Galton-Watson, m és finita. En conseqüència, si $f''(1)$ és finita podem definir la variància de reproducció com

$$\sigma^2 = Var(Z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - m^2 = E(Z_1^2) - m^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2.$$

Observació. *Com que* m *és el nombre mitjà de fills per individu i les variables aleatories* X_{ni} *són idènticament distribuïdes, és obvi que* $E(X_{ni}) = m$, $\forall n, i \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Per tant, directament de la definició del procés de Galton-Watson i usant que les variables X_{ni} *són independents i idènticament distribuïdes, tenim que*

$$E(Z_{n+1}|Z_n = k) = E\left(\sum_{i=1}^{Z_n} X_{ni}|Z_n = k\right) = E(X_{n1} + ... + X_{nk}) = km = mZ_n.$$

Observació. *Notem que, per* $n = 0$, $P(Z_0 = 1) = 1 \Rightarrow E(Z_0) = 1$. *A més,* $Var(Z_0) = 0$.

Així, ja estem en condicions de donar la funció generadora de probabilitat de Z_n, junt amb la seva mitjana i variància.

Teorema 2.2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *la funció generadora de* Z_n *és la composició de la funció* f n *vegades, és a dir,*

$$f_n = f \circ \ldots \circ f.$$

A més, la seva mitjana és $E(Z_n) = m^n$ *i, si a més,* σ^2 *és finita, la variància de* Z_n *és*

$$Var(Z_n) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1}, & si\ m \neq 1, \\ n\sigma^2, & si\ m = 1, \end{cases}$$

<u>*Demostració:*</u>

Les variables aleatòries $\{X_{ni} : n, i \in \{0, 1, 2, 3, ...\}\}$ són independents idènticament distribuïdes amb f.g.p. f i independents de Z_{n-1}. A més, $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{ni}$. En aquestes condicions podem aplicar el lema 2.2.2 al nostre procés de Galton-Watson $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, obtenint que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $f_n = f_{n-1} \circ f = \ldots = f \circ f_{n-1}$. Partint d'aquesta igualtat, i tenint en compte que $f_1 = f$, per recursivitat tenim que $f_n = f_{n-1} \circ f = f \circ \ldots \circ f$.

- $E(Z_n) = mE(Z_{n-1})$. Com que aquesta igualtat és certa $\forall n \in \mathbb{N}$ i, a més, $m = E(Z_1)$,

$$E(Z_n) = mE(Z_{n-1}) = m^2 E(Z_{n-2}) = \ldots = m^{n-1} E(Z_1) = m^n.$$

- Si σ^2 és finita, $Var(Z_n) = \sigma^2 E(Z_{n-1}) + m^2 Var(Z_{n-1})$. Com que $E(Z_n) = m^n$, aleshores

$$Var(Z_n) = \sigma^2 m^{n-1} + m^2 Var(Z_{n-1}).$$

  A partir d'aquí, distingim dos casos.

1. Si $m=1$, llavors $Var(Z_n)=\sigma^2+Var(Z_{n-1})$. Com que $Var(Z_0)=0$, aleshores

   $$Var(Z_n)=\sigma^2+Var(Z_{n-1})=2\sigma^2+Var(Z_{n-2})=\ldots=n\sigma^2+Var(Z_0)=n\sigma^2.$$

2. Si $m\neq 1$, usant que $Var(Z_n)=\sigma^2 m^{n-1}+m^2Var(Z_{n-1})$ i pel mètode d'inducció provarem que $Var(Z_n)=\dfrac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{m-1}$.
   Cas inicial: $n=1$. $Var(Z_1)=\dfrac{\sigma^2 m^0(m-1)}{m-1}=\sigma^2$.
   Suposem que es compleix la fórmula de la variància per Z_{n-1}. Volem comprovar que la fórmula es compleix per Z_n, partint del fet que

   $$Var(Z_{n-1})=\frac{\sigma^2 m^{n-2}(m^{n-1}-1)}{m-1}.$$

   $$Var(Z_n)=\sigma^2 m^{n-1}+m^2Var(Z_{n-1})=\sigma^2 m^{n-1}+m^2\frac{\sigma^2 m^{n-2}(m^{n-1}-1)}{m-1}=$$

   $$=\frac{\sigma^2 m^{n-1}(m-1)}{m-1}+\frac{\sigma^2 m^{n}(m^{n-1}-1)}{m-1}=\frac{-\sigma^2 m^{n-1}+\sigma^2 m^n m^{n-1}}{m-1}=$$
   $$=\frac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n-1)}{m-1},$$

   com volíem veure.

□

Aquest teorema és de gran rellevància en l'estudi del procés, ja que ens permet calcular la funció generadora de Z_n (i per tant la distribució de probabilitat de Z_n) de forma rutinària, computant simplement els iterats de f. No obstant, rarament podrem trobar l'n-èssim iterat en una forma explícita senzilla.

2.3 La probabilitat d'extinció

Ara considerem el problema que va plantejar originalment Galton: trobar la probabilitat d'extinció d'una família (equivalentment, trobar la probabilitat d'extinció d'un cognom). Abans, però, hem de definir què entenem per extinció i per probabilitat d'extinció.

Definició 2.3.1. *Es coneix com extinció del procés* $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ *a l'esdeveniment*

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{Z_k=0\}=\{Z_n\to 0\}.$$

A més, com que $P(Z_{n+1}=0|Z_n=0)=1$ *(ja que el* 0 *és un estat absorbent), tenim que*

$$P(Q) = P(Z_n \to 0) = P(Z_n = 0 \text{ per algun } n) = P[(Z_1 = 0) \cup (Z_2 = 0) \cup \ldots] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P[(Z_1 = 0) \cup \ldots \cup (Z_n = 0)] = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0).$$

Escriurem $q = P(Q)$ per la probabilitat d'extinció. És a dir,

$$q = P(Q) = P(Z_n \to 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0).$$

És obvi que $f_n(0)$ és una funció no decreixent respecte n. Això és degut al fet que el 0 és un estat absorbent, de manera que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, $\forall n \geq 1$. De fet,

$$0 = f_0(0) \leq f_1(0) \leq f_2(0) \leq \ldots \leq q = \lim_{n\to\infty} f_n(0).$$

Observació. *Recordem que una de les hipòtesis bàsiques del nostre model de Galton-Watson és que $p_k < 1$ $\forall k \in \{0, 1, 2, ...\}$, $p_0 > 0$ i $p_0 + p_1 < 1$. Hem assumit aquesta hipòtesi ja que, en vas contrari, comporta implicacions trivials.*

- *Si $p_0 = 1$, és obvi que $q = 1$, ja que $Z_1 = 0$.*
- *Si $p_0 = 0$, llavors $q = 0$, ja que cada individu sempre tindrà descendència.*
- *Si $\exists k \geq 1$ tal que $p_k = 1$, aleshores $q = 0$, ja que cada individu sempre tindrà k fills.*
- *Si $p_0 + p_1 = 1$, llavors $q = 1$.*

Un cop fet aquest apunt ja podem passar a caracteritzar la probabilitat d'extinció del sistema en funció del valor de la reproducció mitjana m. Abans, però, enunciem i demostrem el següent lema, que ens farà falta a la demostració del teorema posterior.

Lema 2.3.1. *Si $p_0 + p_1 < 1$ aleshores la funció generadora de probabilitat f és estrictament convexa a l'interval unitat.*

<u>*Demostració:*</u>

Sigui f la funció generadora de probabilitat de les variables X_{ni},

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \ldots$$

Observem que

$$f'(s) = p_1 + 2p_2 s + 3p_3 s^2 + \ldots \quad i \quad f''(s) = 2p_2 + 6p_3 s + \ldots$$

Com que $p_0 + p_1 < 1$ i $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, aleshores alguna de les probabilitats $p_2, p_3, \ldots$ ha de ser estrictament positiva i, per tant, $f''(s) > 0$ a l'interval unitat. □

Teorema 2.3.1. *Si $m \leq 1$, la probabilitat d'extinció q val 1. Si $m > 1$, la probabilitat d'extinció és la única solució no negativa menor que 1 de l'equació $f(s) = s$.*

A la Figura 1 podem veure la representació gràfica d'aquest teorema.

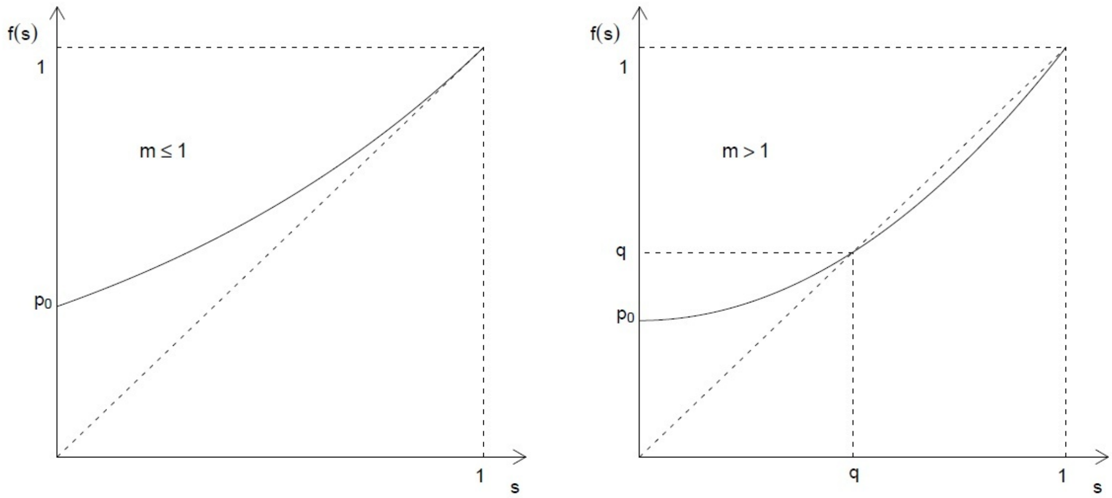


Figura 1: Funció generadora de probabilitat i probabilitat d'extinció.

Demostració:

Comencem veient que q és una solució de l'equació $f(s) = s$.

Com que $f_{n+1} = f \circ f_n$ $\forall n \geq 1$, $f_n(0) \uparrow q$, i f és contínua en $[0,1]$, aleshores

$$f(q) \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} f \circ f_n(0) = f_{n+1}(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q.$$

Així, $f(q) = q$, amb $0 \leq s \leq 1$.

Ara hem de comprovar que q és la menor solució de $f(s) = s$ en $[0,1]$.

Sigui $a \in [0,1]$ un nombre real arbitrari tal que $f(a) = a$. Usant la monotonia de totes les f_n en $[0,1]$, obtenim que, $\forall n \geq 1$,

$$a = f(a) = f_n(a) \geq f_n(0).$$

En conseqüència,

$$a \geq \lim_{n\to\infty} f_n(0) = q.$$

D'aquesta manera, hem provat que q és, en efecte, el punt fix més petit de f en $[0,1]$.

Per acabar la demostració, ens falta distingir entre els casos on $m \leq 1$ o $m > 1$.

- Si $m \leq 1$, llavors, $\forall s \in [0,1)$,

  $$(f(s) - s)' = f'(s) - 1 < f'(1) - 1 = m - 1 \leq 0.$$

  Així, $f(s) - s$ decreix estrictament. Com que $f(1) = 1$ es segueix que, $\forall s \in [0,1)$, $f(s) > s$. Per tant, en aquest cas $q = 1$.

- D'altra banda, si $m > 1$, considerem la funció $g(s) = f(s) - s$, amb $s \in [0,1]$. Tenim que $g'(s) = f'(s) - 1$ i, per tant, g' és contínua. A més, $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 > 0$, és a dir, $g'(1)$ és estrictament creixent. Com que

$g(1) = f(1) - 1 = 0$, $\exists s_0 < 1$ tal que $g(s_0) < 0$. D'altra banda, $g(0) = f(0) - 0 = p_0 > 0$. Així, podem aplicar el Teorema de Bolzano, que ens assegura que hi haurà almenys una solució de $g(s) = 0$ en $[0, 1)$.

Per últim, ens falta veure que aquesta solució és única. Considerem que hi hagués dues solucions s_1 i s_2 de $f(s) = s$, és a dir, $f(s_1) = s_1$ i $f(s_2) = s_2$, amb $0 \leq s_1 < s_2 < 1$. Aleshores, tindríem que $g(s_1) = g(s_2) = g(1) = 0$. Pel Teorema de Rolle, haurien d'existir $a, b \in (0, 1)$, amb $s_1 < a < s_2 < b < 1$ tals que $g'(a) = g'(b) = 0$, de manera que $f'(a) = f'(b)$. Aquesta última igualtat contradiria el fet que f és estrictament convexa en [0,1]. En conseqüència, q és l'únic punt fix de f en [0,1). $\square$

Combinant aquest teorema amb els resultats de la secció anterior, observem que tot i que $Z_n \to 0$ quan $m = 1$, $Var(Z_n) \to \infty$, indicant una inestabilitat substancial. En conseqüència, tenim una bona raó per diferenciar entre tres tipus de processos de Galton-Watson segons el valor de la reproducció mitjana m.

- Si $m < 1$, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ serà un procés de Galton-Watson subcrític.
- Si $m = 1$, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ serà un procés de Galton-Watson crític.
- Si $m > 1$, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ serà un procés de Galton-Watson supercrític.

A l'apartat 2.6 veurem alguns resultats asimptòtics per cadascun dels tres casos que acabem d'esmentar.

Observació. *Abans de seguir notem que per* $0 \leq s \leq q$, $f_n(0) \leq f_n(s) \leq f_n(q) = q$. *Com que* $f(s) \geq s$ *quan* $0 \leq s \leq q$, *per inducció tenim que* $f_{n+1} \geq f_n$ *en* $[0, q]$. *Així,* $f_n(s) \uparrow q$. *De forma similar,* $f_{n+1} < f_n$ *en* $(q, 1)$, *mostrant que, per* $q \leq s < 1$, $f_n(s) \downarrow$ *cap a algun nombre estrictament més petit que* 1. *Com que aquest nombre ha de ser solució de* $f(s) = s$, *realment* $f_n(s) \downarrow q$ *per* $q \leq s < 1$. *D'aquesta manera,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = q, \quad 0 \leq s < 1.$$

Així, observem que tenim dues maneres de calcular la probabilitat d'extinció d'un procés de Galton-Watson. La primera consisteix en iterar infinites vegades la funció generadora de probabilitat f_n de Z_n avaluada en qualsevol valor $s \in [0, 1)$, mentre que l'altre opció és calcular la solució més petita i no negativa $q \leq 1$ de l'equació $f(s) = s$.

2.3.1 Inestabilitat del nombre d'individus a la n-èssima generació

La seqüència $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ o bé va a ∞ o bé a 0. No roman positiva ni afitada sigui quin sigui el valor de m, com ara veurem.

Teorema 2.3.2. *Independentment del valor finit que prengui* $m = E(Z_1)$, *tenim que*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

A més, $Z_n \to \infty$ amb probabilitat $1-q$ i $Z_n \to 0$ amb probabilitat q. És a dir, el procés $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ o bé s'extingeix o bé explota.

Demostració:

En primer lloc hem de provar que cadascun dels estats $k = 1, 2, \ldots$ és transitori. És a dir, si notem com $r_k = P(Z_{n+j} = k \text{ per algun } j \geq 1 | Z_n = k)$, hem de veure que $r_k < 1$ per $k = 1, 2, \ldots$. Per veure-ho hem de distingir dos casos.

- Si $p_0 = 0$, la única possibilitat que permet tornar a l'estat k és que cadascun dels k membres de la generació n tingui exactament un descendent. Per tant, per $k = 1, 2, \ldots$, $r_k = p_1^k < 1$.
- Si $p_0 > 0$, aleshores $r_k \leq P(Z_{n+1} > 0 | Z_n = k) = 1 - P(Z_{n+1} = 0 | Z_n = k) = 1 - p_0^k < 1$.

D'aquesta manera, tenim que

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

i $P(Z_n = k \text{ per un número infinit de valors de } n) = 0$. Com que Z_n no pren el mateix valor positiu infinites vegades, Z_n ha d'anar o bé a 0 o bé a ∞. Per tant, $P(Z_n \to 0) + P(Z_n \to \infty) = 1$, i com que abans ja hem vist que $q = P(Z_n \to 0)$, aleshores $P(Z_n \to \infty) = 1 - q$. $\square$

2.4 Un exemple important. El cas lineal fraccionari

Essencialment només hi ha un exemple no trivial pel qual tots els iterats $f_n(s)$ poden ser calculats de forma explícita. S'anomena cas lineal fraccionari a causa de la forma que pren la seva funció generadora, com ara veurem.

Suposem que les probabilitats $p_1, p_2, \ldots$ formen una sèrie geomètrica. És a dir, considerem

$$p_k = bp^{k-1} \quad \text{per } k \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad p_0 = 1 - \sum_{k\geq 1} p_k = \frac{1-b-p}{1-p},$$

on els paràmetres $b, p \in (0,1)$ són tals que $b + p \leq 1$.

Observem que si $b = p(1-p)$, aleshores tenim la familiar distribució geomètrica amb paràmetre $1-p$.

És fàcil de veure que la funció generadora f de $\{p_k\}_{k\geq 0}$ és de la forma

$$f(s) = \sum_{k\geq 0} s^k p_k = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bs}{1-ps}.$$

A més,

$$m = f'(1) = \frac{b}{(1-p)^2}.$$

Notem que, com a sèrie de potències, f té radi de convergència $\dfrac{1}{p} > 1$, ja que el radi de convergència R de la sèrie $\sum_{k\geq 0} s^k p_k$ ve donat per l'expressió

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{|p_{k+1}|}{|p_k|} = \frac{bp^k}{bp^{k-1}} = p < 1.$$

Com que l'expressió de la funció generadora $f(s)$ encara no és l'apropiada per a calcular-ne els seus iterats $f_n(s)$, procedirem a fer algunes transformacions. Per a valors arbitraris $u, v < \dfrac{1}{p}$, tenim que

$$\frac{f(s)-f(u)}{f(s)-f(v)} = \left(\frac{s-u}{s-v}\right)\left(\frac{1-pv}{1-pu}\right).$$

El que hem de fer a continuació és escollir aquests u i v de forma adequada. Amb aquesta finalitat, denotem per 1 i s_0 els dos possibles punts fixos de f, tenint en compte que poden ser iguals segons el valor de m. De fet, si $m > 1$ aleshores $s_0 = q < 1$; si $m = 1$ llavors $s_0 = 1 = q$; i si $m < 1$ aleshores $s_0 > 1 = q$.

Hem de distingir dos casos, segons si $m = 1$ o $m \neq 1$.

• Suposem primer que $m \neq 1$. Aleshores, si prenem $u = s_0$ i $v = 1$ i els substituïm a l'expressió de $\dfrac{f(s)-f(u)}{f(s)-f(v)}$ obtenim que

$$\frac{f(s)-f(s_0)}{f(s)-f(1)} = \frac{f(s)-s_0}{f(s)-1} = \left(\frac{s-s_0}{s-1}\right)\left(\frac{1-p}{1-ps_0}\right).$$

Així,

$$\frac{1-p}{1-ps_0} = \left(\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}\right)\left(\frac{s-1}{s-s_0}\right) = \left(\frac{f(s)-s_0}{s-s_0}\right)\left(\frac{s-1}{f(s)-1}\right).$$

Aplicant el límit quan s tendeix a 1 a tota la igualtat obtenim que

$$\frac{1-p}{1-ps_0} = \lim_{s\to 1}\left(\frac{f(s)-s_0}{s-s_0}\right)\left(\frac{s-1}{f(s)-1}\right) = \lim_{s\to 1}\left(\frac{f(s)-s_0}{s-s_0}\right)\lim_{s\to 1}\left(\frac{s-1}{f(s)-1}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 1}\frac{1}{f'(s)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{m},$$

on hem hagut d'usar la regla de L'Hôpital en el càlcul del segon límit.

D'aquesta manera, tenim que

$$\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1} = \frac{s-s_0}{m(s-1)}.$$

Iterant aquesta expressió obtenim que

$$\frac{f_n(s)-s_0}{f_n(s)-1}=\frac{s-s_0}{m^n(s-1)} \quad \forall n\geq 1.$$

Si solucionem aquesta expressió per $f_n(s)$,

$$f_n(s)=\frac{s_0-\dfrac{s-s_0}{m^n(s-1)}}{1-\dfrac{s-s_0}{m^n(s-1)}}=\frac{1-\dfrac{s-s_0}{m^n(s-1)}+s_0-1}{1-\dfrac{s-s_0}{m^n(s-1)}}=1-\frac{1-s_0}{1-\dfrac{s-s_0}{m^n(s-1)}}=$$

$$=1-\frac{(1-s_0)m^n(s-1)}{m^n(s-1)-s+s_0}=1+\frac{m^n-s_0}{m^n-s_0}\frac{m^n(1-s_0)(s-1)}{m^n-s_0-s(m^n-1)}=$$

$$=1+\frac{m^n(1-s_0)}{m^n-s_0}\frac{m^n(s-1)-s_0(s-1)}{m^n-s_0-s(m^n-1)}=1+\frac{m^n(1-s_0)}{m^n-s_0}\frac{m^n(s-1)-s_0(s-1)+s-s}{m^n-s_0-s(m^n-1)}=$$

$$=1+\frac{m^n(1-s_0)}{m^n-s_0}\frac{(1-s_0)s-(m^n-m^ns-s_0+s)}{m^n-s_0-s(m^n-1)}=$$

$$=1+\frac{\dfrac{m^ns(1-s_0)^2}{m^n-s_0}-m^n(1-s_0)\dfrac{m^n-m^ns-s_0+s}{m^n-s_0}}{m^n-s_0-s(m^n-1)}=$$

$$=1-\frac{m^n(1-s_0)}{m^n-s_0}+\frac{sm^n(1-s_0)^2}{(m^n-s_0)(m^n-s_0-s(m^n-1))}=$$

$$=1-m^n\frac{(1-s_0)}{m^n-s_0}+\frac{m^n(1-s_0)^2s}{(m^n-s_0)^2-s(m^n-s_0)(m^n-1)}=$$

$$=1-m^n\left(\frac{1-s_0}{m^n-s_0}\right)+\frac{m^n\left(\dfrac{1-s_0}{m^n-s_0}\right)^2s}{1-\left(\dfrac{m^n-1}{m^n-s_0}\right)s}.$$

Així doncs, ja hem trobat l'expressió explícita de la funció generadora de Z_n quan tenim una distribució de la descendència lineal fraccionària i $m\neq 1$. En resum,

Lema 2.4.1. *Sigui f la funció generadora d'una distribució lineal fraccionària amb mitjana $m\neq 1$ i punts fixos 1, s_0. Aleshores,*

$$f_n(s)=1-m^n\left(\frac{1-s_0}{m^n-s_0}\right)+\frac{m^n\left(\dfrac{1-s_0}{m^n-s_0}\right)^2s}{1-\left(\dfrac{m^n-1}{m^n-s_0}\right)s} \quad \forall n\geq 1.$$

A més, del fet que $m = \dfrac{b}{(1-p)^2}$, tenim, en el cas $m > 1$,

$$\frac{1-p}{1-ps_0} = \frac{1}{m} = \frac{(1-p)^2}{b} \Rightarrow 1 - ps_0 = \frac{b}{1-p} \Rightarrow q = s_0 = \frac{1-b-p}{p(1-p)} = \frac{p_0}{p} < 1.$$

De fet, hi ha una correspondència entre els parells $(m, q) \in (1, +\infty) \times [0, 1)$ i $(p, b) \in (0, 1) \times (0, 1)$, $p + b \leq 1$. És a dir, per cada reproducció mitjana m i probabilitat d'extinció $q < 1$, existeix exactament una distribució lineal fraccionària amb mitjana m i probabilitat d'extinció q. Concretament,

$$p = \frac{m-1}{m-q} \quad i \quad b = \frac{m(1-q)^2}{(m-q)^2}.$$

• Ens falta trobar l'expressió explícita de la funció generadora quan ens trobem en el cas crític. Suposem doncs que $m = 1$. Aleshores,

$$m = \frac{b}{(1-p)^2} = 1 \Rightarrow b = (1-p)^2 \quad i \quad s_0 = 1.$$

Així,

$$f(s) = \frac{p - (2p-1)s}{1 - ps}.$$

A diferència dels casos no crítics, podem iterar directament aquesta relació per a trobar l'expressió de $f_n(s)$, obtenint el següent resultat.

Lema 2.4.2. *Sigui f la funció generadora d'una distribució lineal fraccionària amb mitjana $m = 1$. Aleshores,*

$$f_n(s) = \frac{np - ((n+1)p - 1)s}{(n-1)p + 1 - nps} \quad \forall n \geq 1.$$

Tant en el cas crític com en el no crític, es poden trobar les probabilitats $P(Z_n = k) \quad \forall n \geq 1$ a partir de les expressions respectives que hem trobat per $f_n(s)$. Aquestes probabilitats seran de nou una sèrie geomètrica, excloent possiblement el primer terme.

Al següent apartat veurem la rellevància que va tenir aquest tipus de distribució en el estudi de Lotka, que va calcular la probabilitat d'extinció de les famílies blanques americanes, restringint-se als membres masculins.

2.5 El problema de l'extinció dels cognoms

Tot i que el problema de l'extinció dels cognoms va ser la motivació principal per a crear i desenvolupar la teoria dels processos de ramificació, hi ha poques aplicacions publicades que tractin aquest tema. Una explicació són les limitades circumstàncies sota les quals el model de ramificació simple de Galton-Watson és aplicable a les dades humanes. Aquest model simple és aplicable només sota la hipòtesi que individus diferents es reprodueixin independentment uns dels altres, de manera que les interaccions induïdes per les diverses classes d'aparellament són ignorades. A més, en aquest model s'assumeix que la reproducció és asexual, és a dir, tenim homes que per si mateixos generen altres descendents del sexe masculí. En definitiva, el procés estàndard no té lloc per a les dones en el procés de reproducció, tot i que és evident que si no fossin prou nombroses aleshores limitarien la descendència dels homes.

Com a curiositat i com a possible línia futura d'investigació, comentar que els darrers anys ja s'han donat casos d'estudis on es reconsidera el Problema original de Galton usant una població dels dos sexes. Aquest nou model es coneix com el procés de Galton-Watson bisexual. Es pot trobar informació sobre aquest model a l'article de Hull [9].

Però nosaltres ens centrem en el procés de Galton Watson tradicional. El primer estudi a aplicar aquest model a la interpretació de dades demogràfiques empíriques va ser dut a terme per Lotka, l'any 1931.

2.5.1 L'estudi de Lotka

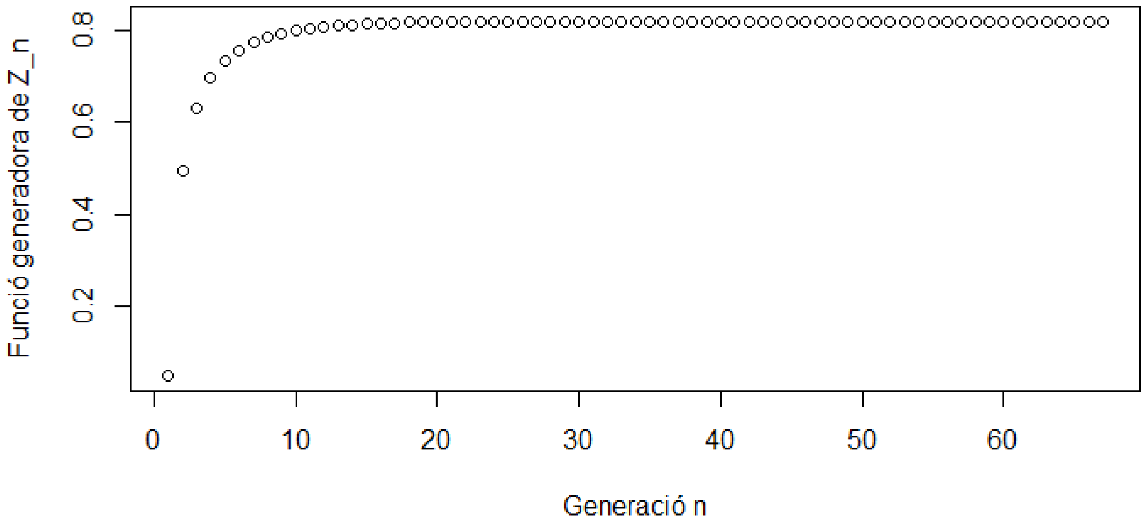
El matemàtic i estadístic americà Alfred James Lotka (1880-1949) va ser el primer a completar la idea de Galton, usant dades de fertilitat americanes per a determinar la probabilitat d'extinció de la població blanca americana de l'any 1920, restringint-se únicament als individus varons. A més, se'l considera el fundador de la demografia matemàtica. Va estudiar l'evolució de poblacions i va ser el primer a definir els conceptes de població estable, població estacionària i taxa de creixement natural.

Recordem que l'any 1930, el matemàtic i estadístic danès Steffensen va ser el primer a publicar un anàlisi complet i correcte de la probabilitat d'extinció del procés. Just un any després de la publicació d'Steffensen, Lotka va publicar el primer de dos articles il·lustrant la validesa del treball del danès. En el tercer paràgraf del primer dels dos articles, Lotka estableix el seu propòsit. En primer lloc, comenta que el tractament teòric del problema ja està disponible a la literatura del moment. No obstant, remarca que el que falta és establir una connexió entre la fórmula analítica i dades estadístiques empíriques.

Aleshores, Lotka va procedir a confrontar el model de Galton-Watson amb les dades del cens de la població blanca dels Estats Units de l'any 1920, convertint-se en la primera persona en realitzar un càlcul significatiu de la probabilitat d'extinció d'un procés de Galton-Watson. Concretament, Lotka es va restingir als individus varons del cens. De les dades estadístiques disponibles va calcular la distribució dels fills varons que un recent nascut del sexe masculí podria tenir amb el temps. És a dir, va calcular les probabilitats p_k que un recent nascut tingués $k = 0, 1, 2, ...$ fills en un futur, i així va ser capaç de determinar la probabilitat d'extinció d'una línia masculina de descendència (extinció d'un cognom). Lotka va trobar que aquesta probabilitat valia 0.8797.

Més endavant, però, va descobrir que les probabilitats de reproducció empíriques estaven ben aproximades per una distribució lineal fraccionària amb paràmetres $b = 0.2126$ i $p = 0.5892$, els quals impliquen que $p_0 = 0.4825$ i $m = 1.2598$. Amb aquestes noves consideracions va tornar a calcular la probabilitat d'extinció, prenent el nou valor 0.819.

Fent un senzill programa amb el programa estadístic R, usant els valors dels paràmetres que va agafar Lotka, podem veure que donat un valor inicial s, a mesura que n augmenta $f_n(s)$ s'acosta més i més al valor q de la probabilitat d'extinció. Per a exemplificar-ho gràficament, prenem un valor inicial $s = 0.05$ i una tolerància igual a 10^{-8}, que significa que deixarem d'iterar la funció generadora quan trobem que la diferència en valor absolut entre dos valors consecutius de $f_n(0.05)$ sigui més petita que 10^{-8}. Aleshores, a la generació 67 les iteracions s'aturen, i $f_{67}(0.05) = 0.8188615 \approx 0.819$, com volíem veure. El gràfic del valor de $f_n(0.05)$ en funció de n és el següent.



2.6 Resultats asimptòtics

En aquest apartat estudiarem la distribució límit de Z_n quan n és gran, i també el comportament de la seqüència aleatòria $Z_0, Z_1, \ldots$. En general, la distribució limit no pot ser obtinguda explícitament, excepte quan m=1. Òbviament, ens centrarem en el cas supercrític, puig que és l'únic cas on la població té opcions de sobreviure. De forma natural, la següent qüestió que tractarem és el comportament del creixement d'un procés de Galton-Watson quan aquest sobreviu.

2.6.1 Resultats asimptòtics quan m>1. Cas supercrític

Ja hem demostrat que quan $m > 1$, la família amb un sol progenitor té una probabilitat positiva de sobreviure indefinidament. En cas de sobreviure, pel teorema 2.3.2 sabem que la mida de la família augmenta indefinidament. Aleshores, d'acord a la llei de creixement de Malthus hauríem d'esperar que, amb el temps, la població augmentés a un ritme geomètric.

Mantenim la notació dels apartats anteriors. Així doncs, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ denota un procés de ramificació de Galton-Watson amb una distribució de la descendència $\{p_k\}_{k\geq 0}$, reproducció mitjana m i variància de reproducció σ^2. Recordem també que a l'apartat 1.2.1 hem denotat per $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, ..., Z_n)$ a la σ-àlgebra generada per $Z_0, Z_1, ..., Z_n$. Usarem la teoria de martingales per establir el comportament asimptòtic de Z_n en el cas supercrític.

Amb aquesta notació, i com a conseqüència del fet que $E(Z_n) = m^n$, és natural estudiar el procés normalitzat

$$W_n := \frac{Z_n}{E(Z_n)} = \frac{Z_n}{m^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Teorema 2.6.1. *Si $0 < m < \infty$, $W_n = \dfrac{Z_n}{m^n}$ i $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, ..., Z_n)$ és la σ-àlgebra generada per $Z_0, Z_1, ..., Z_n$, aleshores la seqüència $\{W_n, \mathcal{F}_n; n = 0, 1, 2, ...\}$ és una martingala. A més, com que $W_n \geq 0$, existeix una variable aleatòria no negativa W tal que*

$$\lim_{n\to\infty} W_n = W \quad q.s.$$

<u>*Demostració:*</u>

Comencem veient que $\{W_n, \mathcal{F}_n; n = 0, 1, 2, ...\}$ és una martingala. Per tant, hem de verificar les 3 condicions següents:

(i) W_n és $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 0$.

Això és cert per definció de $\mathcal{F}_n$, ja que $\mathcal{F}_n$ és la σ-àlgebra generada per $Z_0, Z_1, ..., Z_n$ i $W_n = \dfrac{Z_n}{m^n} \in \mathcal{F}_n$.

(ii) $E(|W_n|) < \infty$.

En efecte, $E(|W_n|) = E(|m^{-n} Z_n|) = |m^{-n}| E(|Z_n|) = 1 < \infty$, ja que $m > 0$ i $Z_n \geq 0$.

(iii) $E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = W_n$.

Tenim que

$$E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(m^{-(n+1)} Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = m^{-(n+1)} E(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) =$$

$$= m^{-(n+1)} E(Z_{n+1}|\sigma(Z_0, Z_1, ..., Z_n)) = m^{-(n+1)} E(Z_{n+1}|Z_n = k_n, ..., Z_0 = k_0) =$$

$$= m^{-(n+1)} E(Z_{n+1}|Z_n = k_n),$$

ja que $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ és una cadena de Markov. Ara, usant que $E(Z_{n+1}|Z_n = k) = mZ_n$,

$$m^{-(n+1)}E(Z_{n+1}|Z_n = k_n) = m^{-(n+1)}mZ_n = m^{-n}Z_n = W_n.$$

Així, ja hem vist que $(W_n)_{n\geq 0}$ és una martingala adaptada a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Per acabar la demostració usarem el Teorema de Convergència de Martingales.

Teorema 2.6.2. *(Teorema de Convergència de Martingales). Sigui $(W_n)_{n\geq 0}$ una martingala relativa a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de tal manera que existeix un $C < \infty$ amb $E(|W_n|) < C$ $\forall n \geq 0$, amb n entera. Aleshores existeix una variable aleatòria W tal que*

$$\lim_{n\to\infty} W_n = W \quad q.s.$$

<u>*Demostració:*</u> Ometem la demostració. Es pot veure a Lawler [11, capítol 5, pàgines 117-118]. □

Així doncs, només ens cal veure que existeix un $C < \infty$ amb $E(|W_n|) < C$ $\forall n \geq 0$. Com que W_n és no negativa per tot n,

$$E(|W_n|) = E(W_n) = E\left(\frac{Z_n}{m^n}\right) = \frac{1}{m^n}E(Z_n) = 1, \forall n \geq 0.$$

Per tant, agafant qualsevol valor de C tal que $1 < C < \infty$, existeix una variable aleatòria no negativa W tal que $\lim_{n\to\infty} W_n = W \quad q.s.$

□

De la convergència que acabem de provar tenim que Z_n creix com m^nW, si $W \neq 0$. Això és l'anàleg estocàstic de la la llei Malthusiana del creixement geomètric de la població. Tot i que aquest teorema 2.6.1 ens dóna un resultat clar a partir d'una única hipòtesi molt dèbil, el resultat no és gaire satisfactori en el sentit que que no ens explica res sobre W. Naturalment, usant el lema de Fatou podem concloure que

$$E(W) \leq \lim\ \inf E(W_n) = E(Z_0) = 1.$$

No obstant, això no descarta la possibilitat que $W \equiv 0$, i en aquest cas el Teorema 2.6.1 simplement ens diu que m^n creix més ràpid que Z_n. De fet, si $m \leq 1$, sabem que amb probabilitat 1 Z_n és 0 per un n suficientment gran, així que, de fet, W és degenerada en 0. És a dir, $P(W = 0) = 1$ si $m \leq 1$. D'aquesta manera, el teorema podria ser significatiu, en tot cas, només quan $m > 1$. Però inclús en aquest cas podria passar que $P(W = 0) = 1$. No obstant, que la variància de reproducció σ^2 sigui finita és suficient per poder assegurar que W és no degenerada, és a dir, per a tenir que $P(W = 0) < 1$. De fet, tenim el següent resultat.

Teorema 2.6.3. *Suposem que $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ és un procés de ramificació de Galton-Watson supercrític amb un progenitor i variància de reproducció finita σ^2. Aleshores,* *(i)* $\lim_{n\to\infty} E((W_n - W)^2) = 0$,

(ii) $E(W) = 1$ *i* $Var(W) = \dfrac{\sigma^2}{m^2 - m}$,

(iii) $P(W = 0) = q$.

<u>*Demostració:*</u>
Pel Teorema 2.2.1, i $\forall n \geq 0$,

$$E(W_n^2) = \frac{E(Z_n^2)}{m^{2n}} = \frac{\sigma^2(1 - m^{-n})}{m^2 - m} + 1.$$

Per acabar de provar (i) hem de fer ús del teorema de convergència en L^p.

Teorema 2.6.4. *(Teorema de Convergència en L^p). Sigui $(W_n)_{n\geq 0}$ una martingala relativa a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de tal manera que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|W_n|^p) < \infty$ $\forall n \geq 0$, on $p > 1$. Aleshores existeix una variable aleatòria W tal que $W_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} W$ en L^p.*

<u>*Demostració:*</u> Ometem la demostració. Es pot veure a Durrett [5, capítol 4, pàgines 252-253]. ☐

Com que $E(W_n^2)$ és una funció creixent en n,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E(W_n^2) = \lim_{n\to\infty} E(W_n^2) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m} + 1 < \infty,$$

i, pel teorema de Convergència en L^p, W_n convergeix en L^2 a W. Així, ja tenim que $\lim_{n\to\infty} E((W_n - W)^2) = 0$.

Com que W_n convergeix en L^2 a W, $E(W_n) \to E(W)$, i $E(W_n) = 1$ $\forall n \geq 0$, de manera que $E(W) = 1$. A més,

$$Var(W) = \lim_{n\to\infty} Var(W_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2(1 - m^{-n})}{m^2 - m} = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}.$$

Nomes ens falta veure (iii). Si notem $r = P(W = 0)$, com que $E(W) = 1$ llavors $r < 1$. A més, condicionant per Z_1 observem que r ha de satisfer

$$r = \sum_k P(W = 0|Z_1 = k)P(Z_1 = k) = \sum_k (P(W = 0))^k p_k = \sum_k r^k p_k = f(r),$$

així que r ha de coincidir amb q. Per tant, $P(W = 0) = q$.

☐

Levinson (1959) va ser el primer a adonar-se que si $\sigma^2 = \infty$ aleshores $P(W = 0)$ podia ser 1, però cap condició tant forta com $\sigma^2 < \infty$ és necessària per a garantir la no degeneració de W. Al teorema següent veurem una condició necessària i suficient que només és una mica més forta que l'existència de la mitjana. Respecte a la distribució de W, resulta ser absolutament contínua en els reals positius i té, de fet, una funció de densitat contínua estrictament positiva (veure Athreya i Ney [3, capítol 1, pàgina 24]).

El resultat següent va ser donat enfocant-se a una situació més general (el procés de Galton-Watson multidimensional) per Kesten i Stigum.

Teorema 2.6.5. *Si $E(Z_1 log(Z_1)) < \infty$, aleshores $E(W) = 1$. Si $E(Z_1 log(Z_1)) = \infty$, aleshores $E(W) = 0$ o, equivalentment, $P(W = 0) = 1$.*

<u>*Demostració:*</u> Ometem la demostració. Es pot veure a Athreya i Ney [3][capítol 1, pàgines 24-29]. □

En vista del resultat del teorema 2.6.3, podem usar la distribució de W per estudiar la distribució de Z_n quan n és gran. Per estudiar la distribució de W hauríem de derivar, de l'expressió dels iterats de la funció generadora

$$f_{n+1}(s) = f(f_n(s)), \quad n = 1, 2, ...,$$

una equació funcional per a la seva funció generatriu de moments $\phi(s) = E(e^{-sW})$.

Notem que és habitual definir la funció generatriu de moments com, en la nostra notació, $\phi(-s)$, però aquesta expressió ens forçaria a tractar amb el semiplà $Re(s) \geq 0$, que és inadequat.

Definició 2.6.1. *Sigui $\phi_n(s)$, $n = 0, 1, 2, ...$, i $\phi(s)$ les funcions generatrius de moments respectives de W_n i W,*

$$\phi_n(s) = E(e^{-sW_n}) = f_n(e^{-s/m^n}), \quad \phi(s) = E(e^{-sW}), \quad Re(s) \geq 0.$$

Sigui $K(u) = P(W \leq u)$ la distribució de W. Aleshores, l'equació dels iterats de la funció generatiu es converteix en

$$\phi_{n+1}(ms) = f(\phi_n(s)), \quad Re(s) \geq 0; \quad n = 0, 1, ...$$

.

Com que les variables aleatòries W_n convergeixen en probabilitat a W, les seves distribucions convergeixen a la de W i $\phi_n(s) \to \phi(s)$ quan $Re(s) \geq 0$. Com que f és contínua per $|s| \leq 1$, observem que $f(\phi_n(s)) \to f(\phi(s))$. Així tenim el següent resultat, que va ser provat per primera vegada amb menys generalitat per Hawkins i Ulam (1944).

Teorema 2.6.6. *Sota les condicions del teorema 2.6.3, la funció generatriu de moments $\phi(s) = E(e^{-sW})$ satisfà les relacions*

$$\phi(ms) = f(\phi(s)), \quad Re(s) \geq 0,$$

amb $\phi'(0) = -1$. La funció característica $\phi(-it)$, $-\infty < t < \infty$, és la única funció característica satisfent les relacions anterios, corresponent a una distribució amb primer moment 1.

Demostració: Ometem la demostració. Es pot veure a Harris [8, capítol 1, pàgines 15-16]. □

2.6.2 Resultats asimptòtics quan m<1. Cas subcrític

En aquest cas, com que sabem que la població s'extingeix amb probabilitat 1, la distribució límit de Z_n no és interessant. Per descriure el comportament asimptòtic del procés quan $m < 1$ Kolmogorov (1938) i Yaglom (1947) van introduir el recurs de condicionar el procés Z_n per la no extinció, és a dir, per l'esdeveniment $\{Z_n > 0\}$. La funció generatriu resultant de condicionar ve donada per

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k | Z_n > 0) s^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(Z_n = k)}{P(Z_n > 0)} s^k = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(Z_n = k) s^k}{P(Z_n > 0)} = \frac{f_n(s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)}.$$

El següent resultat, que és degut a Yaglom, mostra que aquesta funció convergeix a una funció generatriu.

Teorema 2.6.7. *Suposem que $m < 1$ i $E(Z_1^2) < \infty$. Aleshores, per cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k | Z_n > 0) = b_k$$

existeix, i $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1$. A més, la funció generatiu $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k$ satisfà l'equació funcional

$$g(f(s)) = m g(s) + 1 - m, \quad |s| \leq 1.$$

Demostració: Ometem la demostració. Es pot veure a Harris [8, capítol 1, pàgines 18-19]. □

2.6.3 Resultats asimptòtics quan m=1. Cas crític

La inestabilitat del cas crític es pot veure clarament en el fet que, quan $m = 1$,

$$E(Z_n) = 1 \quad \forall n, \quad Var(Z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad i \quad P(Z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) = 1.$$

No obstant, els processos crítics tenen el comportament límit més fàcil de descriure dels 3 casos, com ara veurem.

En aquest cas, les probabilitats límits b_k de la seqüència de distribucions condicionals de $\{Z_n | Z_n > 0\}$ són 0 (veure Athreya i Ney [3, capítol 1, pàgines 15-18]), de manera que aquest procés divergeix a ∞ en distribució. Una idea pel que fa al ritme de divergència ve donada per un càlcul simple del moment de primer ordre de Z_n:

$$1 = E(Z_n) = E(Z_n | Z_n > 0) P(Z_n > 0) + 0 \cdot P(Z_n = 0),$$

implicant que

$$E(Z_n|Z_n > 0) = \frac{1}{P(Z_n > 0)}.$$

Així doncs, fa falta una normalització addicional per aconseguir que el procés condicionat convergeixi a un límit no degenerat.

El següent lema serà important per a veure els resultats posteriors.

Lema 2.6.1. *Assumim que* $m = 1$ *i* $\sigma^2 < \infty$. *Aleshores,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1 - f_n(s)} - \frac{1}{1 - s} \right\} = \frac{\sigma^2}{2}$$

uniformement per $0 \leq s < 1$.

<u>*Demostració:*</u> Ometem la demostració. Es pot veure a Athreya i Ney [3, capítol 1, pàgines 20-23]. □

Ja sabem que $P(Z_n > 0) \to 0$ quan $n \to \infty$ quan $m = 1$. Prenent $s = 0$ en el lema 2.6.1, i notant que $P(Z_n > 0) = 1 - f_n(0)$, obtenim la següent estimació del ritme de convergència cap a 0.

Aquest resultat va ser provat per primera vegada per Kolmogorov (1938) sota una hipòtesi del moment de tercer ordre.

Teorema 2.6.8. *Si* $m = 1$ *i* $\sigma^2 < \infty$ *aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} nP(Z_n > 0) = \frac{2}{\sigma^2}.$$

<u>*Demostració:*</u>

Usant el lema anterior,

$$nP(Z_n > 0) = n(1 - f_n(0)) = \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - f_n(0)} - 1 \right) + \frac{1}{n} \right\}^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sigma^2}$$

□

Amb anterioritat ja hem remarcat que el procés condicionat $\{Z_n|Z_n > 0\}$ divergeix. El teorema 2.6.8 pot ser usat per donar una primera idea del seu ritme de creixement. Com ja hem observat abans que

$$E(Z_n|Z_n > 0) = \frac{1}{P(Z_n > 0)},$$

aleshores, aplicant el teorema 2.6.8 tenim que

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n|Z_n > 0) = \frac{n\sigma^2}{2}.$$

Això ens diu que si el procés encara no s'ha extingit i n és gran, aleshores el procés té un creixement lineal.

Com que l'esperança del procés condicionat està creixent a ritme n, és raonable considerar el procés condicionat $\left\{ \frac{Z_n}{n} > z | Z_n > 0 \right\}$. Això ens porta al següent resultat, provat per Yaglom (1947), també sota una hipòtesi del moment de tercer ordre. Abans de donar-lo però, ens cal definir el concepte de transformada de Laplace, que usarem a la demostració.

Definició 2.6.2. *La transformada de Laplace d'una funció $f(t)$ definida per a tots els nombres reals $t \geq 0$ és la funció $F(s)$ definida per*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

sempre que la integral estigui definida.

Teorema 2.6.9. *Si $m = 1$ i $\sigma^2 < \infty$ aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n}{n} \leq z | Z_n > 0 \right) = 1 - e^{-2z/\sigma^2}, \quad z \geq 0.$$

<u>*Demostració:*</u>

Agafem un $t \in \mathbb{R}$ arbitrari . Observem que

$$E\left(e^{-sZ_n/n} | Z_n > 0\right) = \frac{1}{P(Z_n > 0)} \left(E(e^{-sZ_n/n} - P(Z_n = 0))\right)$$

$$= \frac{f_n(e^{-s/n}) - f_n(0)}{1 - f_n(0)} = 1 - \frac{n(1 - f_n(e^{-s/n}))}{n(1 - f_n(0))}.$$

Pel lema 2.4.1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1 - f_n(0))} = \frac{\sigma^2}{2},$$

i, usant la convergència uniforme i el desenvolupament de Taylor de la funció exponencial, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1 - f_n(e^{-s/n}))} = \frac{\sigma^2}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1 - e^{-s/n})} = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{s} = \frac{2 + s\sigma^2}{2s}.$$

Així,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-sZ_n/n}) | Z_n > 0\right) = 1 - \frac{2s}{2 + s\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{2} = \frac{2}{2 + s\sigma^2} = \frac{1}{1 + \frac{s\sigma^2}{2}}.$$

Aquest resultat és suficient per a provar el resultat del teorema gràcies al teorema de continuïtat per a transformades de Laplace (veure Feller[6]) i al fet que

$$\mathcal{L}\left(\frac{2}{\sigma^2}e^{-2z/\sigma^2}\right) = \left(1+\frac{s\sigma^2}{2}\right)^{-1},$$

és a dir, $\left(1+\dfrac{s\sigma^2}{2}\right)^{-1}$ és la transformada de Laplace de la distribució exponencial amb paràmetre $2/\sigma^2$. $\square$

El que ens diu aquest resultat és que el decreixement d'una població que es comporta com un procés de Galton-Watson crític és exponencial. Així, tenim que la distribució asimptòtica del procés $\left\{\dfrac{Z_n}{n}\right\}$ condicionat per la no extinció del procés és una exponencial de paràmetre $2/\sigma^2$.

3 Estimació dels paràmetres del procés de Galton-Watson

Com ja hem vist, el procés de ramificació de Galton-Watson $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ està caracteritzat per les probabilitats $\{p_k\}_{k\geq 0}$ d'un individu qualsevol de tenir k fills. Si coneixem els valors d'aquestes probabilitats per a la nostra població, aleshores serem capaços de calcular el nombre mitjà de descendents per individu m, i també podrem computar la probabilitat d'extinció q del sistema.

A la pràctica, però, si observem una població fins la generació n les dades que tindrem seran les els valors observats

$$\{Z_j; \quad j = 0, ..., n\} \quad i \quad \{X_{ji}; \quad j = 0, 1, ..., n-1; \quad i = 1, ..., Z_j\}.$$

En conseqüència, el propòsit d'aquest capítol és estimar els diversos paràmetres d'un procés de Galton-Watson, p_k, m i q, a partir de les dades observades de la població. En particular, els estimarem pel mètode de màxima versemblança, basant-nos en l'estudi de Jagers [10].

Així doncs, suposem que observem l'evolució del nombre d'individus d'una població amb Z_0 progenitors fins la generació n. És a dir, coneixem els valors $\{Z_j; \quad j = 0, ..., n\}$ i $\{X_{ji}; \quad j = 0, 1, ..., n-1; \quad i = 1, ..., Z_j\}$.

Definició 3.0.3. *El nombre d'individus de la j-èssima generació amb exactament k descendents es defineix com*

$$Z_{jk} = \sum_{i=1}^{Z_j} \mathbb{I}_{\{X_{ji}=k\}}, \quad j = 0, 1, ..., n-1, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

D'aquesta definició es dedueix que $Z_j = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Z_{jk}$.

Amb aquesta notació i en aquestes condicions tenim els següents resultats.

Teorema 3.0.10. *En un procés de Galton-Watson amb Z_0 progenitors, l'estimador de màxima versemblança de p_k basat en l'observació de*

$$\{Z_{jk}; \quad j = 0, 1, ..., n-1; \quad k = 0, 1, 2, ...\}$$

és

$$\widehat{p}_k = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} Z_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} Z_{jk}}.$$

<u>*Demostració:*</u>

Per un Z_j donat tenim que

$$P(Z_{j0} = i_0, Z_{j1} = i_1), ...|Z_j) = \frac{Z_j!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} i_k!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{i_k},$$

amb $\sum\limits_{k=0}^{\infty} i_k = Z_j$. En cas contrari la probabilitat és zero. Com que

$$Z_j = \sum_{k=0}^{\infty} k Z_{j-1k},$$

la funció de versemblança L basada en $\{Z_{jk}; \quad j = 0, 1, ..., n-1; \quad k = 0, 1, 2, ...\}$ és

$$L = \frac{Z_0!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} Z_{0k}!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{0k}} \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} k Z_{0k}\right)!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} Z_{1k}!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{1k}} \dots \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} k Z_{n-2k}\right)!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} Z_{n-1k}!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{n-1k}}.$$

Escollir una distribució $\{p_k\}$ per a maximitzar la funció de versemblança L és equivalent a la maximització del seu logaritme, on l'únic terme que depèn de p_k és

$$ln \left(\prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{0k}} \dots \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{n-1k}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} ln \left(\prod_{k=0}^{\infty} p_k^{Z_{jk}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} ln \left(p_k^{Z_{jk}} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (ln p_k) Z_{jk}.$$

Per tant hem de maximitzar aquesta expressió, i ho farem usant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Sigui

$$f(p_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (ln p_k) Z_{jk},$$

on p_k, $k = 0, 1, 2, ...$, és tal que $g(p_k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Primerament construïm la funció de Lagrange, que és

$$h(p_k, \lambda) = f(p_k) - \lambda(g(p_k) - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (ln p_k) Z_{jk} - \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k - 1 \right),$$

amb $\lambda \neq 0$. Derivant l'expressió de Lagrange respecte p_k i λ i igualant a 0 obtenim que

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}(lnp_k)Z_{jk}-\lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k-1\right)\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{Z_{jk}}{p_k}-\lambda=0\Rightarrow p_k=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{jk}}{\lambda}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}(lnp_k)Z_{jk}-\lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k-1\right)\right)=-\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_k-1\right)=0.$$

Substituint el valor de p_k a la segona expressió obtenim que

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{jk}}{\lambda}=1.$$

Aleshores,

$$\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}Z_{jk}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}Z_{jk}=\sum_{j=0}^{n-1}Z_j \quad i,$$

per tant,

$$\widehat{p_k}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}.$$

$\square$

Observem que l'estimador de màxima versemblança $\widehat{p_k}$ és intuïtivament molt raonable, ja que és el quocient de la suma dels individus que tenen k fills de les $n-1$ primeres generacions entre el total d'individus d'aquestes $n-1$ generacions.

Corol·lari 3.0.1. *L'estimador de màxima versemblança de la reproducció mitjana* $m=\sum\limits_{k=0}^{\infty}kp_k$ *d'un procés de Galton-Watson amb* Z_0 *progenitors és*

$$\widehat{m}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}.$$

<u>*Demostració:*</u>

A partir de l'estimació $\widehat{p}_k$ de la distribució de probabilitat del procés podem estimar la reproducció mitjana m. És a dir,

$$\widehat{m}=\sum_{k=0}^{\infty}k\widehat{p}_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{n-1}kZ_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}kZ_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}Z_j}$$

$\square$

Per tant, l'estimador de màxima versemblança d'm és el quocient del nombre total de fills observats entre el nombre total d'avantpassats. Com l'estimador anterior, també és intuïtivament raonable. A més, al llibre de Jagers [10, cap.1, pàg 48] es pot veure que si condicionem per la no extinció del procés aquest estimador és fortament consistent.

Per últim, ens falta estimar la probabilitat d'extinció del problema de Galton-Watson. Per a estimar-la canviarem lleugerament la situació inicial. Assumim que hem observat la reproducció d'n individus. Això ens dona una mostra $x_1, x_2, ..., x_n$ de variables aleatòries independents, cadascuna amb distribució $\{p_k\}$. Pel teorema 3.0.10 és clar que l'estimador de màxima versemblança de p_k és

$$\widehat{p}_k(n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{\{x_i=k\}}}{n},\quad k=0,1,...$$

Per la llei dels grans nombres $\widehat{p}_k(n)$ és fortament consistent. A més és no esbiaixat. El mateix s'aplica a la funció generadora empírica i les seves derivades: amb probabilitat 1,

$$\widehat{f}_n^{(j)}(s)=\sum_{k=j}^{\infty}k!\widehat{p}_k(n)\frac{s^{k-j}}{(k-j)!}\to f^{(j)}(s)$$

uniformement per $0\leq s\leq 1$ si $f^{(j)}(1^-)<\infty$ i sinó, uniformement en qualsevol subconjunt tancat de $[0,1)$. A més,

$$E(\widehat{f}_n^{(j)}(s))=f^{(j)}(s).$$

Per obtenir una convergència normal fem una mica més precís l'argument anterior. Notem $e_{ik}=\mathbb{I}_{\{x_i=k\}}$. Per qualsevol $0\leq s\leq 1$,

$$\widehat{f}_n(s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}e_{ik}s^k}{n}\right).$$

Les variables aleatòries

$$\sum_{k=0}^{\infty}e_{ik}s^k,\quad 1\leq i\leq n,$$

són independents i idènticament distribuïdes amb esperança $f(s)$ i variància

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty} e_{ik}s^k\right)^2 - f^2(s) = \sum_{k=0}^{\infty} E(e_{ik})s^{2k} - f^2(s) = f(s^2) - f^2(s),$$

ja que $e_{ij}e_{ik} = 0$ per $j \neq k$. La variància és zero si i només si la llei de reproducció és generada. D'aquesta manera, si aquest no és el cas,

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{f}_n(s) - f(s))}{\sqrt{f(s^2) - f^2(s)}}$$

és asimptòticament, quan $n \to \infty$, una $N(0,1)$. De la mateixa manera la convergència normal es manté per les derivades.

De tots aquests resultats que hem vist sobre $\widehat{f}_n$ es segueix que $\widehat{q}_n$, on

$$\widehat{q}_n = inf\{s \geq 0; \widehat{f}_n(s) = s\}$$

és un estimador de màxima versemblança consistent de q. A més,

Teorema 3.0.11. *Si $m > 1$ i $p_0 > 0$, aleshores $(\widehat{q}_n - q)\sqrt{n}$ és asimptòticament normal amb mitjana 0 i variància* $\dfrac{f(q^2) - q^2}{(1 - f'(q))^2}$.

Si $m = 1$ i $0 < \sigma^2 < \infty$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} P\left((1 - \widehat{q}_n)\sqrt{n} \leq u\right) = \begin{cases} \Phi(u/2), & si \quad u \geq 0, \\ 0, & si \quad u < 0, \end{cases}$$

i on Φ és la funció de distribució normal estandarditzada.

Si $m < 1$ aleshores amb probabilitat 1 $\widehat{q}_n$ val en realitat 1 a partir d'un cert índex.

<u>*Demostració:*</u> Ometem la demostració. Es pot veure a Jagers [10, capítol 2, pàgina 51]. □

Per acabar, donarem una altra estimació, no paramètrica, de la probabilitat d'extinció q basant-nos en el treball de Martín [12].

Siguin $Z_r, Z_{r+1}, ..., Z_n$ les mides de les generacions successives $r, r+1, ..., n$ observades, on es suposa que $X_n > 0$. D'ara en endavant també suposem que $m > 1$, doncs sinó la població s'extingeix amb probabilitat 1. Crump i Howe proposen com a estimador no paramètric de q el següent:

$$\widehat{q} = e^{-2(\bar{m}-1)/\widehat{\sigma}^2},$$

on

$$\bar{m} = \frac{\sum_{j=r+1}^{n} Z_j}{\sum_{j=r}^{n-1} Z_j}$$

i

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-r-1} \sum_{k=m+1}^{n} Z_{k-1} \left(\frac{Z_k}{Z_{k-1} - \bar{m}} \right)^2,$$

de manera que per a conèixer $\widehat{q}$ fan falta almenys tres generacions successives.

En el mateix treball de Martín[12] es proposen alguns estimadors més de q diferents dels que ja hem vist, i després són comparats.

4 Conclusions

El procés de ramificació de Galton-Watson a temps i espai d'estat discrets té un bon número d'aplicacions pràctiques en àrees com la biologia, la física, la demografia, la medicina, etc. No obstant, la hipòtesi que els objectes o individus es reprodueixen independentment els uns dels altres causa una limitació considerable a qualsevol aplicació a problemes biològics. Una possible solució és tenir en compte el procés de Galton-Watson bisexual.

L'enfocament del treball en el primer capítol s'ha centrat en un marc teòric. Hem vist com a partir de la definició del procés, i ajudant-nos de la funció generadora de probabilitat (que ve determinada per la distribució del procés), hem sigut capaços de provar els resultats més importants del procés. A destacar sobretot el teorema que ens diu com calcular la probabilitat d'extinció si coneixem el valor del paràmetre de reproducció. Tot i que els resultats pels casos no crítics semblen evidents, el del cas crític resulta més sorprenent, ja que comporta l'extinció segura de la població. Així, el procés només por explotar o extingir-se a mesura que augmenten les generacions.

Un cop desenvolupada la teoria bàsica, hem tractat l'exemple més senzill possible i el més important del procés, el cas lineal fraccionari. I ho és perquè la seva distribució de probabilitat ens permet calcular explícitament les iteracions de la funció generadora de probabilitat. Lotka va aprofitar aquesta distribució per a dur a terme el primer estudi que confrontava el model correctament validat de Galton-Watson amb dades empíriques observades en una població americana.

En conseqüència, com que pràcticament mai podem calcular de forma explícita els iterats de la funció generadora, hem dedicat el capítol 2 a l'estimació dels paràmetres del model. Així, hem trobat una estimació de la distribució de probabilitat, a partir de la qual hem trobat la de la reproducció mitjana. Després hem estimat la probabilitat d'extinció de dues maneres diferents.

Com a línies de treball futures per a seguir estudiant aquest procés en senyalaria dues. La primera, fer un anàlisi detallat del procés de ramificació de Galton-Watson a temps continu. La segona, estudiar el procés de Galton-Watson bisexual, la teoria del qual s'està començant a desenvolupar des de fa uns anys.

Referències

[1] Alsmeyer, G.; *The simple Galton-Watson process: Classical approach*, University of Munster, 2011.

`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1011/SpezielleStochastischeProzesse/Ch_1.pdf`

[2] Asmussen, S.; Hering, H.: *Branching Processes*, Birkhäuser, Boston, 1983.

[3] Athreya, K.B.; Ney, P.E.: *Branching Processes*, Springer, New York, 1972.

[4] Ballister, P.: *Branching Processes* , Volum Master Review, 2006.

`https://www.researchgate.net/publication/228553576_BRANCHING_PROCESSES`

[5] Durrett, R.: *Probability: Theory and Examples*, second edition, Duxbury Press, Belmont, pàgines 481-483, copyright 1996.

[6] Feller, W.: *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, segunda edición, Limusa, México, pàgines 481-483, 1978,.

[7] Guttorp, P.: *Three papers on the history of branching processes*, Technical Report Número 242, pàgines 2-7, 1992.

`https://www.stat.washington.edu/research/reports/1992/tr242.pdf`

[8] Harris, T.E.: *The Theory of branching processes*, Springer, Berlin, 1963.

[9] Hull, David M.: *A reconsideration of Galton's problem: (using a two-sex population)*, Theoretical Population Biology, Volum 54, Article TP981367, pàgines 105-116, copyright 1998.

`http://ibrarian.net/navon/paper/A_Reconsideration_of_Galton_s_Problem__Using_a_Tw.pdf?paperid=2746534`

[10] Jagers, P.: *Branching Processes with Biological Applications*, Wiley, London, copyright 1975.

[11] Lawler, G.F.: *Introduction to Stochastic Processes*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[12] Martín Andrés, A.: *Estimación no Parámetrica de la Edad y de la Probabilidad de Extinción en Procesos de Galton-Watson*, Trabajos de estadística y de investigación operativa, Volum 32, Número 2, pàgines 55-67, 1981.

`http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/TESTOP_1981_32_02_04.pdf`

[13] Norris, J.R.: *Markov chains*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.

[14] Roelly,S.: *Unas propiedades basicas de procesos de ramificación*, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, 2010.

`http://users.math.uni-potsdam.de/~roelly/PreprintReiheStochastik/Preprint-2010-07.pdf`