



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

**El método de Newton como  
sistema dinámico discreto y  
continuo**

---

**Autora: Hui Hui Zhang Guo**

**Director: Xavier Jarque Ribera**

**Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica**

**Barcelona, 10 de junio de 2025**

## Abstract

Newton's method is a classical technique to approximate roots of functions, whose effectiveness has made it a fundamental tool in both numerical analysis and complex dynamics. This paper studies Newton's method applied to polynomials, both in its discrete version, treating it as a rational function, and its continuous version, established by Newton's flow, to which the qualitative theory of differential equations can be applied. The well-known property that the basins of attraction of the discrete method are not bounded on the Riemann sphere is also reviewed. Motivated by this fact, the question is raised whether this property is preserved in the continuous case. To address this question, we examine the flow associated with the continuous Newton method and analyse its behaviour around the polynomial roots, critical points and infinity. Finally, it is rigorously shown that the basins of attraction are also unbounded in this version.

## Resum

El mètode de Newton és una tècnica clàssica per a l'aproximació d'arrels de funcions, l'eficàcia de les quals l'ha convertit en una eina fonamental tant en l'anàlisi numèrica com en la dinàmica complexa. En aquest treball s'estudia el mètode de Newton aplicat a polinomis, tant en la seva versió discreta, en tractar-la com una funció racional, com en la versió continua, establerta pel flux de Newton, a la qual se li pot aplicar la teoria qualitativa d'equacions diferencials. També es revisa la coneguda propietat que les conques d'atracció del mètode discret són no acotades en l'esfera de Riemann. Motivats per aquest fet, es planteja la qüestió de si aquesta propietat es conserva en el cas continu. Per a abordar-la, s'examina el flux associat al mètode de Newton continu i s'analitza el seu comportament en un entorn de les arrels del polinomi, els punts crítics i l'infinit. Finalment, es demostra rigorosament que les conques d'atracció també són no acotades en aquesta versió.

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, Dr. Xavier Jarque Ribera, por su dedicación y orientación durante el desarrollo de esta memoria. Gracias por mostrarme lo fascinante que puede llegar a ser la dinámica holomorfa y por invitarme a formar parte activa en la construcción de ideas durante las horas dedicadas.

A Inés, Àlex y Oscar, gracias por compartir conmigo no solo las clases y los trabajos, sino también las dudas, los agobios y, por supuesto, los buenos momentos. Gracias por estar cuando lo he necesitado y crecer conmigo.

A Lucía, por ser mi amiga cactus y acompañarme desde lejos ahora y siempre.

A Arturo, por transformar las matemáticas en algo más que cálculos e impulsarme a tomar este camino.

A los viejos amigos y amigas de la isla, que sin saberlo muchas veces fueron un pilar invisible.

A mi familia, por respaldarme cada uno a su manera durante este largo camino.

A Víctor, por cuidarme y apoyarme. Gracias por creer en mí y ayudarme a ser mejor cada día.

Por último pero no menos importante, gracias a los amigos y compañeros de la universidad, por todos los momentos divertidos y peculiares que hemos pasado. De una u otra forma, han formado parte de este camino y me han ayudado a crecer tanto personal como profesionalmente.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Resultados previos</b>	<b>4</b>
<b>3. Dinámica compleja de funciones racionales</b>	<b>6</b>
3.1. Funciones racionales . . . . .	6
3.2. Teoría local . . . . .	8
3.3. Conjuntos de Julia y Fatou . . . . .	11
3.4. Clasificación de las componentes periódicas de Fatou . . . . .	15
<b>4. El método de Newton</b>	<b>19</b>
4.1. Propiedades fundamentales del método de Newton . . . . .	19
4.2. Teorema de distorsión de Koebe . . . . .	22
4.3. Cuencas de atracción de la aplicación de Newton . . . . .	24
<b>5. El flujo de Newton</b>	<b>28</b>
5.1. Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales . . . . .	29
5.2. Puntos singulares del sistema complejo $\dot{z} = f(z)$ . . . . .	32
5.3. Estudio del infinito . . . . .	35
5.4. Cuencas de atracción del flujo de Newton . . . . .	37
<b>6. Conclusiones</b>	<b>42</b>

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia, la humanidad se ha enfrentado problemas cuya resolución ha requerido encontrar la solución de ecuaciones. Esta necesidad ha impulsado el desarrollo de métodos numéricos, capaces de proporcionar soluciones aproximadas de manera eficiente, incluso en aquellos casos donde no se puede resolver de manera exacta o hacerlo conlleva una dificultad extrema. El método de Newton, también conocido como método de Newton-Raphson, es una de las técnicas más utilizadas y estudiadas para la resolución numérica de ecuaciones del tipo  $f(z) = 0$ , sea en  $\mathbb{R}$ , en  $\mathbb{C}$ , o su versión vectorial en dimensión mayor que 1, para una cierta función  $f$ , o, en otras, palabras, hallar los ceros de una función.

Clásicamente, se presenta como un procedimiento iterativo que, dado un valor inicial suficientemente cercano a una raíz de una función diferenciable, produce una sucesión que converge localmente de forma cuadrática hacia esa raíz. Cada iteración está definida de la siguiente manera:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad z_0 \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

Más allá de su utilidad práctica en computación científica e ingeniería, el método de Newton también ofrece una rica estructura matemática cuando se analiza desde la perspectiva de los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es, en términos generales, una regla que describe cómo cambia un estado en el tiempo. Esta regla puede adoptar forma discreta, cuando los estados evolucionan a través de iteraciones sucesivas, o continua, cuando se modela mediante ecuaciones diferenciales. Bajo esta mirada, el método de Newton puede considerarse un sistema dinámico discreto cuya función es

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

para una cierta  $f$  diferenciable, o bien un sistema dinámico continuo si se interpreta como una evolución temporal según

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = -\frac{f(z)}{f'(z)}$$

que se denomina el flujo de Newton.

El presente trabajo tiene un primer objetivo principal explorar el método de Newton desde esta doble perspectiva dinámica en la esfera de Riemann para polinomios, comparando y contrastando las versiones discreta y continua. En consecuencia,  $f$  es un polinomio y  $N_f$  es una función racional. El análisis del método de Newton como sistema dinámico

abre una nueva puerta para comprender un algoritmo clásico desde un punto de vista más estructural y global.

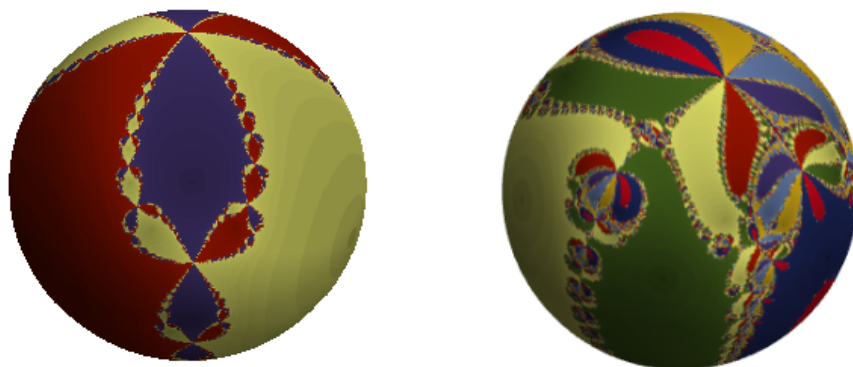


Figura 1.1: Cuencas de atracción para un polinomio de grado 3 y uno de grado 8, respectivamente. Imagen extraída de [11].

Asimismo, existe otro objetivo principal en este trabajo. Es bien sabido que en el caso discreto del método de Newton las cuencas de atracción de los puntos fijos de la aplicación de Newton, que resulta que coinciden con las raíces del polinomio, son conjuntos no acotados en la esfera de Riemann, en el sentido de que tienen  $z = \infty$  en su frontera. Surge entonces una pregunta natural: ¿es posible trasladar esta propiedad al caso continuo? Aunque el análisis continuo del método de Newton aún no ha alcanzado el mismo grado de desarrollo que su contraparte discreta, resulta muy interesante proponerse responder a dicha pregunta. Al final del trabajo propondremos una demostración que sugiere una respuesta afirmativa.

Motivados por esta cuestión, estudiaremos las herramientas necesarias para obtener nuestro resultado y analizaremos el comportamiento en torno a los puntos con algún carácter especial de sistema que, además de los ceros del polinomio, incluyen también los puntos críticos de la función y el punto del infinito. Para ello, aplicaremos diversos resultados que se afirman y demuestran en [9], en donde se ha analizado, por ejemplo, la dinámica alrededor del punto del infinito y explica las posibles técnicas para su análisis.

## Contexto histórico

Históricamente, el método de Newton fue introducido por Isaac Newton en 1669 para polinomios, aunque su formulación original, publicada en *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1711), era puramente algebraica y no utilizaba derivadas. Posteriormente, Joseph Raphson refinó el método, simplificando el proceso sin alterar su esencia, y más adelante, en 1740, Thomas Simpson incorporó el uso del cálculo diferencial y extendió el método a sistemas de ecuaciones. La formulación actual, con notación de análisis, se consolidó con Lagrange.

A partir de 1870, Ernst Schröder y Arthur Cayley iniciaron el estudio del método en el

plano complejo, analizando el comportamiento de las iteraciones de funciones racionales. Esta línea fue profundizada en el siglo XX por Fatou y Julia, quienes desarrollaron la teoría de iteración de funciones holomorfas en la esfera de Riemann, sentando así las bases de la dinámica compleja moderna. Más tarde, Montel utilizó las familias normales para dividir la esfera de Riemann en los conjuntos estable y caótico, totalmente invariantes y con dinámica diferente.

## Estructura de la Memòria

Una vez hecha una breve descripción del trabajo y sus objetivos, procedemos a exponer el reparto entre capítulos. Hemos dividido el texto en seis capítulos, entre los cuales el primero es esta introducción y el sexto expone las conclusiones. El capítulo dos sirve como recordatorio de las definiciones y resultados de análisis complejo u otros aspectos vistos a lo largo del grado.

El tercer capítulo estudia toda la teoría necesaria para estudiar el caso discreto del método de Newton, tanto localmente alrededor de los puntos fijos de la aplicación de Newton, como globalmente mediante los conjuntos de Julia y Fatou. La función de Newton resulta ser una función racional, lo cual nos permite aplicar la teoría para este tipo de funciones. La teoría local será empleada para analizar sus puntos fijos y sus respectivas cuencas de atracción, estudiando el comportamiento asintótico del sistema en torno a estos puntos, los cuales tienen un papel especial en la dinámica. Para una comprensión más global, recurriremos a los conjuntos de Fatou y Julia, que dividen la esfera de Riemann en dos subconjuntos, uno estable y uno caótico, respectivamente. Asimismo, dada la estabilidad del conjunto de Fatou, existen comportamientos definidos para cada componente, lo cual permite clasificarlas. Posteriormente, el cuarto capítulo analiza las principales propiedades del método de Newton discreto y demuestra el conocido hecho de que las cuencas de atracción son no acotadas, aplicando por medio el Teorema de distorsión de Koebe.

Por último, en el capítulo cinco exploramos la formulación continua; interpretamos el método como una ecuación diferencial autónoma que describe el flujo asociado a la búsqueda de raíces, lo que permite aplicar conceptos de estabilidad, retratos de fase y análisis cualitativo del sistema. El análogo a los puntos fijos atractores son los puntos de equilibrio, los cuales también son puntos especiales respecto a las órbitas del sistema. En la última sección del capítulo exponemos y demostramos la proposición que afirma que las cuencas de atracción de los puntos atractores son no acotadas.

## Capítulo 2

# Resultados previos

A fin de garantizar una comprensión adecuada de los temas que se abordarán en los siguientes capítulos, es esencial detenerse en algunos conceptos fundamentales y resultados previos. Ese es el propósito del presente capítulo, que constituirá parte de la base teórica sobre la cual se construirán y demostrarán las proposiciones y teoremas que se presentarán a lo largo del trabajo. Los resultados de análisis complejo en una variable pueden ser hallados en [2].

En primer lugar, es necesario recordar el concepto de función holomorfa, el principal objeto de estudio del análisis complejo. El Teorema de Liouville y la propiedad de que los ceros de las funciones holomorfas no constantes son aislados expuestas a continuación nos permitirán demostrar que toda función holomorfa en la esfera de Riemann es racional.

**Definición 2.0.1.** *Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se dice que  $f$  es holomorfa en  $z_0 \in \Omega$  si el límite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe. Si existe para todo  $z \in \Omega$ , se dice que  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ . Además, si  $\Omega = \mathbb{C}$ , se dice que  $f$  es entera.*

**Teorema 2.0.2.** *(Liouville) Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera y acotada, es decir, que existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $f$  es constante.*

**Teorema 2.0.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , donde  $\Omega$  es abierto. Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que  $f \neq 0$ . Si  $z_0 \in \Omega$  es un cero de  $f$ , existe un único  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ , tal que  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ , donde  $g$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $g(z_0) \neq 0$ . El número  $m$  es el orden del cero. En consecuencia, los ceros de  $f$  son aislados.*

En el siguiente capítulo describiremos los conjuntos de Julia y Fatou, y, en particular, estudiaremos sus propiedades topológicas y geométricas. Para ello, se requieren de dos resultados fundamentales del análisis complejo, como lo son el Principio del argumento y el Teorema de la función abierta.

**Definición 2.0.4.** *Una función meromorfa sobre un conjunto abierto  $\Omega$  es una función holomorfa en todo  $\Omega$  excepto por el conjunto de puntos aislados que son los polos.*

**Teorema 2.0.5.** *(Principio del argumento) Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , una función meromorfa cuyo número de ceros y polos es, respectivamente,  $N$  y  $P$ . Entonces,*

se cumple que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$

para cada ciclo  $\gamma$  homólogo a cero en  $\Omega$  y no pasa por ningún cero o polo.

**Teorema 2.0.6.** (Teorema de la función abierta). Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Si  $f$  es no constante, entonces  $f$  es abierta, es decir, envía abiertos de  $\Omega$  a abiertos de  $\mathbb{C}$ .

## Capítulo 3

# Dinámica compleja de funciones racionales

El presente capítulo tiene como finalidad familiarizarnos con los fundamentos necesarios para estudiar el método de Newton como sistema dinámico discreto. El punto de partida son las funciones racionales, pues el método de Newton aplicado a un polinomio es, en sí mismo, una función racional. La teoría local pretende analizar el comportamiento asintótico en el plano complejo de las iteraciones de la función y permite entender el comportamiento dinámico de estas funciones alrededor de los puntos periódicos o fijos, en el caso de que el periodo sea 1, pues resultan ser puntos especiales de la dinámica. Además, veremos cómo influyen los puntos críticos de la función racional al comportamiento dinámico discreto, definido por sus iterados. De hecho, la dinámica global se analiza a través de los conjuntos de Fatou y Julia, en los que se divide el plano complejo al iterar. Las componentes del conjunto de Fatou se pueden clasificar según su comportamiento bajo iteración, como veremos en la última sección.

Este capítulo, escrito empleando mayoritariamente [1] y [3], pretende ofrecer una visión estructurada de lo mencionado anteriormente proporcionando tanto herramientas teóricas, como ejemplos ilustrativos que acompañarán al lector. Para empezar, denotaremos  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  la esfera de Riemann, pues es donde se trabajará en la mayor parte del capítulo, es decir, la unión del plano complejo con el punto del infinito, empleando la métrica de  $\mathbb{C}$ .

### 3.1. Funciones racionales

En esta sección, definiremos los conceptos y propiedades relacionados con las funciones racionales, tales como su grado, sus iteradas, o la caracterización de toda función holomorfa en  $\hat{\mathbb{C}}$  como una función racional.

**Definición 3.1.1.** *Una función racional es una función de la forma  $R(z) = P(z)/Q(z)$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios en función de la variable  $z$ .*

**Definición 3.1.2.** *El grado de una función racional se define como:*

$$\deg(R) = \max \{ \deg(P), \deg(Q) \}$$

**Observación 3.1.3.** El grado de una aplicación racional también puede definirse como el número de antiimágenes de un punto genérico contados con multiplicidad.

**Ejemplo 3.1.4.** La aplicación  $R(z) = z^2$  tiene grado 2 porque cualquier punto tiene dos antiimágenes, incluyendo el 0, que se tiene como antiimagen a sí mismo dos veces. Por ejemplo, el punto 1 tiene como antiimágenes  $R^{-1}(z) = \{1, -1\}$ .

Las funciones racionales que consideraremos en este trabajo serán tal que  $\deg(R) \geq 2$ ; es decir,  $\deg(P) \geq 2$  y  $\deg(Q) \geq 2$ , de forma que evitamos las situaciones en que  $P \neq 0$  y  $Q \neq 0$ .

**Definición 3.1.5.** Una función está definida en un entorno de  $\infty$  si está definida en  $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$  y, en ese caso,  $f$  es holomorfa en  $\infty$  si la aplicación  $z \rightarrow f(1/z)$  es holomorfa en un entorno del zero.

**Teorema 3.1.6.** Una función  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  es holomorfa si, y solo si,  $f$  es racional.

*Demostración.* La implicación que va desde la derecha hasta la izquierda es inmediata, pues hemos supuesto que  $Q \neq 0$ . Para demostrar la otra implicación, suponemos que  $f$  es holomorfa en  $\hat{\mathbb{C}}$  y no constante, pues en caso contrario ya habríamos terminado. Sabemos que los ceros de  $f$  son aislados, así como los polos de  $f$ , pues como  $1/f$  es holomorfa y no constante, los ceros de  $1/f$ , que son los polos de  $f$ , son aislados. Denominamos  $p_0, \dots, p_n$  los ceros de,  $q_0, \dots$  los polos de  $f$ ,  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  las respectivas multiplicidades de los ceros y  $\beta_0, \dots, \beta_m$  las respectivas multiplicidades de los polos. Definimos la función  $g$  como:

$$g(z) := f(z) \frac{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}} \iff f(z) = g(z) \frac{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}}{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}$$

Demostramos que  $g$  es una función entera. Claramente, es holomorfa en todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z \neq p_j$  y  $z \neq q_j$ , pues es producto de dos funciones holomorfas en ese caso. Suponemos que  $z = p_j$ , entonces. Existe una función holomorfa  $h$  de manera que  $f(z) = (z - p_j)^{\alpha_j} h(z)$ , donde  $h(p_j) \neq 0$ , por lo que

$$g(z) = h(z) \frac{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots \widehat{(z - p_j)^{\alpha_j}} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}}$$

y  $g$  es holomorfa en  $p_j$  por ser el producto de dos funciones holomorfas. Análogamente, se puede ver que  $g$  es holomorfa en el caso  $z = q_j$ , por lo que  $g$  es entera.

Si  $g$  es una función entera y acotada, por el Teorema de Liouville es constante. Si  $g$  no es acotada, entonces  $1/g$  es acotada y, como también es entera, por el mismo teorema  $1/g$  es constante, por lo que  $g$  lo es también. En cualquier caso,  $g$  es constante, por lo que existe  $K \in \mathbb{C}$  de manera que

$$f(z) = K \frac{(z - p_0)^{\alpha_0} \dots (z - p_n)^{\alpha_n}}{(z - q_0)^{\beta_0} \dots (z - q_m)^{\beta_m}}$$

y  $f$  es racional. □

**Definición 3.1.7.** Dada una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , definimos los iterados de  $R$  como  $R^1 = R$  y  $R^n = R^{n-1} \circ R$ . Dado un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ , podemos definir su órbita como:

$$\mathcal{O}(z_0) = \{z_n := R^n(z_0)\}_{n \geq 0} = \{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots\}$$

**Observación 3.1.8.**  $R^0 = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$ .

## 3.2. Teoría local

Al estudiar sistemas dinámicos, es fundamental conocer el comportamiento local de las funciones alrededor de los puntos fijos para conocer su estabilidad y clasificarlos adecuadamente.

**Definición 3.2.1.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Se dice que  $z_0$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(z_0) = z_0$ .

Un punto fijo puede tener distintos comportamientos respecto a las órbitas que los rodean. Para estudiarlo, es clave conocer el concepto de multiplicador, dado por  $f'(z_0)$ . Según dicho valor, el punto fijo puede tener carácter atractor, repulsor o neutro.

**Definición 3.2.2.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. El punto  $z_0$  es atractor si existe  $\epsilon > 0$  tal que:

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon) \subset U, f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$$

$D(z_0, \epsilon)$  es el disco de centro  $z_0$  y radio  $\epsilon$ . Análogamente, un punto fijo es repulsor si es atractor para  $f^{-1}$ .

**Teorema 3.2.3.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa para la cual  $z_0$  es un punto fijo. Entonces:

- Si  $|f'(z_0)| < 1$ ,  $z_0$  es un punto fijo atractor.
- Si  $|f'(z_0)| > 1$ ,  $z_0$  es un punto fijo repulsor.

*Demostración.* Demostramos el primer enunciado. En este caso, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(z_0)| < \lambda < 1$ . La definición de función holomorfa implica que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

Por tanto, existe  $\epsilon > 0$  tal que, si  $z \in D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ , entonces:

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < \lambda \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \lambda |z - z_0|$$

Al ser  $z_0$  un punto fijo  $f(z_0) = z_0$  y  $f(z) \in D(z_0, \epsilon)$ , podemos hallar la imagen por  $f$  de la desigualdad:

$$|f^2(z) - z_0| \leq \lambda |f(z) - z_0| \leq \lambda^2 |z - z_0|$$

Iterando de la misma manera, eventualmente obtenemos que:

$$|f^n(z) - z_0| \leq \lambda^n |z - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Respecto al segundo enunciado, se aplica un razonamiento análogo para ver que  $z_0$  es un punto fijo atractor para  $f^{-1}$ .  $\square$

**Observación 3.2.4.** Fijémonos en que, en un entorno de un punto fijo repulsor  $z_0$ ,  $f^{-1}$  está bien definida, pues  $|f'(z_0)| > 1$ .

**Definición 3.2.5.** Tomando la notación del teorema anterior, un punto fijo  $z_0$  es super-tractor cuando  $f'(z_0) = 0$ .

No obstante, existen puntos fijos que no corresponden a ninguna de las categorías anteriores; son los puntos fijos neutrales, que pueden ser de dos tipos, como veremos en la definición siguiente.

**Definición 3.2.6.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. El punto  $z_0$  es:

- Racionalmente neutral o parabólico si  $|f'(z_0)| = 1$  y  $f'(z_0)$  es una raíz de la unidad.
- Irracionalmente neutral si  $|f'(z_0)| = 1$  y  $f'(z_0)$  no es una raíz de la unidad.

**Definición 3.2.7.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. El punto  $z_0$  es un punto periódico de periodo  $p \geq 2$  si  $f^p(z_0) = z_0$  y  $f^k(z_0) \neq z_0 \forall k = 1, \dots, p-1$ . Para dicho punto, se considera el conjunto finito de puntos  $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$  como el ciclo de  $z_0$ .

**Observación 3.2.8.** Los puntos fijos son puntos periódicos de periodo 1.

**Observación 3.2.9.** Un punto periódico de periodo  $p$  puede clasificarse como un punto fijo de  $f^p$ . Sea  $z_0 \in U$  un punto  $p$ -periódico, cuya órbita denotamos por  $\{z_0, \dots, z_{p-1}\}$ , de manera que  $z_m = f(z_{m-1}), m = 1, \dots, p-1$  y  $z_0 = f(z_{p-1})$ . Aplicamos la regla de la cadena:

$$(f^p)'(z_m) = \frac{d}{dz} \overbrace{\left( f(f(\dots f(z)\dots)) \right)}^{p \text{ veces}} \Big|_{z=z_m} = f'(z_{p-1}) \frac{d}{dz} (f^{p-1}(z)) \Big|_{z=z_m}$$

Repetiendo iterativamente el mismo paso:

$$(f^p)'(z_m) = f'(z_{p-1}) \cdot \dots \cdot f'(z_0) = \prod_{k=0}^{p-1} f'(z_k)$$

Como resultado, cualquier punto de la órbita tiene la misma clasificación que el resto, pues la derivada  $(f^p)'$  toma el mismo valor. Así, podemos hablar de ciclos atractores y repulsores según los criterios del Teorema 3.2.3, así como de ciclos neutrales.

Por otro lado, una vez conocemos los conceptos relacionados con los puntos fijos, resulta igualmente relevante conocer el concepto de punto crítico. El número de puntos críticos de una función racional depende del grado de la función, según una proposición que anunciaremos, pero no se demostrará. Su demostración se puede hallar en [4, Capítulo 2].

**Definición 3.2.10.** Dada una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , un punto  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  es crítico si  $R'(z_0) = 0$ . El valor  $w = R(z_0)$  se denomina valor crítico.

**Proposición 3.2.11.** Una aplicación racional de grado  $d$  tiene, como mucho,  $2d-2$  puntos críticos en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

En el estudio de funciones analíticas, es frecuente encontrar funciones relacionadas de tal manera que conocer una permite obtener información de la otra. Seguidamente, veremos el concepto de conjugación.

**Definición 3.2.12.** Una aplicación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es conforme si es analítica y uno a uno. En particular, no presenta puntos críticos.

**Observación 3.2.13.** Una aplicación conforme conserva los ángulos entre las curvas que se cruzan.

**Definición 3.2.14.** Sean  $U, V$  dos abiertos de  $\mathbb{C}$  y  $f : U \rightarrow U, g : V \rightarrow V$  dos funciones holomorfas. Las funciones  $f$  y  $g$  son conjugadas si existe una aplicación conforme  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ . A esta función  $\varphi$  se le denomina conjugación.

**Observación 3.2.15.** Las aplicaciones  $f$  y  $g$  pueden ser tratadas como la misma aplicación vista en dos sistemas de coordenadas diferentes. Además, esta definición implica que las iteraciones  $f^n$  y  $g^n$  también son conjugadas, así como  $f^{-1}$  y  $g^{-1}$  donde estén definidas.

De esta forma, un problema de dinámica en  $f$  se puede transformar en un problema en  $g$ , usualmente más simple. Esto es debido a que la conjugación conserva los puntos fijos, los multiplicadores y las cuencas de atracción, que definiremos más tarde. El hecho de que exista o no una conjugación o no depende fuertemente en el multiplicador, como destacan los siguientes teoremas.

**Teorema 3.2.16.** (Teorema de linealización de Kœnigs) Sea  $z_0 \in \mathbb{C}, U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $z_0$  es punto fijo de  $f$  con multiplicador  $0 < |\lambda| < 1$ . Existe una aplicación conformal  $\zeta = \varphi(z)$  definida en un entorno  $V \subseteq U$  de  $z_0$  sobre un entorno  $W$  de  $0$  que conjugua  $f(z)$  a la función lineal  $g(\zeta) = \lambda\zeta$ . La conjugación es única excepto multiplicación por un factor de escala diferente de cero.

*Demostración.* A fin de simplificar la demostración suponemos que  $z_0 = 0$ , pues en caso contrario es suficiente conjuguar con  $h(z) = z - z_0$ . Definimos  $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z)$ , función que satisface la igualdad  $\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}$ . Si existe una función  $\varphi$  tal que  $\varphi_n$  converge uniformemente a  $\varphi$  en compactos de  $U$ , será cierto que  $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ , que implica que  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda\zeta$  y  $\varphi$  es una conjugación.

Falta ver la convergencia uniforme a una función  $\varphi$ . Para una  $\delta > 0$  suficientemente pequeña, se verifica que  $|f(z) - \lambda z| \leq K|z|^2$  si  $|z| \leq \delta$ , pues, mediante un desarrollo de Taylor,  $f(z) = \lambda z + \frac{f''(0)}{2} z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ , de manera que  $|f(z) - \lambda z| \leq \left| \frac{f''(0)}{2} z^2 \right| \leq K|z|^2$ ,  $K := \left| \frac{f''(0)}{2} \right|$ . Dicha desigualdad implica que  $|f(z)| \leq \lambda|z| + K|z|^2 \leq (\lambda + K\delta)|z|$ . Al aplicar inducción para  $\lambda + K\delta < 1$ , se obtiene que  $|f^n(z)| \leq (\lambda + K\delta)^n |z|, |z| \leq \delta$ , que veremos a continuación. El caso inicial corresponde a  $n=2$ , en el cual:

$$|f^2(z)| \leq (\lambda + K\delta)|f(z)| \leq (\lambda + K\delta)^2 |z|$$

Suponemos que es cierto para  $n$  y demostramos para  $n + 1$ :

$$|f^{n+1}(z)| = |f^n(f(z))| \leq (\lambda + K\delta)^n |f(z)| \leq (\lambda + K\delta)^n (\lambda + K\delta) |z| = (\lambda + K\delta)^{n+1} |z|$$

Como resultado, podemos tomar  $\delta > 0$  suficientemente pequeño para que  $\rho := \frac{(\lambda + K\delta)^2}{\lambda} < 1$  y, así,

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{K|f^n(z)|^2}{\lambda^{n+1}} \leq \frac{K(\lambda + K\delta)^{2n} |z|^2}{\lambda^{n+1}} \leq \frac{\rho^n K |z|^2}{\lambda}$$

para  $|z| \leq \delta$ , por lo que  $\varphi_n$  converge uniformemente para  $|z| \leq \delta$  y la conjugación que buscábamos existe.

Falta demostrar la unicidad, para lo cual es suficiente demostrar que cualquier conjugación de  $f(z) = \lambda z$  a sí misma es una constante múltiplo de  $z$ . Sea dicha conjugación  $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ , entonces, debe cumplir que  $\varphi(\lambda z) = \lambda \varphi(z)$ . Sustituyendo:

$$a_1 \lambda z + a_2 \lambda^2 z^2 + \dots = a_1 \lambda z + a_2 \lambda z^2 + \dots$$

y, por tanto, los coeficientes  $a_n$  deben ser 0 para  $n \geq 2$  y  $\varphi(z) = a_1 z$ .  $\square$

**Observación 3.2.17.** La existencia de una conjugación para un punto fijo repulsor resulta inmediatamente del caso atractor. Suponemos  $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \dots$ , donde  $|\lambda| > 1$ . Entonces  $f^{-1} = z_0 + (z - z_0)/\lambda + \dots$  tiene un punto fijo atractor en  $z_0$  y cualquier aplicación que conjuga  $f^{-1}(z)$  a  $\zeta/\lambda$  también conjuga  $f(z)$  a  $\lambda\zeta$ .

En el caso de los puntos fijos superatractores, la conjugación viene dada por el Teorema de Boettcher. Su demostración puede encontrarse en [1, Capítulo 2].

**Teorema 3.2.18.** (Böttcher) Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  un entorno de  $z_0$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $z_0$  es punto fijo superatractor de  $f$ , donde  $f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots$ ,  $a_p \neq 0$  y  $p \geq 2$ . Existe una aplicación conformal  $\zeta = \varphi(z)$  definida en un entorno  $V \subseteq U$  de  $z_0$  sobre un entorno de 0 que conjuga  $f(z)$  con  $g(\zeta) = \zeta^p$ . La conjugación es única excepto multiplicación por una raíz  $(p-1)$ -ésima de la unidad.

### 3.3. Conjuntos de Julia y Fatou

Una vez comprendido el comportamiento local de las funciones racionales bajo iteración, pasamos al estudio global de la dinámica. Para ello, introducimos los conjuntos de Julia y Fatou, algunas definiciones relacionadas con ellas, sus propiedades, y las familias normales.

**Definición 3.3.1.** Sea  $\Lambda$  un espacio de parámetros y  $\mathcal{G} = \{g_\lambda : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \lambda \in \Lambda\}$  una familia de funciones holomorfas definidas en un dominio  $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ . Se dice que  $\mathcal{G}$  es una familia normal si toda sucesión  $\{g_\lambda\}_\lambda$  de  $\mathcal{G}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos de  $D$ .

En este trabajo se tomará el caso particular de una función racional y sus iterados para definir dicha familia. Sea  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  una función racional y  $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$  un dominio en el cual está definida la familia de funciones holomorfas  $\mathcal{G} = \{R^n|_U\}_{n \geq 1}$ .  $\mathcal{G}$  será la familia que consideraremos.

**Definición 3.3.2.** Sea una función racional  $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . El conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(R)$  es:

$$\mathcal{F}(R) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \{R^n|_U\}_n \text{ es normal en algún entorno } U \text{ de } z\}$$

El conjunto de Julia  $\mathcal{J}(R)$  es el complementario del conjunto de Fatou, es decir:

$$\mathcal{J}(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(R)$$

**Ejemplo 3.3.3.** Sea la función racional  $R(z) = z^2$ . Las iteraciones  $R^n(z) = z^{2^n}$  convergen uniformemente a 0 en  $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| < 1\}$ . Asimismo, convergen a infinito en  $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}$ . Por tanto, estos dos conjuntos pertenecen a  $\mathcal{F}(R)$ . Además,  $\mathcal{J}(R) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| = 1\}$ . En caso contrario, el entorno del punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  tal que  $|z| = 1$  y la familia  $\{R^n\}_n$  es normal tendría puntos cercanos que tienden a 0 e infinito a la vez.

**Observación 3.3.4.** El conjunto de Fatou es abierto y, por tanto, el conjunto de Julia es cerrado.

Es decir, dada una función racional, podemos dividir la esfera de Riemann en dos conjuntos disjuntos. El conjunto de Julia es el conjunto inestable y presenta un comportamiento caótico, mientras que el conjunto de Fatou es estable. En secciones posteriores, veremos que los puntos fijos atractores pertenecen al conjunto estable y los repulsores pertenecen al conjunto inestable. A continuación, presentamos algunas propiedades de estos dos conjuntos.

**Proposición 3.3.5.** *Sea  $R$  una función racional. Se satisface que  $\mathcal{J}(R) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Suponemos que  $\mathcal{J}(R) = \emptyset$  y demostramos por reducción al absurdo. Como  $\mathcal{J}(R) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(R)$ , entonces  $\mathcal{F}(R) = \hat{\mathbb{C}}$  y la familia  $\{R^n|_{\hat{\mathbb{C}}}\}_n$  es normal en todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . Por definición, existe una subsucesión  $\{R^{n_k}|_{\hat{\mathbb{C}}}\}_{n_k}$  tal que  $R^{n_k}|_{\hat{\mathbb{C}}}(z) \rightarrow f(z)$  para alguna función analítica  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Por el Teorema 3.1.6,  $f$  es racional. Veamos dos casos diferentes. Si  $f$  es constante, eventualmente la imagen de  $R^{n_k}|_{\hat{\mathbb{C}}}$  estará contenida en un pequeño entorno de la constante, lo cual es imposible porque  $\{R^n|_{\hat{\mathbb{C}}}\}_n$  cubre todo  $\hat{\mathbb{C}}$ . Por el contrario, si  $f$  no es constante, podemos tomar un camino  $C$  tal que rodee todos los ceros de  $f$  sin tocarlos. Por el principio del argumento, la integral de  $(R^{n_k})'/R^{n_k}$  tiende a la integral de  $f'/f$  en este camino, así que eventualmente  $R^{n_k}|_{\hat{\mathbb{C}}}$  debería tener el mismo número de ceros que  $f$ , cosa imposible porque  $f$  tiene grado finito por ser racional y  $R^n|_{\hat{\mathbb{C}}}$  tiene grado  $d^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .  $\square$

**Notación 1.** *Para simplificar la notación, denotaremos la familia de iterados de una función racional por  $\{R^n\}_n$ , donde queda implícita la restricción al entorno donde está definida la familia.*

**Definición 3.3.6.** *Dada una función racional  $R$ , se dice que un conjunto  $E$  es totalmente invariante por  $R$  si  $R^{-1}(E) = E$ .*

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $R$  una función racional no constante, entonces  $\mathcal{J}(R)$  y  $\mathcal{F}(R)$  son totalmente invariantes.*

*Demostración.* Veamos por doble inclusión que el conjunto de Fatou es invariante, es decir  $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) = \mathcal{F}(R)$ , y en consecuencia el conjunto de Julia también lo será. Veamos primero que  $R^{-1}(\mathcal{F}(R)) \subseteq \mathcal{F}(R)$ . Sea  $z \in \mathcal{F}(R)$ , entonces existe un entorno  $U$  de  $z$  tal que  $\{R^n\}_n$  es normal. Denominamos  $w := R^{-1}(z)$  y demostramos que  $w \in \mathcal{F}(R)$ . Como  $R$  es continua,  $R^{-1}(U)$  es un entorno abierto de  $w$ . Observamos que se cumple  $R^2(z) = R^3(R^{-1}(z))$ ,  $R^3(z) = R^4(R^{-1}(z))$ , etc., por lo que  $\{R^{n+1}\}_n$  es normal en  $R^{-1}(U)$  y, en consecuencia,  $w \in \mathcal{F}(R)$ .

Falta ver la otra inclusión:  $\mathcal{F}(R) \subseteq R^{-1}(\mathcal{F}(R))$ . Para ello, es suficiente demostrar que  $R(\mathcal{F}(R)) \subseteq \mathcal{F}(R)$  ya que, en ese caso,  $\mathcal{F}(R) \subseteq R^{-1}(R(\mathcal{F}(R))) \subseteq R^{-1}(\mathcal{F}(R))$ . Sea  $z \in \mathcal{F}(R)$ . Suponemos que  $R^{n_k+1}$  converge uniformemente en compactos de un entorno de  $z$ . Dado que  $R$  es una aplicación holomorfa no constante, por el Teorema de la función abierta es abierta y, por lo tanto, envía entornos abiertos de  $z$  a entornos abiertos de  $R(z)$ . Entonces,  $R(z) \in \mathcal{F}(R)$  porque  $\{R^{n_k}\}_{n_k}$  converge uniformemente en compactos de un entorno de  $R(z)$ . Esto es debido a que se satisface que  $R(R(z)) = R^2(z)$ ,  $R^2(R(z)) = R^3(z)$ , etc. Como resultado, tanto el conjunto de Julia como el de Fatou son totalmente invariantes.  $\square$

**Proposición 3.3.8.** *Sea  $R$  una función racional. Para cualquier  $N \geq 1$  se satisface que  $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^N)$  y  $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$ .*

*Demostración.* Análogamente a la demostración anterior, veremos mediante doble inclusión que  $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$  y, por lo tanto,  $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^N)$ . Para ver que  $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{F}(R^N)$ , tomamos  $z \in \mathcal{F}(R)$ , para el cual existe un entorno donde  $\{R^n\}_n$  es normal. Por tanto, la subsucesión  $\{R^{nN}\}_n$  también es normal en el mismo entorno de  $z$  y  $z \in \mathcal{F}(R^N)$ .

Recíprocamente, tomamos  $z \in \mathcal{F}(R^N)$ . Consideramos el caso  $N = 2$  para fijar ideas; existe un entorno de  $z$  tal que  $\{R^{2n}\}_n$  es normal, entonces, su imagen  $R(\{R^{2n}\}_n) = \{R^{2n+1}\}_n$  también es normal en el mismo entorno. Podemos escribir:

$$\{R^n\}_n = R \cup \{R^{2n}\}_n \cup \{R^{2n+1}\}_n$$

De esta manera, cualquier subsucesión de  $\{R^n\}_n$  tiene un número infinito de elementos de  $\{R^{2n}\}_n$  o de  $\{R^{2n+1}\}_n$ , que son normales, por lo que la subsucesión convergerá uniformemente en compactos del entorno y, por tanto,  $\{R^n\}_n$  será normal. Respecto al caso general, el resultado se deduce de la misma forma teniendo presente que:

$$\{R^n\}_n = R \cup \dots \cup R^{N-1} \cup \{R^{Nn}\}_n \cup \dots \cup \{R^{Nn+(N-1)}\}_n$$

Así,  $z \in \mathcal{F}(R)$  y, como resultado,  $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$ . □

El Teorema de Montel, cuya demostración podemos encontrar en [1, Capítulo 1], será de gran utilidad para demostrar las propiedades que siguen:

**Teorema 3.3.9.** (Montel) *Sea  $\mathcal{G}$  una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio  $D$ . Si existen tres valores omitidos para toda  $g \in \mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{G}$  es una familia normal.*

**Proposición 3.3.10.** *Si  $z \in \mathcal{J}(R)$ , para cualquier entorno  $U$  de  $z$  se satisface*

$$\bigcup_n \overline{R^n(U)} = \hat{\mathbb{C}}.$$

*Demostración.* Suponemos que existen tres puntos sin recubrir por la familia  $\{R^n\}_n$ . Por el Teorema de Montel, la familia es normal en  $U$ , por lo que  $z \in \mathcal{F}(R)$ , en contradicción a la hipótesis. En consecuencia,  $\bigcup_n R^n(U)$  recubre  $\hat{\mathbb{C}}$  excepto, como mucho, dos puntos. Al tomar la adherencia, obtendremos el resultado deseado. □

Fijémonos en que, antes de tomar la adherencia, faltan dos puntos por recubrir. Estos dos puntos deben pertenecer a  $\mathcal{F}(R)$ . Para verlo, tomamos  $z_0$ , uno de los puntos sin recubrir. Entonces,  $R(z_0)$  es, o bien fijo, o bien  $z_1$ , el otro punto sin recubrir. Para el punto  $z_1$  es análogo, por lo que  $z_0$  es la única solución de  $R^2(z) = z_0$  y este es un punto fijo superatractor de  $R^2$ , así que  $z_0 \in \mathcal{F}(R^2) = \mathcal{F}(R)$ .

**Proposición 3.3.11.** *Sea  $R$  una función racional. El conjunto de las antiimágenes de  $z_0 \in \mathcal{J}(R)$  es denso en  $\mathcal{J}(R)$ .*

*Demostración.* Sea  $U$  entorno de  $w \in \mathcal{J}(R)$ . Se ha de ver que  $U$  contiene alguna antiimagen de  $z_0$ . Por la proposición anterior, como los iterados de  $U$  por  $R$  recubren  $\hat{\mathbb{C}}$  excepto, como mucho, dos puntos, existe  $k > 0$  tal que  $z_0 \in R^k(U)$ . Por tanto,  $U$  contiene algún punto que bajo iteración acaba en  $z_0$ . □

**Proposición 3.3.12.** *Sea  $R$  una función racional. El conjunto de Julia  $\mathcal{J}(R)$  no contiene puntos aislados, es decir, es un conjunto perfecto.*

*Demostración.* Sea  $z_0 \in \mathcal{J}(R)$  y  $U$  un entorno abierto de  $z_0$ . El objetivo es demostrar que la intersección de  $\mathcal{J}(R)$  con un entorno de  $z_0$  no consiste únicamente en  $z_0$ . Suponemos que  $z_0$  no es un punto periódico y sea  $z_1$  tal que  $R(z_1) = z_0$ . Como  $z_0$  no es periódico,  $R^n(z_0) \neq z_1 \forall n$ . Por tanto, al ser  $\mathcal{J}(R)$  completamente invariante,  $z_1 \in \mathcal{J}(R)$  y, como el conjunto de todas las antiimágenes de  $z_1$  es denso en  $\mathcal{J}(R)$ , existe  $\zeta \in U$  tal que  $R^m(\zeta) = z_1$ . En consecuencia,  $\zeta \in \mathcal{J}(R) \cap U$  y  $\zeta \neq z_0$ .

Por el contrario, suponemos que  $R^n(z_0) = z_0$  siendo  $n$  el periodo. Si  $z_0$  fuese la única solución para  $R^n(z) = z_0$ ,  $z_0$  sería un punto fijo superatractor para  $R^n$ , lo cual contradice que  $z_0 \in \mathcal{J}(R)$ . Entonces, existe  $z_1 \neq z_0$  tal que  $R^n(z_1) = z_0$ . De hecho,  $R^j(z_0) \neq z_1$  para todo  $j$ , pues, en caso contrario, se cumpliría para algún  $0 \leq j < n$  (por periodicidad) y, entonces,  $R^j(z_0) = R^{n+j}(z_0) = R^n(z_1) = z_0$ , contradiciendo la minimalidad de  $n$ . Análogamente al caso anterior,  $z_1$  debe tener una antiimagen en  $U \cap \mathcal{J}$  que no puede ser  $z_0$ .  $\square$

**Proposición 3.3.13.** *Sea  $R$  una función racional y  $z_0$  un punto periódico atractor. Se cumple que:*

$$\mathcal{J}(R) = \partial\mathcal{A}(z_0) = \overline{\mathcal{A}(z_0)} \setminus \text{Int}(\mathcal{A}(z_0))$$

*Demostración.* Veamos las dos inclusiones. Sea  $U$  un entorno de  $z \in \mathcal{J}(R)$ , por la Proposición 3.3.10, inevitablemente existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $R^{n_0}(U) \cap \mathcal{A}(z_0) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $U \cap \mathcal{A}(z_0) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $\mathcal{J}(R) \subseteq \overline{\mathcal{A}(z_0)}$ . Como  $\mathcal{A}(z_0) \subseteq \mathcal{F}(R)$ ,  $\mathcal{J}(R) \cap \mathcal{A}(z_0) = \emptyset$  y  $\mathcal{J}(R) \subseteq \partial\mathcal{A}(z_0)$ .

Recíprocamente, tomamos un punto  $z \in \partial\mathcal{A}(z_0)$ . Cualquier entorno de  $z$  tendrá puntos de  $\mathcal{A}(z_0)$  y de su complementario. Por tanto, no existe entorno donde los iterados de  $R$  son normales y  $\partial\mathcal{A}(z_0) \subseteq \mathcal{J}(R)$ .  $\square$

Un lema útil para demostrar la próxima propiedad es la siguiente, cuya demostración podemos hallar en [1, Capítulo 3].

**Lema 3.3.14.** *El número total de ciclos atractores y neutrales para una función racional de grado  $d$  es, como mucho,  $6d-2$ .*

**Proposición 3.3.15.** *Sea  $R$  una función racional.  $\mathcal{J}(R)$  es la adherencia de los puntos periódicos repulsivos, es decir,*

$$\mathcal{J}(R) = \overline{\bigcup_n \{\text{puntos periódicos repulsivos de } f\}}.$$

*Demostración.* Veamos para empezar que los puntos periódicos son densos en  $\mathcal{J}(R)$ . Suponemos que existe un disco abierto  $D$  que interseca  $\mathcal{J}(R)$  y no contiene puntos fijos de  $R^m$  (precisamente, son los puntos periódicos de periodo  $m$ ). Podemos asumir que  $D$  no contiene ni polos ni puntos críticos de  $R$  pues, según la Proposición 3.2.11, tenemos un número finito de estos. Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos ramas diferentes de  $R^{-1}$  en  $D$ . Como no hay soluciones de  $R^m(z) = z$  en  $D$ , observamos que

$$g_n = \frac{R^n - f_1}{R^n - f_2} \cdot \frac{z - f_2}{z - f_1}$$

omite los valores  $0, 1, \infty$  en  $D$ . Veámoslo:

- $g_n$  omite el valor 0. Se satisface cuando  $R^n - f_1 = 0$  o  $z - f_2 = 0$ . En el primer caso,  $R^n(z) = f_1(z)$  y, como  $f_1$  es una rama de  $R^{-1}$ ,  $z$  es punto fijo de  $R^{n+1}$  y punto periódico de periodo  $n + 1$ , lo cual es una contradicción. En el segundo caso,  $z$  es punto periódico de periodo 1.
- $g_n$  omite  $\infty$ . Análogo al caso anterior.
- $g_n$  omite el valor 1. Suponemos lo contrario: existe  $z \in D$  tal que  $g_n(z) = 1$ , en cuyo caso se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{(R^n(z) - f_1)(z - f_2)}{(R^n(z) - f_2)(z - f_1)} = 1 &\implies (R^n(z) - f_1)(z - f_2) = (R^n(z) - f_2)(z - f_1) \implies \\ \implies R^n(z)z - R^n(z)f_2 - f_1z + f_1f_2 = R^n(z)z - R^n(z)f_1 - f_2z + f_2f_1 &\implies \\ \implies -R^n(z)f_2 - f_1z = -R^n(z)f_1 - f_2z &\implies R^n(z)(f_1 - f_2) = z(f_1 - f_2) \end{aligned}$$

Como  $f_1$  y  $f_2$  son ramas diferentes de  $R^{-1}$ ,  $f_1 \neq f_2$ , por tanto la igualdad anterior resulta en  $R^n(z) = z$ , una contradicción a la hipótesis inicial.

Por el Teorema de Montel, la familia  $\{g_n\}_n$  es normal en  $D$  y por lo tanto  $\{R^n\}_n$  también, hecho que es una contradicción. En efecto, los puntos periódicos son densos en  $\mathcal{J}(R)$ . Además, por el lema anterior, el número de ciclos atractores y neutrales es finito, hecho que, junto a la propiedad de que  $\mathcal{J}(R)$  es perfecto, implica que los ciclos repulsivos son densos, pues son los únicos que pueden serlo.  $\square$

**Observación 3.3.16.** La proposición anterior implica que los puntos fijos repulsivos pertenecen al conjunto de Julia.

### 3.4. Clasificación de las componentes periódicas de Fatou

Aunque el conjunto de Julia presenta un comportamiento caótico e impredecible, el conjunto de Fatou exhibe zonas de comportamiento clasificable. En esta sección se presenta la clasificación de las componentes de Fatou bajo una función racional  $R$ , permitiendo conocer en mayor profundidad la estructura global de  $R$ . Para empezar, un concepto esencial para estudiar las órbitas es el de cuenca de atracción, así como el hecho de que son conjuntos abiertos.

**Definición 3.4.1.** Sea  $R$  una función racional y  $z_0$  un punto fijo atractor de  $R$ . La cuenca de atracción de  $z_0 \in \mathbb{C}$  es el conjunto  $\mathcal{A}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid R^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0\}$ . La cuenca de atracción inmediata de  $z_0$ ,  $\mathcal{A}^*(z_0)$  es la máxima componente conexa de  $\mathcal{A}(z_0)$  que contiene  $z_0$ .

**Proposición 3.4.2.** Sea  $z_0$  un punto fijo atractor de una función racional  $R$ . La cuenca de atracción del punto  $z_0$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Sea un punto  $z_1 \in \mathcal{A}(z_0)$ , del cual queremos hallar un entorno que esté contenido en la cuenca de atracción. Por definición de  $\mathcal{A}(z_0)$ ,  $R^n(z_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$  y, por tanto, existe  $\epsilon > 0$  y  $n > n_0$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $R^n(z_1) \in D(z_0, \epsilon)$ . Denominamos  $\delta = \text{dist}(R^{n_0}(z_1), \partial D(z_0, \epsilon))$  y definimos el abierto  $V := D(R^{n_0}(z_1), \delta/2) \subseteq D(z_0, \epsilon)$ . Por continuidad de  $R$ , existe un abierto  $W$  tal que  $z_1 \in W$  y  $R^{n_0}(W) \subseteq V$ . Por tanto,  $R^{n_0}(W) \subseteq D(z_0, \epsilon)$  y  $\mathcal{A}(z_0)$  es abierto.  $\square$

Ahora que conocemos el concepto de cuenca de atracción y hemos trabajado las familias normales, podemos enunciar dos propiedades más, ya comentadas en la sección anterior.

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $R$  una función racional y  $z_0$  un punto fijo atractor de  $R$ . Entonces  $z_0 \in \mathcal{F}(R)$  y su cuenca de atracción también.*

*Demostración.* Como  $\mathcal{A}(z_0)$  es un conjunto abierto, para cada  $z \in \mathcal{A}(z_0)$  podemos hallar un entorno  $U$  que también pertenezca a  $\mathcal{A}(z_0)$ , es decir, que las iteradas de  $R$  converjan a  $z_0$ . Entonces, sus subsucesiones convergen uniformemente en compactos de  $U$  a  $z_0$ . Por tanto,  $\{R^n\}_n$  es normal en  $U$  y  $z \in \mathcal{F}(R)$ .  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Sea  $R$  una función racional y  $z_0$  un punto fijo atractor de  $R$ . La cuenca de atracción inmediata de  $z_0$  contiene al menos un punto crítico.*

*Demostración.* Para empezar, podemos suponer que  $\lambda \neq 0$ , pues, en caso contrario,  $z_0$  mismo sería un punto crítico y habríamos terminado. Consideramos un entorno de  $U_0 = D(z_0, \epsilon)$  para  $\epsilon > 0$  pequeño. Al aplicar el Teorema 3.2.16, se cumple que  $R(U_0) \subseteq U_0$ . Suponemos que  $\mathcal{A}^*(z_0)$  no contiene ningún punto crítico. En dicho caso, existe una rama  $f$  bien definida de  $R^{-1}$  tal que  $f(z_0)$  y envía  $U_0$  a  $U_1 := f(U_0)$ , donde  $U_0 \subset U_1 \subset \mathcal{A}^*(z_0)$ . Al reiterar este proceso, construimos  $U_{n+1} := f(U_n) \supset U_n$  y extendemos  $f$ . Si el procedimiento no acaba, el resultado es una sucesión de funciones analíticas  $f^n : U_0 \rightarrow U_n$  que omiten  $\mathcal{J}(R)$  y, por tanto, es normal. Sin embargo, como  $z_0$  es un punto fijo repulsor de  $f$ , la familia  $\mathcal{F} = \{f^n\}_n$  no es normal y eso significa que existe un  $U_n$  en el cual no podemos extender  $f$  y  $\mathcal{A}^*(z_0)$  contiene un punto crítico.  $\square$

Las cuencas de atracción son un ejemplo de una región estable del plano, pero la estabilidad no se limita únicamente a la atracción. En el caso de las componentes de Fatou, existen otros comportamientos, que se presentarán seguidamente. La imagen de una componente del conjunto de Fatou es otra componente, y la antiimagen de una componente es la unión disjunta de, como mucho,  $d$  componentes de  $\mathcal{F}(R)$ , donde  $d$  es el grado de  $R$ .

Dada una componente  $U$  de  $\mathcal{F}(R)$ , las posibles órbitas de  $U$  bajo  $R$  son las siguientes:

- Si  $R(U) = U$ ,  $U$  es una componente fija de  $\mathcal{F}(R)$ .
- Si  $R^n(U) = U$  para alguna  $n \geq 1$ ,  $U$  es una componente periódica de  $\mathcal{F}(R)$ . La mínima  $n$  para el cual se satisface es el periodo y, si  $n = 1$ , es una componente fija.
- Si  $R^m(U)$  es periódica para alguna  $m \geq 1$ , es decir,  $R^{m+p}(U) = R^m(U)$  para alguna  $p \geq 1$ ,  $U$  es una componente pre-periódica.
- Si ninguna de las anteriores aplica, todo  $\{R^n(U)\}$  es diferente, y  $U$  es un dominio errante. En otras palabras,  $U$  es errante si  $R^n(U) \cap R^m(U) = \emptyset \forall n \neq m$ .

Se ha mostrado que algunas funciones enteras presentan dominios errantes. Sin embargo, tal como fue demostrado por D. Sullivan, no es el caso de las funciones racionales. Solo enunciaremos el teorema que lo afirma, pero la demostración puede ser hallada en [1, Capítulo 4].

**Teorema 3.4.5.** *(Sullivan) Una función racional no posee dominios errantes.*

Excluida esta posibilidad, solo nos quedan las componentes periódicas del conjunto de Fatou por clasificar. Para ello, reduciremos el estudio al caso fijo, pues el caso periódico puede estudiarse tomando  $R$  por  $R^m$ . En primer lugar, definiremos los posibles algunos objetos que pueden aparecer.

**Definición 3.4.6.** *Sea  $R$  una función racional. Una componente fija  $U$  de  $\mathcal{F}(R)$  es parabólica si en su frontera existe un punto fijo neutral  $\zeta$  para  $R^n$  tal que todos los puntos de  $U$  convergen a  $\zeta$  bajo iteración de  $R^n$ . En ese caso,  $U, R(U), \dots, R^{n-1}(U)$  forman un ciclo parabólico.*

**Definición 3.4.7.** *Sea  $R$  una función racional. Una componente fija  $U$  de  $\mathcal{F}(R)$  es un disco de Siegel si es simplemente conexo y  $R^n$  es conjugada a una rotación.*

Un disco de Siegel lleva consigo otro concepto que no hemos enunciado anteriormente. Así como la dinámica alrededor de un punto fijo se puede linearizar mediante el Teorema de Koenigs, la dinámica alrededor de un punto irracionalmente neutral ser linearizable o no. Si lo es, el punto se denomina punto de Siegel y, si no lo es, punto de Cremer, en los cuales no profundizaremos. Básicamente, en un disco de Siegel hay un punto alrededor del cual las iteraciones de  $R$  están sobre curvas cerradas, invariantes bajo la función, y este punto es el punto de Siegel.

**Definición 3.4.8.** *Sea  $R$  una función racional. Una componente fija  $U$  de  $\mathcal{F}(R)$  es un anillo de Herman si es doblemente conexa y  $R^n$  es conjugada o bien a una rotación en una corona circular, o bien a una rotación seguida de una inversión.*

Para finalizar, enunciamos el teorema de clasificación de las componentes periódicas del conjunto de Fatou asociado a una función racional como resultado de lo que se ha visto. Su demostración puede hallarse en [1, Capítulo 4].

**Teorema 3.4.9.** *Sea  $R$  una función racional y  $U$  una componente fija de  $\mathcal{F}(R)$ . Se satisface, entonces, una de las siguientes posibilidades:*

- $U$  contiene un punto periódico atractor.
- $U$  es parabólico.
- $U$  es un disco de Siegel.
- $U$  es un anillo de Herman.

En las siguientes figuras se pueden apreciar lo que son los discos de Siegel y los anillos de Herman en el plano complejo.

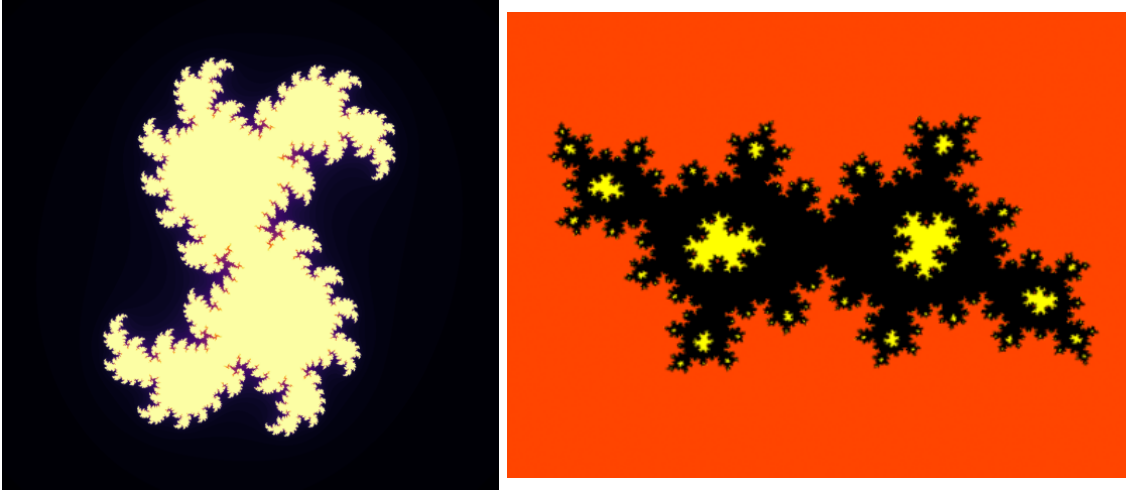


Figura 3.1: Disco de Siegel y anillo de Herman, procedentes de dos funciones diferentes. El primero corresponde a  $g(z) = z^2 + c$ , donde  $c = 0,375 + 0,2i$ . La cuenca de atracción del cero se muestra en amarillo claro, mientras que la del infinito se muestra en negro.

El segundo muestra  $h(z) = \lambda z^2 \frac{az+1}{z+a}$ , donde  $\lambda = e^{2\pi ti}$ ,  $t = 0,6151732$  y  $a = 0,25$ . La cuenca de atracción del cero se muestra en amarillo claro y la del infinito en naranja.

Imágenes realizadas por la autora de la memoria con Matplotlib en Python.

## Capítulo 4

# El método de Newton

Una vez analizada la dinámica de una función racional en el plano complejo, en este capítulo enfocaremos nuestra atención y estudiaremos las propiedades de una clase especial de funciones racionales: aquellas que se obtienen al aplicar el método de Newton a un polinomio, el cual consideramos de grado mayor a 2. Las funciones racionales obtenidas son de interés porque constituyen una familia de funciones no polinomiales cuyas propiedades dinámicas están relacionadas con su utilidad como algoritmo numérico.

Dada una función holomorfa  $f$  en el plano complejo, el método de Newton consiste en un procedimiento numérico que permite aproximar las soluciones de la ecuación  $f(z) = 0$ . Cuando  $f$  es un polinomio  $p$ , el método viene implementado por la aplicación de Newton:

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

Dada una condición inicial  $z_0 \in \mathbb{C}$ , el sistema dinámico generado por la aplicación de Newton es discreto. Es uno de los métodos más conocidos, pues para la mayoría de condiciones iniciales, la sucesión

$$\{z_n = N_p^n(z_0), z_0 \in \mathbb{C}\}_{n \geq 1}$$

converge a una de las raíces del polinomio. Como veremos en este capítulo, los ceros del polinomio corresponden exactamente a los puntos fijos finitos de  $N_p(z)$ . Así pues, de cara al algoritmo, fijamos un valor  $\epsilon > 0$  de error y se considera que  $\alpha = z_n$ , siendo  $\alpha$  uno de los ceros de  $p$ , si  $|z_n - z_{n-1}| < \epsilon$ .

En este capítulo estudiaremos las propiedades de este método, entre ellas, que toda raíz del polinomio  $p$  es punto fijo de  $N_p(z)$  y, además, es atractor e incluso superatractor si el cero es simple. Sin embargo, la función racional resultante tiene un único punto fijo repulsor en el infinito. Por otro lado, demostraremos que las cuencas de atracción de dichos puntos fijos atractores son no acotadas, hecho que introducirá el objetivo del siguiente capítulo.

### 4.1. Propiedades fundamentales del método de Newton

En primer lugar, veamos que podemos aplicar las propiedades que vimos en el capítulo anterior a  $N_p$ , es decir, la aplicación de Newton asociada al polinomio  $p$ . Para ello, debemos asegurarnos de que nos encontramos en el contexto de las aplicaciones racionales.

**Proposición 4.1.1.**  $N_p$  es una aplicación racional. Además, si todos los ceros de  $p$  son simples,  $N_p$  es de grado  $d$ .

*Demostración.* Es evidente al observar que

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{zp'(z) - p(z)}{p'(z)} \quad (4.1.1)$$

donde  $P(z) = zp'(z) - p(z)$  y  $Q(z) = p'(z)$ . Así,  $N_p(z) = P(z)/Q(z)$  y  $N_p$  es una aplicación racional.

Respecto al grado de  $N_p$ , aplicamos la Observación 3.1.3 para ver que el número de antiimágenes de  $\infty$  es  $d$ , siendo  $d$  el grado de  $p$  y, así,  $N_p$  es de grado  $d$ . Por la expresión 4.1.1, la aplicación envía al punto del infinito los ceros de la derivada del polinomio  $p'(z)$ . Como  $p$  tiene grado  $d$ ,  $p'$  tiene grado  $d-1$ . El Teorema fundamental del álgebra nos dice que  $p'$  tiene exactamente  $d-1$  raíces contadas con multiplicidad, que denominaremos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ . Además,  $N_p(\infty) = \infty$  (Proposición 4.1.5), por lo que  $N^{-1}(\infty) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}, \infty\}$ .  $\square$

En lo que resta de la sección, estudiaremos las propiedades de esta aplicación. Es destacable el hecho de que los puntos fijos finitos de  $N_p$  se restringen a las raíces de  $p$ , siendo el único punto finito repulsor el punto del infinito.

**Proposición 4.1.2.** Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $\alpha$  es una raíz del polinomio  $p$  si, y solo si,  $\alpha$  es un punto fijo finito de  $N_p$ . Además,  $\alpha$  corresponde a un punto fijo atractor y, si la raíz es simple, es un punto fijo superatractor.

*Demostración.* Si  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $m \geq 1$ , al ser un polinomio holomorfo y diferente de cero, existe una función  $g$  holomorfa tal que

$$p(z) = (z - \alpha)^m g(z)$$

donde  $g(\alpha) \neq 0$ . Entonces,

$$N_p(z) = z - \frac{(z - \alpha)^m g(z)}{(z - \alpha)^m g'(z) + m(z - \alpha)^{m-1} g(z)} = z - \frac{(z - \alpha)g(z)}{(z - \alpha)g'(z) + mg(z)}$$

Al sustituir  $z$  por  $\alpha$ ,  $N_p(\alpha) = \alpha$  y  $\alpha$  es un punto fijo de  $N_p$ . De hecho, al derivar dicha expresión obtenemos que:

$$N_p'(z) = 1 - \frac{[g(z) + (z - \alpha)g'(z)][(z - \alpha)g'(z) + mg(z)] - (z - \alpha)g(z)h(z)}{[(z - \alpha)g'(z) + mg(z)]^2}$$

donde  $h(z) := g'(z) + (z - \alpha)g''(z) + mg'(z)$ , y al aplicarla a la raíz tenemos que:

$$N_p'(\alpha) = 1 - \frac{mg(\alpha)^2}{m^2g(\alpha)^2} = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$$

Podemos comprobar que  $0 \leq N_p'(\alpha) < 1$  y, por tanto,  $\alpha$  es un punto fijo atractor de  $N_p$ . Además, si  $m = 1$ , el punto fijo es superatractor.

Para ver la implicación recíproca, suponemos que  $N_p(\alpha) = \alpha$ . Por la definición de aplicación de Newton,  $p(\alpha)/p'(\alpha) = 0$ , de forma que  $p(\alpha) = 0$  siempre que  $p'(\alpha) \neq 0$ . Si, por el contrario,  $p'(\alpha) = 0$ ,  $\alpha$  sería infinito, caso que no concierne en esta demostración.  $\square$

Ahora que conocemos la dinámica alrededor de un punto fijo atractor de  $N_p$ , podemos aplicar la teoría del tema anterior para estudiar la eficiencia del método. Según la definición 3.2.2:

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto fijo de  $N_p$ . Entonces, existe un abierto  $U \subseteq \mathbb{C}$  tal que  $z_0 \in U$  y  $\forall z \in U$  se satisface que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} N_p^n(z) = z_0$$

**Corolario 4.1.4.** *Sea  $z_0$  una raíz simple del polinomio  $p$ . El método de Newton aplicado a  $p$  es localmente conjugado a  $z \rightarrow z^k$  para  $k \geq 2$ . Si la raíz no es simple, el algoritmo es localmente conjugado a  $z \rightarrow \frac{m-1}{m}z$ , siendo  $m$  la multiplicidad de la raíz.*

*Demostración.* Es consecuencia de la Proposición 4.1.2 y los teoremas 3.2.16 y 3.2.18.  $\square$

En consecuencia, el método de Newton es menos eficiente cuando la raíz del polinomio no es simple. Por el contrario, en el caso de que la raíz sea simple, el algoritmo converge cuadráticamente.

La siguiente proposición ha sido mencionada anteriormente para demostrar otros resultados, pero ahora la demostraremos detenidamente.

**Proposición 4.1.5.** *El punto del infinito es un punto fijo repulsor de  $N_p$ .*

*Demostración.* Empezamos viendo que el punto del infinito es fijo. Consideramos la aplicación  $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definida por  $\varphi(z) = 1/z$  y el polinomio  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$ . El sistema dinámico generado por  $N_p$  es equivalente vía conjugación al sistema dinámico generado por

$$\widetilde{N}_p(z) = (\varphi \circ N_p \circ \varphi^{-1})(z) = \varphi(N_p(\varphi^{-1}(z))) = \frac{1}{N_p(1/z)}.$$

Sustituimos la expresión de la aplicación de Newton para obtener:

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{p'(1/z)}{\frac{1}{z}p'(1/z) - p(1/z)} = \frac{zp'(1/z)}{p'(1/z) - zp(1/z)}$$

Una vez en este paso, podemos introducir la expresión del polinomio

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^d} \left( \sum_{i=0}^d a_i z^{d-i} \right)$$

y su derivada

$$p'(z) = \sum_{i=0}^d i a_i z^{i-1} \quad \longrightarrow \quad p'\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^d} \left( \sum_{i=0}^d i a_i z^{d-i+1} \right)$$

y obtener que

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{\sum_{i=0}^d i a_i z^{d-i+2}}{\sum_{i=0}^d i a_i z^{d-i+1} - \sum_{i=0}^d a_i z^{d-i+1}} = \frac{\sum_{i=0}^d i a_i z^{d-i+1}}{\sum_{i=0}^d (i-1) a_i z^{d-i}}.$$

La imagen del punto del infinito por esta aplicación es  $\widetilde{N}_p(0) = \frac{0}{(d-1)a_d} = 0$ . Por tanto,  $N_p(\infty) = \infty$ .

Falta por comprobar que es un punto fijo repulsor. Para ello, derivamos la expresión de  $\widetilde{N}_p$ :

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{p(1/z)p''(1/z)}{[p'(1/z) - zp(1/z)]^2}$$

La segunda derivada del polinomio es

$$p''(z) = \sum_{i=0}^d i(i-1)a_i z^{i-2} \quad \longrightarrow \quad p''\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sum_{i=0}^d i(i-1)a_i z^{d-i+2}}{z^d}$$

y la aplicación resulta en

$$\widetilde{N}_p(z) = \frac{\left(\sum_{i=0}^d a_i z^{d-i}\right) \left(\sum_{i=0}^d i(i-1)a_i z^{d-i+2}\right)}{\left(\sum_{i=0}^d i a_i z^{d-i+1} - \sum_{i=0}^d a_i z^{d-i+1}\right)^2} = \frac{\left(\sum_{i=0}^d a_i z^{d-i}\right) \left(\sum_{i=0}^d i(i-1)a_i z^{d-i}\right)}{\left(\sum_{i=0}^d (i-1)a_i z^{d-i}\right)^2}$$

En el cero,  $\widetilde{N}'_p(0) = \frac{a_d^2 d(d-1)}{a_d^2 (d-1)^2} = \frac{d}{d-1} > 1$  y, por tanto,  $N'_p(\infty) > 1$  y el punto del infinito es un punto fijo repulsor de  $N_p$ .  $\square$

**Teorema 4.1.6.** *Sea  $p$  un polinomio de grado  $d \geq 2$  cuyas raíces son simples. La aplicación de Newton asociada a este polinomio tiene exactamente  $d+1$  puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Hemos visto que los puntos fijos de  $N_p$  son exactamente las raíces complejas de  $p$ . Como  $p$  es de grado  $d$  y todas sus raíces son simples, tiene  $d$  raíces complejas diferentes. Sumado al punto fijo que es el infinito, tenemos exactamente  $d+1$  puntos fijos.  $\square$

**Corolario 4.1.7.** *El punto del infinito es el único punto fijo repulsor de  $N_p$ .*

Previo al análisis de las cuencas de atracción, cabe destacar que para un polinomio  $p$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  de grado  $d$ , los puntos críticos de la aplicación de Newton están restringidos a las raíces de  $p$  y sus puntos de inflexión, ya que

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \quad \longrightarrow \quad N'_p(z) = 1 - \frac{(p'(z))^2 - p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}$$

De esta última expresión podemos verificar que, efectivamente, el número máximo de puntos críticos es  $2d - 2$ .

## 4.2. Teorema de distorsión de Koebe

Para demostrar que las cuencas de atracción del método de Newton son no acotadas, es necesario conocer una consecuencia del Teorema de distorsión de Koebe, que enunciaremos a continuación. La demostración del teorema en sí puede hallarse en [5, Capítulo 2].

**Definición 4.2.1.** *Un disco topológico es una superficie homeomorfa a un disco del plano.*

**Definición 4.2.2.** *Una corona es una región abierta del espacio que es doblemente conexa, es decir, cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .*

**Ejemplo 4.2.3.** Una corona circular  $\mathbb{A}$  es el espacio que queda entre dos discos concéntricos de centro  $z_0$  y radio  $r$  y  $R$ :

$$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

Denominamos  $\mathbb{A}_r$  la corona centrada en el origen con  $R = 1$  (y, por tanto,  $r < 1$ ).

**Definición 4.2.4.** Dada una corona  $\mathbb{A}$ , existe una única aplicación holomorfa e inyectiva  $\phi$ , excepto rotación, tal que  $\phi(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_r$ . Este número  $r$  se conserva por aplicaciones de este tipo y permite definir el módulo de  $\mathbb{A}$  como:

$$\text{mod}(\mathbb{A}) = \text{mod}(\mathbb{A}_r) := -\frac{\log(r)}{2\pi} > 0.$$

**Teorema 4.2.5.** (Teorema de distorsión de Koebe). Sean  $U, V$  dos discos topológicos tal que  $\bar{U} \subset V \subset \mathbb{C}$  y sea  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación holomorfa e inyectiva. Consideramos la corona  $\mathbb{A} = V \setminus U$  y denominamos  $m > 0$  su módulo. Existe una constante  $C=C(m)$ , es decir, independiente de  $\phi$ , tal que, para cualquier  $x, y, z \in U$ ,

$$\frac{1}{C}|\phi'(x)| \leq \frac{|\phi(y) - \phi(z)|}{|y - z|} \leq C|\phi'(x)|.$$

Una de las principales consecuencias del Teorema de distorsión de Koebe se expone en corolario siguiente, el cual afirma que ninguna aplicación holomorfa e inyectiva definida en un cierto conjunto  $V$  puede enviar un subconjunto en su interior a una imagen que sea tan delgada como una salchicha, pues esta imagen debe contener un disco de radio comparable al diámetro del subconjunto, como se ilustra en la figura 4.1.

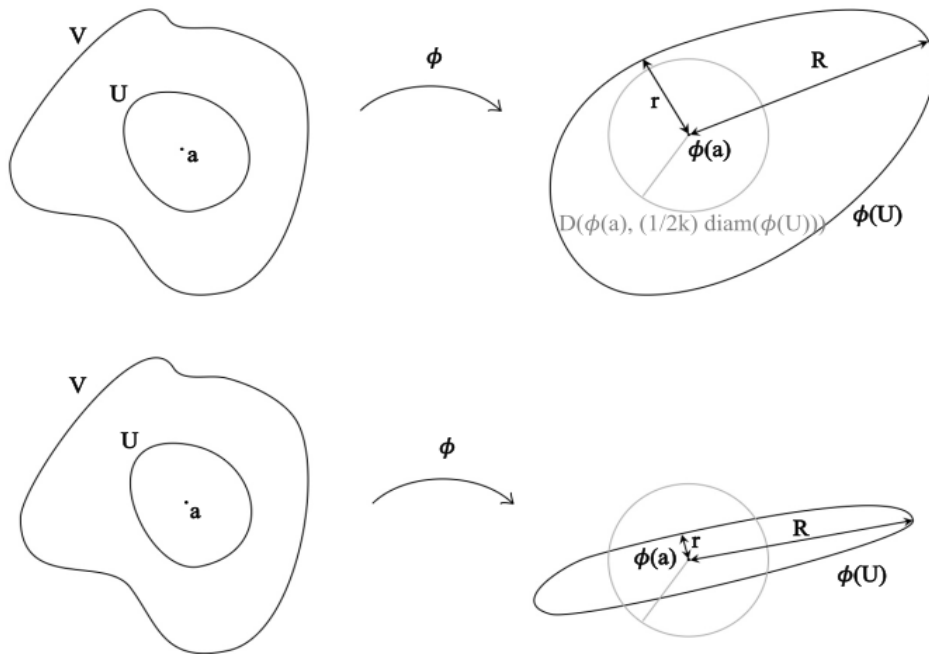


Figura 4.1: Ilustración de una consecuencia del Teorema de distorsión de Koebe. La situación inferior no puede darse. Imagen realizada por la autora de la memoria.

**Corolario 4.2.6.** Sean  $U, V$  dos discos topológicos tales que  $\bar{U} \subset V \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in U$ ,  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación holomorfa e inyectiva y  $m > 0$  el módulo de la corona  $\mathbb{A} = V \setminus U$ . Existe una constante  $k=k(m,a)$  independiente de  $\phi$  tal que

$$D(\phi(a), \frac{1}{2k} \text{diam}(\phi(U))) \subset \phi(U)$$

donde  $\text{diam}(\phi(U))$  es el diámetro, definido como  $\text{diam}(\phi(U)) = \sup\{|z-w| : z, w \in \phi(U)\}$ . Además, si

$$R = \max_{z \in \partial U} |\phi(z) - \phi(a)| \quad , \quad r = \min_{z \in \partial U} |\phi(z) - \phi(a)|$$

entonces

$$1 \leq \frac{R}{r} \leq k.$$

*Demostración.* Aplicamos el Teorema de distorsión de Koebe a los abiertos  $U$  y  $V$  tomando  $x = y = a$  y  $z \in U$  cualquiera tal que  $z \neq a$ , lo cual resulta en el hecho de que existe una constante  $C$  tal que

$$\frac{1}{C} |\phi'(a)| \leq \frac{|\phi(z) - \phi(a)|}{|z - a|} \leq C |\phi'(a)|.$$

Multiplicamos toda la ecuación por  $|z - a|$ :

$$\frac{1}{C} |\phi'(a)| |z - a| \leq |\phi(z) - \phi(a)| \leq C |\phi'(a)| |z - a|.$$

Sea ahora  $z \in \partial U$ . Por la inecuación anterior podemos acotar  $R$  y  $r$ :

$$R \leq C |\phi'(a)| \max_{z \in \partial U} |z - a| \quad , \quad r \geq \frac{1}{C} |\phi'(a)| \min_{z \in \partial U} |z - a|.$$

Dividiendo estas dos expresiones, obtenemos lo siguiente:

$$1 \leq \frac{R}{r} \leq \frac{C^2 \max_{z \in \partial U} |z - a|}{\min_{z \in \partial U} |z - a|} := k$$

Como  $2R \geq \text{diam}(\phi(U))$ , resulta que

$$r \geq \frac{R}{k} \geq \frac{\text{diam}(\phi(U))}{2k}$$

y  $D(\phi(a), \frac{1}{2k} \text{diam}(\phi(U))) \subset \phi(U)$ . Esto implica que para cualquier  $a \in U$ , podemos encontrar un disco centrado en  $\phi(a)$  con un radio comparable al diámetro de  $\phi(U)$ , contenido completamente en  $\phi(U)$ .  $\square$

### 4.3. Cuencas de atracción de la aplicación de Newton

En esta sección demostraremos una propiedad fundamental que nos interesará analizar en el siguiente capítulo para ver si se conserva en un sistema dinámico continuo como es el del flujo de Newton. Para ello, necesitamos un lema previo que se intuye de las afirmaciones de la sección anterior:

**Lema 4.3.1.** *El punto del infinito es el único punto fijo de  $N_p$  contenido en  $\mathcal{J}(N_p)$ .*

*Demostración.* Se ha visto en la Proposición 3.4.3 que los puntos fijos atractores pertenecen al conjunto de Fatou  $\mathcal{F}(N_p)$ . También hemos visto que los puntos fijos repulsores pertenecen a  $\mathcal{J}(N_p)$  en la Proposición 3.3.15 y, junto con el hecho de que el único punto fijo repulsor de  $N_p$  es el infinito, podemos concluir que es el único punto de  $N_p$  incluido en  $\mathcal{J}(N_p)$ .  $\square$

**Proposición 4.3.2.** *Sea  $p$  un polinomio,  $\alpha$  una raíz de este y  $N_p$  la aplicación de Newton asociada. La cuenca de atracción inmediata  $\mathcal{A}^*(\alpha)$  es no acotada.*

*Demostración.* Suponemos que  $\mathcal{A}^*(\alpha)$  es acotada. En ese caso, veremos que existe un punto fijo de  $N_p$  contenido en  $\partial\mathcal{A}^*(\alpha) \subseteq \partial\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{J}(N_p)$ , lo cual será una contradicción con el Lema 4.3.1, pues el único punto fijo de  $N_p$  contenido en el conjunto de Julia es el punto del infinito.

El número de puntos críticos de  $N_p$  en  $\mathcal{A}^*(\alpha)$  es finito, y todos son atraídos por  $\alpha$  al encontrarse en su cuenca de atracción. Así pues, escogemos dos puntos diferentes  $z_0, z_1 \in \mathcal{A}^*(\alpha)$  tal que  $N_p(z_1) = z_0$  y una curva  $\gamma_0$  que los une de forma que

$$\gamma_0 \subset \mathcal{A}^*(\alpha) \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 0} N_p^n(\text{Crit}(N_p) \cap \mathcal{A}^*(\alpha))}$$

siendo  $\text{Crit}(N_p)$  el conjunto de puntos críticos de  $N_p$ . Tomamos dos abiertos  $U_0, V_0$ , que pueden ser discos topológicos, tal que  $\overline{U_0} \subset V_0, \gamma_0 \subset U_0$  y

$$U_0 \cap \overline{\bigcup_{n \geq 0} N_p^n(\text{Crit}(N_p) \cap \mathcal{A}^*(\alpha))} = \emptyset.$$

Dado que en  $U_0$  no hay puntos críticos de  $N_p^n$  para cualquier  $n \geq 0$ , existen ramas bien definidas de  $N_p^{-1}$ . Tomamos  $\varphi_n : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  como la rama  $N_p^{-n}$  tal que  $\varphi_1(z_0) = z_1, z_2 := \varphi_1(z_1), \varphi_2(z_0) = z_2$ , etc. Así, al tomar las imágenes por  $\varphi$  de  $\gamma_0, U_0$  y  $V_0$  es posible definir una curva que une  $z_n = \varphi_n(z_0)$  con  $z_{n+1}$ , denominada  $\gamma_n := \varphi_n(\gamma_0)$ , y los abiertos  $U_n := \varphi_n(U_0), V_n := \varphi_n(V_0)$ .

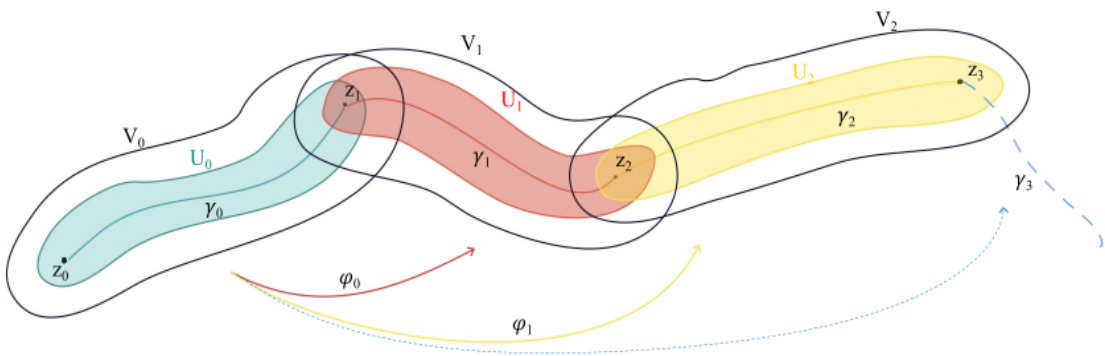


Figura 4.2: Ilustración de los conjuntos construidos. Realizada por la autora de la memoria.

Veamos que  $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \forall n \geq 0$ . Por construcción,  $\gamma_0 \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$ ; suponemos que  $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$  para demostrarlo por inducción. Suponemos que  $\gamma_{n+1} \not\subseteq \mathcal{A}^*(\alpha)$ , en cuyo caso existiría un punto de  $\gamma_{n+1}$  en el conjunto de Julia. Sin embargo,  $N_p(\gamma_{n+1}) = \gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{F}(N_p)$  y, al ser el conjunto de Fatou invariante,  $N_p^{-1}(\mathcal{F}(N_p)) = \mathcal{F}(N_p)$ , de forma que el

punto pertenece al conjunto de Julia y Fatou a la vez. Dichos conjuntos son disjuntos, así que es una contradicción y  $\gamma_n \subseteq \mathcal{A}^*(\alpha) \forall n \geq 0$ .

Como  $\mathcal{A}^*(\alpha)$  es acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que la sucesión  $\{z_n\}_n$  tiene una subsucesión convergente, es decir, que existe  $n_k$  tal que  $z_{n_k} \rightarrow \zeta \subseteq \partial\mathcal{A}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{J}(N_p)$ . Consideramos, entonces, el abierto  $U_{n_k}$  que contiene  $z_{n_k}$  y  $z_{n_k+1}$ . Afirmamos que su diámetro tiende a 0.

Con el objetivo de demostrar dicha afirmación, suponemos lo contrario: existe una sub-sucesión  $n_{k_j}$  y un  $\eta > 0$  tal que  $\text{diam}(U_{n_{k_j}}) > \eta$  cuando  $n_{k_j} \rightarrow \infty$ . Observamos que  $\overline{U_o} \subset V_0$  y que  $\varphi_n$  es una aplicación holomorfa e inyectiva. La consecuencia del Teorema de distorsión de Koebe expuesta en el corolario 4.2.6 nos dice que existe una constante  $0 < \lambda < 1$  independiente de  $\varphi_n$  tal que

$$D(z_n, \lambda \text{diam}(U_n)) \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Concretamente,  $U_{n_{k_j}}$  contiene un disco de radio  $\lambda\eta$  centrado en  $z_{n_{k_j}}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$  y, por tanto, para un valor de  $j$  suficientemente grande existe  $\epsilon > 0, \epsilon < \lambda\eta$  tal que

$$D(\zeta, \epsilon) \subset \bigcap_j U_{n_{k_j}} = \bigcap_j \varphi_{n_{k_j}}(U_o)$$

De esta manera,  $N_p^{n_{k_j}}(D(\zeta, \epsilon)) \subset U_0$  y, como  $\zeta$  es un punto límite de  $\gamma = \bigcup_n \gamma_n$ , la familia  $N_p^{n_{k_j}}$  es normal. En caso contrario, por el Teorema de Montel,  $N_p^{n_{k_j}}$  recubriría todo  $\hat{\mathbb{C}}$  excepto, como mucho, dos puntos, en contradicción con  $N_p^{n_{k_j}}(D(\zeta, \epsilon)) \subset U_0$ . Además, cualquier punto límite de  $\gamma$  ha de estar en la frontera de la cuenca de atracción inmediata y, como resultado, en el conjunto de Julia. No obstante,  $\mathcal{J}(N_p) \cap \mathcal{F}(N_p) = \emptyset$ , así que hemos llegado a una contradicción.

Hemos demostrado que el diámetro de  $U_{n_k}$  tiende a 0. Esto implica que

$$|z_{n_{k+1}} - N_p(z_{n_{k+1}})| = |z_{n_{k+1}} - z_{n_k}| \rightarrow 0$$

y tenemos un punto fijo finito en la frontera de la cuenca de atracción inmediata y, por tanto, en el conjunto de Julia, además del punto del infinito, lo cual es una contradicción.

□

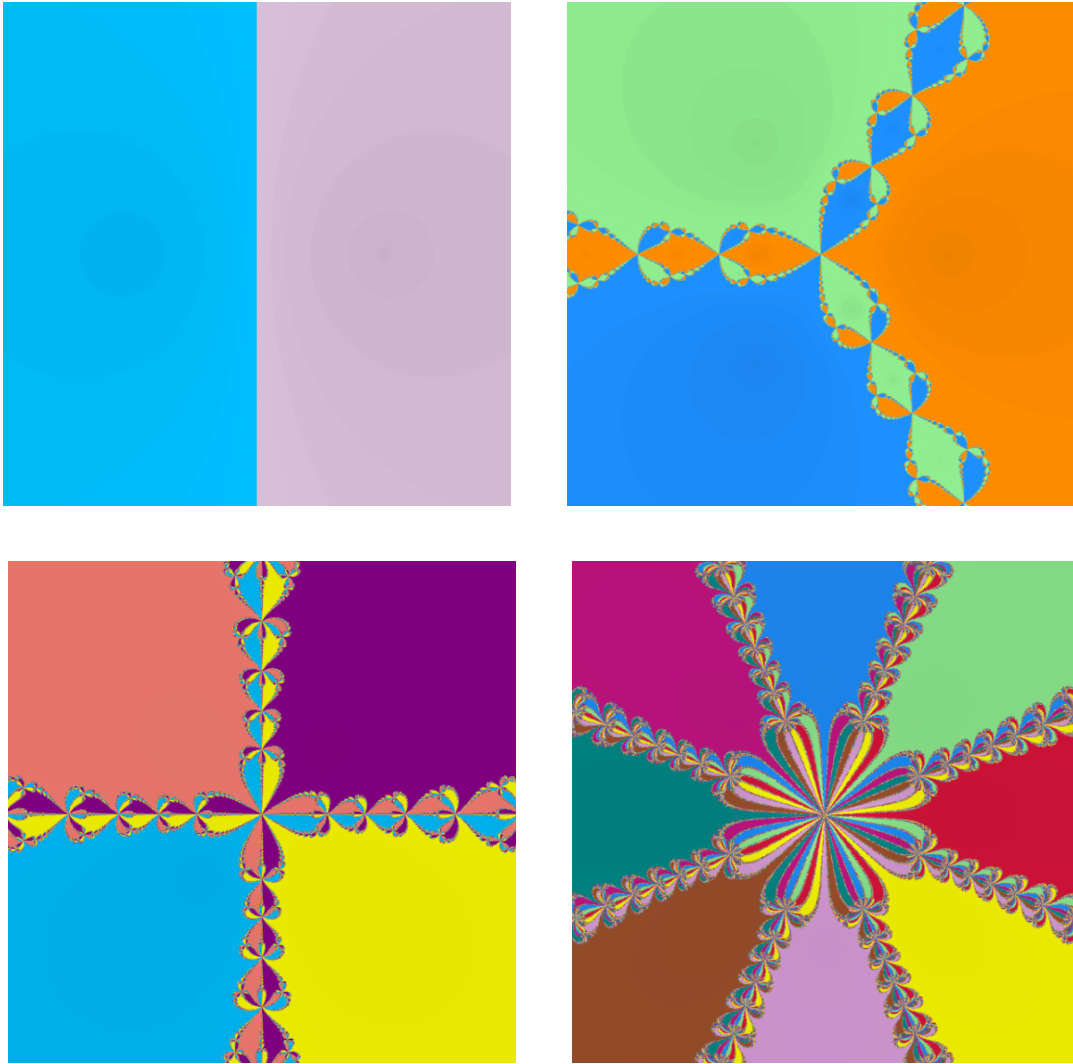


Figura 4.3: Cuencas de atracción de las raíces de un polinomio de grado 2, 3, 4 y 8 al iterar mediante el método de Newton. Imágenes hechas por la autora de la memoria en Matplotlib de Python.

## Capítulo 5

# El flujo de Newton

El capítulo anterior describe con detalle el método de Newton como sistema dinámico discreto. Sin embargo, es objetivo de este trabajo explorar el mismo método como sistema dinámico continuo, donde la solución evoluciona en el tiempo hacia una raíz como una ecuación diferencial. A tal efecto, estudiaremos el sistema dinámico continuo que es el flujo de Newton:

$$\dot{z} = -\frac{p(z)}{p'(z)}$$

Dado este flujo, es posible considerar el método de Newton como su discretización al aplicar el método de Euler a la ecuación diferencial anterior.

$$z_{n+1} = z_n + hf(z_n) \quad \leftarrow \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{p(z)}{p'(z)} = f(z)$$

El resultado obtenido es, en principio, el método de Newton amortiguado, donde existe un parámetro  $h$ ,  $0 < h < 1$ , que define el paso entre dos valores sucesivos. Cuando  $h \rightarrow 0$ , se acerca al flujo continuo, mientras que para  $h = 1$  recuperamos el método de Newton que conocemos.

$$z_{n+1} = z_n + h \left( -\frac{p(z_n)}{p'(z_n)} \right) = z_n - h \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

Con el objetivo de evitar las singularidades que existe en los puntos críticos del polinomio  $p$ , se puede reescalar la ecuación diferencial de la siguiente manera. Multiplicamos y dividimos por el polinomio conjugado de  $p$  y aplicamos que  $w \cdot \bar{w} = |w|^2$ :

$$\dot{z} = -\frac{p(z) \overline{p'(z)}}{p'(z) \overline{p'(z)}} = -\frac{1}{|p'(z)|^2} p(z) \overline{p'(z)}$$

Ahora, podemos considerar la nueva ecuación diferencial como una reparametrización temporal del primero. Bajo esta formulación, es una ecuación diferencial compleja de primer orden del tipo  $\frac{dz}{dt} = f(z)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $f$  es una función analítica en  $\mathbb{C}$ , excepto en algunas singularidades aisladas.

$$\dot{z} = p(z) \overline{p'(z)} =: \tilde{f}(z)$$

Una observación es que un cambio de variables del tipo  $z = x_1 + ix_2$  puede transformar esta expresión en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano real  $\mathbb{R}^2$ , permitiendo así aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = p(x_1 + ix_2) \overline{p(x_1 + ix_2)} =: \tilde{f}_1(x_1, x_2) + i\tilde{f}_2(x_1, x_2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \tilde{f}_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \tilde{f}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Uno de los objetivos principales es describir el retrato de fase del sistema, para lo cual debemos conocer un poco sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

## 5.1. Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

En esta sección recordaremos las nociones fundamentales relacionadas con las ecuaciones diferenciales autónomas, es decir, aquellas cuyas expresiones no dependen explícitamente del tiempo. Hablar de teoría cualitativa implica que no buscaremos soluciones explícitas ni tampoco aproximadas, sino que nos proponemos determinar la forma general de la familia de soluciones mediante su retrato de fase.

Esta sección ha sido redactada utilizando [6] y [8]. También se recomienda consultar los apuntes de la asignatura de grado *Modelos Matemáticos y Sistemas Dinámicos* [7], pues algunos resultados vistos en la asignatura serán aplicados en esta sección.

**Definición 5.1.1.** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega = \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^r(\Omega)$ ,  $r \geq 1$ . La ecuación diferencial de primer orden*

$$\dot{x} = f(x)$$

*se denomina ecuación diferencial autónoma.*

**Definición 5.1.2.** *La curva  $\varphi : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$  en el intervalo abierto  $\mathcal{I}$  si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *Para todo  $t \in \mathcal{I}$ , se satisface que  $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ .*
- *$\varphi$  es derivable y  $\dot{\varphi}(t) := \frac{d}{dt}\varphi(t) = f(\varphi(t))$ ,  $t \in \mathcal{I}$ .*

*Denotamos por  $\varphi(t; t_0, x_0)$  a la solución con  $t_0 \in \mathcal{I}$  para la cual  $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0$ .*

**Notación 2.** *Denotamos  $\mathcal{I}(t_0, x_0)$  como el intervalo maximal de definición de la solución  $\varphi(t; t_0, x_0)$  que resuelve la ecuación diferencial con condición inicial  $x(t_0) = x_0$ .*

La independencia temporal de este tipo de ecuaciones les proporciona una característica especial que permite que resolverlas para un solo tiempo y que el resto sean traslaciones temporales, según el lema siguiente. Por simplicidad, se resuelve para  $t_0 = 0$ . Se denota  $\mathcal{I}(x_0) := \mathcal{I}(0, x_0)$ .

**Lema 5.1.3.** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega = \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r(\Omega)$ ,  $r \geq 1$ . Para el sistema  $\dot{x} = f(x)$  se satisface que  $\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0)$  o, equivalentemente,  $\varphi(t; 0, x_0) = \varphi(t + t_0; t_0, x_0)$ .*

A continuación, veremos unas definiciones que nos permitirán definir lo que es un retrato de fase y las órbitas posibles en él.

**Definición 5.1.4.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de vectores de clase  $C^r(U)$ ,  $r \geq 1$ , es decir, a cada punto  $x \in U$  se le asigna un vector  $X(x) \in \mathbb{R}^n$ .

Se le puede asociar a dicho campo vectorial la ecuación diferencial autónoma definida en 5.1.1, cuyas soluciones son las trayectorias o curvas integrales de  $X$ . Estas son funciones  $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow U$  tales que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \quad t \in \mathcal{I}.$$

**Teorema 5.1.5.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y  $\dot{x} = X(x)$  la ecuación diferencial asociada. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : D \subset \mathbb{R} \times U &\rightarrow U \\ (t, x) &\rightarrow \varphi(t, x) := \varphi(t; 0, x) \end{aligned}$$

donde  $D := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in \mathcal{I}(x)\}$ . Entonces,  $\varphi$  es el flujo local asociado a  $X$  y:

- $D$  es abierto.
- Para todo  $x \in U$  y  $s \in \mathcal{I}(x)$  se cumple
  1.  $0 \in \mathcal{I}(x)$  y  $\varphi(0, x) = x$ .
  2.  $t \in \mathcal{I}(\varphi(s, x))$  si, y solo si  $s + t \in \mathcal{I}(x)$ . Además,  $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$ .

**Definición 5.1.6.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y  $\varphi$  el flujo asociado. La órbita de un punto  $x \in U$  se define como

$$\gamma(x) = \varphi(\mathcal{I}(x), x) \subset U.$$

Esta definición permite definir en  $U$  la relación de equivalencia  $x_1 \sim x_2$  si, y solo si  $x_1 \in \gamma(x_2)$  o, equivalentemente,  $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$ . La partición del espacio de fases  $U$  en órbitas  $U/\sim$  es lo que se denomina retrato de fase.

**Observación 5.1.7.** Los puntos de  $\gamma(x)$  se ordenan con una flecha temporal de forma que si  $x_1 \in \gamma(x_2)$  decimos que  $x_1 \geq x_2$  si, y solo si, existe  $t \geq 0$  tal que  $\varphi(t, x_2) = x_1$ . Esta ordenación no cumple la propiedad antisimétrica, es decir,  $x_1 \leq x_2$  y  $x_2 \leq x_1$  no implica que  $x_1 = x_2$ .

**Teorema 5.1.8.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y  $\varphi$  el flujo asociado. Sea  $x_0 \in U$ ,  $\mathcal{I}(x_0)$  el intervalo maximal y  $\varphi_0 := \varphi(\cdot, x_0) : \mathcal{I}(x_0) \rightarrow U$  la solución improrrogable asociada a  $\dot{x} = X(x)$  con  $x(0) = x_0$ . Sea  $\gamma(x_0)$  la órbita del punto  $x_0 \in U$ . Solo uno de los siguientes casos es posible:

1.  $\varphi_0$  es una inmersión inyectiva y  $\gamma(x_0)$  es una curva abierta y simple.
2.  $\mathcal{I}(x_0) = \mathbb{R}$ ,  $\varphi_0(t) \equiv x_0$  es constante y  $\gamma(x_0) = \{x_0\}$ .
3.  $\mathcal{I}(x_0) = \mathbb{R}$ ,  $\varphi_0(t)$  es periódica no constante y  $\gamma(x_0)$  es una curva cerrada y simple.

En este punto, podemos definir un concepto análogo a lo que es un punto fijo en un sistema dinámico discreto: un punto de equilibrio o singular. Mediante esta clasificación, podremos ver lo que ocurre alrededor de cada uno de los dos tipos de puntos mediante una conjugación a un sistema más sencillo.

**Definición 5.1.9.** Según la notación del teorema anterior, si  $\gamma(x_0) = \{x_0\}$  entonces  $x_0$  es un punto singular (o de equilibrio). En este caso,  $X(x_0) = 0$ ,  $f(x_0) = 0$  y  $\varphi_X(t, x_0) \equiv x_0$ .

En caso contrario,  $x_0$  es un punto regular.

**Definición 5.1.10.** Sean  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $Y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos campos vectoriales de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , y sean  $\varphi_X : D_X \rightarrow U$  y  $\varphi_Y : D_Y \rightarrow V$  los flujos correspondientes. Decimos que  $X$  e  $Y$  son  $C^r$ -conjugados (topológicamente conjugados) si existe una aplicación  $h : U \rightarrow V$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  (un homeomorfismo) tal que

$$(t, x) \in D_X \leftrightarrow (t, h(x)) \in D_Y \quad \text{y} \quad h(\varphi_X(t, x)) = \varphi_Y(t, h(x))$$

El teorema que prosigue, conocido como Teorema del Flujo Tubular, afirma que en un entorno de un punto regular del campo  $X$ , las soluciones son conjugadas a las soluciones del campo trivial.

**Teorema 5.1.11.** (Teorema del flujo tubular) Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^r$  y suponemos  $X(x_0) \neq 0$ . Sea  $Y \equiv (1, 0, \dots, 0)$  el campo vectorial constante definido en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, existen entornos abiertos  $U_0, V_0$  tales que  $p \in U_0 \subset U$  y  $0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$  de manera que  $X|_{U_0}$  es  $C^r$ -conjugado a  $Y|_{V_0}$ .

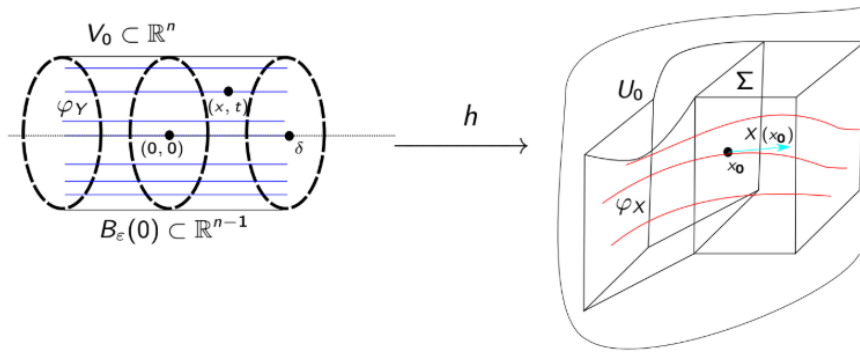


Figura 5.1: Ilustración del Teorema del flujo tubular. Imagen extraída de [6].

Por tanto, el retrato de fase local alrededor de un punto regular es relativamente simple, al poder ser estudiado como un campo conjugado al campo vectorial constante en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, no es tan sencillo en el caso de un punto de equilibrio. En dicho caso, es el Teorema de Hartman-Grobman el que nos permite estudiar el comportamiento cerca de los puntos singulares, al linearizar el sistema y estudiarla mediante los mismos métodos que se aplican al estudiar sistemas lineales.

**Lema 5.1.12.** Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial lineal, es decir,  $X(x) := Ax$ , donde  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ . Denotamos por  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$  los valores propios de  $A$ . Suponemos que  $Re(\lambda_j) \neq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Sean  $E^u$  y  $E^s$  los espacios vectoriales asociados a los vectores propios de los valores propios con parte real positiva y negativa, respectivamente. Entonces, ambos espacios son totalmente invariantes.

**Definición 5.1.13.** Sea  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial lineal,  $X(x) := Ax$ , donde  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ . Denotamos por  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$  los valores propios de  $A$ .

- Si  $Re(\lambda_j) < 0$  para todo  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ , decimos que el origen es un atractor.
- Si  $Re(\lambda_j) > 0$  para todo  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ , decimos que el origen es un repulsor.
- Si  $Re(\lambda_j) < 0$  para  $1 \leq j \leq k$  y  $Re(\lambda_j) > 0$  para  $k+1 \leq j \leq n$ , siendo  $1 \leq k \leq n-1$ , el origen es un punto de silla.

**Definición 5.1.14.** Sea  $x_0$  un punto singular de un campo vectorial  $X$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Se dice que  $x_0$  es un punto de equilibrio hiperbólico si todos los valores propios de  $DX(x)|_{x=x_0}$  tienen parte real diferente de cero.

**Teorema 5.1.15.** (Hartman-Grobman) Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$  y  $x_0 \in U$  un punto singular hiperbólico. Existen entornos  $V$  de  $x_0$  en  $U$  y  $W$  de  $0$  en  $\mathbb{R}^n$  en los cuales el sistema  $\dot{x} = f(x)$  asociado a  $X$  es topológicamente conjugado al sistema lineal  $\dot{y} = DX(x_0)y$ .

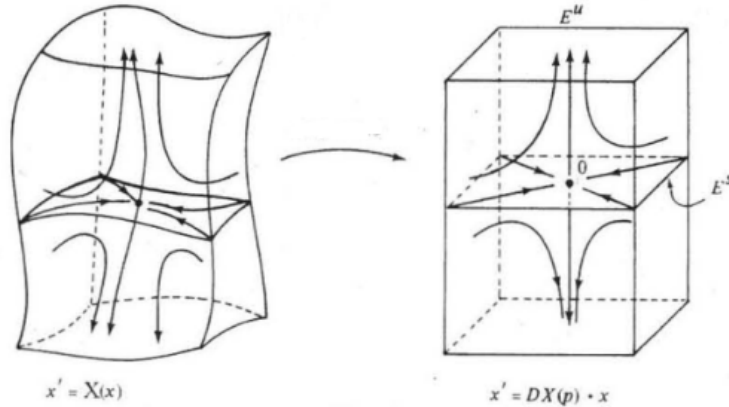


Figura 5.2: Ilustración del Teorema de Hartman-Grobman. Imagen extraída de [8].

Dicho teorema establece la estructura de las órbitas alrededor de un punto singular. A partir de ahora consideraremos directamente sistemas del tipo  $\dot{x} = f(x)$  y aplicaremos la teoría vista en esta sección, ya que hemos visto que podemos asociar sus soluciones al flujo de un campo. Cabe mencionar que utilizaremos frecuentemente el Teorema de existencia y unicidad de soluciones visto en el grado, el cual puede hallarse en [6], para garantizar la existencia de soluciones, las cuales constituirán las órbitas del sistema.

## 5.2. Puntos singulares del sistema complejo $\dot{z} = f(z)$

Hemos visto en la sección anterior que un punto  $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$  es de equilibrio para un sistema  $\dot{x} = f(x)$  si se cumple que  $f(x_1^0, x_2^0) = 0$ . Análogamente, si la expresión de la ecuación diferencial es en notación compleja en el caso de  $\dot{z} = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , un punto  $z_0$  es de equilibrio si, y solo si,  $f(z_0) = 0$ .

En esta sección estudiaremos con más detenimiento dicho sistema alrededor de un punto  $z = z_0$ . Para ello tenemos el siguiente teorema, cuya demostración excede el objetivo de este trabajo, de forma que solo lo enunciaremos. La demostración detallada puede encontrarse en [9].

**Teorema 5.2.1.** Sea  $f(z)$  una función analítica en un entorno perforado de  $p$ , es decir, un entorno de  $p$  sin el punto  $p$ . Entonces, reduciendo el entorno si es necesario, la ecuación  $\dot{z} = f(z)$  es conformalmente conjugado alrededor de  $z_0$  a:

- (a)  $\dot{z} = 1$ , si  $f(z_0) = 0$ .
- (b)  $\dot{z} = f'(z_0)z$ , si  $z_0$  es un cero de orden 1 (es decir,  $f'(z_0) \neq 0$ ).
- (c)  $\dot{z} = z^n - cz^{2n-1}$ , donde  $c = \text{Res}(1/f, 0)$ , si  $z_0$  es un zero de  $f$  de orden  $n > 1$ .

(d)  $\dot{z} = 1/z^n$ , si  $z_0$  es un polo de orden  $n$ .

En la extensión de este trabajo no será necesario considerar el caso (c), pues hemos supuesto que todas las raíces son simples. Aplicaremos este teorema a los puntos singulares del flujo de Newton, que corresponden a los ceros del polinomio al que se aplica y su derivada. Empezamos con los ceros del polinomio.

**Proposición 5.2.2.** *Sea  $\dot{z} = -\frac{p(z)}{p'(z)}$  el flujo de Newton para un polinomio  $p$  de grado  $d \geq 2$ . Si  $z_0$  es un punto de equilibrio, entonces  $z_0$  es atractor.*

*Demostración.* Denotamos  $f(z) = -p(z)/p'(z)$ . En un entorno perforado de  $z_0$ , el flujo de Newton es conformalmente conjugado a la ecuación  $\dot{z} = f'(z_0)z$  por el Teorema 5.2.1. La derivada de  $f$  evaluada en el punto  $z_0$  es:

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \left( -\frac{p(z)}{p'(z)} \right) = -\frac{p'(z)^2 - p(z)p''(z)}{p'(z)^2} = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2} - 1 \quad \longrightarrow \quad f'(z_0) = -1$$

Por tanto, es conformalmente conjugado a  $\dot{z} = -z$ .

Para un sistema lineal del tipo  $\dot{z} = (a + bi)z$ , podemos aplicar el cambio  $z = x + iy$  de manera que

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En nuestro caso,  $a = -1$  y  $b = 0$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene un único valor propio con multiplicidad doble, que es  $\lambda = -1$ , así que  $z_0$  es un punto de equilibrio atractor. Para saber qué tipo de atractor es, calculamos los vectores propios con valor propio  $-1$ . La ecuación  $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$  resulta en  $0 = 0$ , de forma que cualquier vector no nulo en  $\mathbb{R}^2$  es vector propio y las órbitas son líneas rectas entrando a  $z_0$ .  $\square$

**Proposición 5.2.3.** *Sea  $\dot{z} = -\frac{p(z)}{p'(z)}$  el flujo de Newton para un polinomio  $p$  de grado  $d \geq 2$ . Si  $z_0$  es tal que  $p'(z_0) = 0$  pero  $p(z) \neq 0$  después de reescalar el tiempo y obtener  $\dot{z}' = p(z)p'(z)$ , entonces  $z_0$  es un punto de equilibrio de tipo silla.*

*Demostración.* Si  $z_0$  satisface que  $p'(z_0) = 0$ , entonces es un polo de orden 1, ya que hemos supuesto que los polos son simples. Por el Teorema 5.2.1, el flujo es conformalmente conjugado a  $\dot{z} = \frac{1}{z}$  en un entorno de  $z_0$ . Al aplicar el cambio  $z = x + iy$  para trabajar en el plano real, se obtiene un sistema sencillo:

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los dos sistemas tienen las mismas órbitas, de manera que podemos tomar el más sencillo para analizar. En consecuencia, como los valores propios de la matriz del sistema son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -1$ ,  $z_0$  es un punto de silla. Veamos cómo son las órbitas alrededor de  $z_0$ . La ecuación matricial  $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$  es la siguiente:

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \vec{v} = 0$$

Para  $\lambda = 1$ , la única ecuación relevante es  $-2y = 0 \rightarrow y = 0$ , por lo que el eje  $x$  es el subespacio invariante en el que las soluciones tienden a  $z_0$ . En cambio, para  $\lambda = -1$ , la única ecuación relevante es  $2x = 0 \rightarrow x = 0$ , de manera que en el eje  $y$  las soluciones tienden a alejarse de  $z_0$ .  $\square$

Es posible llegar al mismo resultado resolviendo la ecuación  $\dot{z} = \frac{1}{z}$  en los complejos: sea  $\varphi(t)$  una solución de la ecuación con la condición inicial  $\varphi(t=0) = z_0$ , donde  $z_0$  no es un punto de equilibrio como en los dos temas anteriores, sino un punto cualquiera del plano complejo. Dado que es una solución, podemos sustituirla en la ecuación e integrar.

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \rightarrow \dot{\varphi}(t) \cdot \varphi(t) = 1 \rightarrow \int_0^t \dot{\varphi}(s)\varphi(s)ds = \int_0^t ds = t$$

Hacemos el cambio de variable  $\varphi(s) = u$  y, por tanto,  $\dot{\varphi}(s) = \frac{du}{ds}$ . Respecto a los límites de integración, cuando  $s=0$ ,  $u = \varphi(0) = z_0$ ; y cuando  $s=t$ ,  $u = \varphi(t)$ . La ecuación resultante es:

$$\int_{z_0}^{\varphi(t)} u du = t \rightarrow \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{z_0}^{\varphi(t)} = t \rightarrow \frac{\varphi(t)^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} = t \rightarrow \varphi(t) = \sqrt{2t + z_0^2}.$$

$$\boxed{z(t) = \sqrt{2t + z_0^2}} \quad z_0 \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$$

Analizamos esta solución viendo que, al partir de una condición inicial real o imaginaria pura, los ejes son invariantes. En este caso, los ejes coinciden con las separatrices del punto de silla, por lo que nos ayudará a determinar la dinámica alrededor de ellas.

- Si tomamos  $z_0 \in \mathbb{R}$ , resulta que  $z_0 = x_0 + iy_0 = x_0$ , de forma que la solución es  $z(t) = \sqrt{2t + x_0^2}$ . Cuando  $2t + x_0^2 < 0$ , la solución pasa a ser compleja, pero hay que tomar en cuenta que se anula para  $t = -\frac{x_0^2}{2}$  y sería necesaria otra condición inicial para llegar a ella. En consecuencia, el intervalo maximal de definición de las soluciones para los ejes reales es  $\mathcal{I}(z_0) = (-\frac{x_0^2}{2}, \infty)$  y el eje real es invariante.
- Si tomamos  $z_0 \in i\mathbb{R}$ , resulta que  $z_0 = x_0 + iy_0 = iy_0$ , de forma que la solución es  $z(t) = \sqrt{2t - y_0^2}$ . Análogamente al caso anterior, cuando  $2t - y_0^2 > 0$ , la solución es real, pero como se anula para  $t = \frac{y_0^2}{2}$ , es necesaria otra condición inicial para llegar a ella. Como resultado, el intervalo maximal de definición para el eje imaginario es  $(-\infty, \frac{y_0^2}{2})$  y el eje imaginario es invariante.

Conocemos el comportamiento de las soluciones sobre los ejes. El resto se deduce al tomar condiciones iniciales cercanas a ellos, obteniendo el resultado demostrado en el teorema anterior.

### 5.3. Estudio del infinito

Hemos estudiado la dinámica de las soluciones alrededor de los puntos de equilibrio del flujo de Newton, es decir, alrededor de los puntos atractores que son los ceros de  $p(z)$ , y alrededor de los puntos de silla que son los ceros de  $p'(z)$ . Solo nos queda por estudiar las órbitas alrededor del punto del infinito. Recordemos que, en el caso discreto, dicho punto resultaba ser el único punto fijo repulsor de la aplicación de Newton. Similarmente, el punto del infinito es repulsor.

Existen dos compactificaciones del plano real que permiten que el flujo del campo vectorial sea estudiado en el infinito bajo ciertas condiciones. La primera de ellas es la compactificación de Riemann, en la cual el polo norte de la esfera de Riemann representa el infinito. La segunda es la compactificación de Poincaré, en la que la esfera de Poincaré está formada por dos copias del plano, una en cada hemisferio, y el ecuador representa el infinito. Sin embargo, otra forma de visualizarlo es utilizar el cambio de variables  $w = 1/z$ , de manera que  $z = \infty$  corresponde al origen  $w = 0$  en las coordenadas de  $w$ . Así, el Teorema 5.2.1 puede aplicarse para analizar la dinámica alrededor del punto del infinito. Esta es la estrategia que se aplicará en el teorema siguiente, cuya demostración se basa en el Teorema 5.2.1.

Dicho teorema se aplica a clases de conjugación conformales en  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, R)}$ ,  $R \gg 1$ . Esto quiere decir que se toma un entorno suficientemente pequeño del infinito para determinar las órbitas en él.

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $f(z)$  una función racional, i.e.,  $f(z) = P(z)/Q(z)$ , donde  $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$  y  $Q(z) = b_0 + \dots + b_m z^m$  son de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente. Sea  $c$  el residuo de*

$$g(z) = -\frac{Q(1/z)}{z^2 P(1/z)}$$

en  $z=0$ . Existe  $R > 0$  tal que la ecuación diferencial  $\dot{z} = f(z)$  es conformalmente conjugado, en  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, R)}$ , a

- (a)  $\dot{z} = \left(\frac{1}{z}\right)^{m-n} + c \left(\frac{1}{z}\right)^{2(m-n)+1}$ , si  $n < m + 1$
- (b)  $\dot{z} = (a_n/b_m)z$ , si  $n = m + 1$
- (c)  $\dot{z} = 1$ , si  $n = m + 2$
- (d)  $\dot{z} = z^{n-m}$ , si  $n > m + 2$

*Demostración.* Sea  $f$  una función racional. La ecuación diferencial es la siguiente:

$$\dot{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + \dots + a_n z^n}{b_0 + \dots + b_m z^m}, \quad a_n b_m \neq 0$$

Aplicamos el cambio de variables  $w = 1/z$  a esta ecuación:

$$\dot{w} = -w^2 \frac{P(1/w)}{Q(1/w)} = -w^{2+m-n} \frac{a_n + \dots + a_0 w^n}{b_m + \dots + b_0 w^m} = -w^{2+m-n} \left( \frac{a_n}{b_m} + \mathcal{O}(w) \right)$$

Hemos transformado la ecuación de manera que la dinámica en un entorno de  $w=0$  representa la dinámica alrededor de  $z = \infty$ . Aplicamos el Teorema 5.2.1 a un entorno abierto  $D(0, \epsilon_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \epsilon_0\}$  de  $w = 0$ , de manera existe una conjugación entre esta ecuación y:

- (a)  $\dot{w} = w^{2+m-n} + c w^{2(2+m-n)-1}$ , si  $n < m + 1$

- (b)  $\dot{w} = -(a_n/b_m)w$ , si  $n = m + 1$
- (c)  $\dot{w} = 1$ , si  $n = m + 2$
- (d)  $\dot{w} = w^{-n+m+2}$ , si  $n > m + 2$

donde  $c$  es el residuo en el origen de la función

$$g(w) = -\frac{Q(1/w)}{w^2 P(1/w)}.$$

Para los resultados (b) y (c), hemos utilizado que la función correspondiente y su derivada son:

$$\tilde{f}(w) = -w^{2+m-n} \left( \frac{a_n}{b_m} \right) \rightarrow \tilde{f}'(w) = -(2+m-n)w^{1+m-n} \left( \frac{a_n}{b_m} \right)$$

La condición para que  $\tilde{f}$  no se anule es que  $2+m-n=0 \rightarrow n=m+1$ , y para que  $\tilde{f}'$  no se anule,  $1+m-n=0 \rightarrow n=m+1$ . En este último caso,  $\tilde{f}(0) = -a_n/b_m$ , lo cual resulta en las expresiones anteriores. Nótese que el orden de las posibilidades de (a) a (d) no coincide con los del Teorema 5.2.1, pues ha sido ordenado para que la  $n$  vaya de menor a mayor. Ahora, aplicamos el cambio de variable inverso  $z = 1/w$  para volver a las variables originales, de manera que en el entorno de infinito  $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ , donde  $R = 1/\epsilon_0$ , la conjugación es:

- (a)  $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^{n-m} - c\tilde{z}^{2(n-m)-1}$ , si  $n < m + 1$
- (b)  $\dot{\tilde{z}} = (a_n/b_m)\tilde{z}$ , si  $n = m + 1$
- (c)  $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^2$ , si  $n = m + 2$
- (d)  $\dot{\tilde{z}} = -\tilde{z}^{n-m}$ , si  $n > m + 2$

Además, el cambio de variable  $z = \lambda\tilde{z}$ , donde  $\lambda = (-1)^{1/(m-n+1)}$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -1$  y  $\lambda = (-1)^{1/(1-m+n)}$  según los casos (a), (b), (c) o (d) nos da lo que queríamos demostrar.  $\square$

En el caso del flujo de Newton,  $P(z)$  corresponde con  $-p(z)$  y  $Q(z)$  con  $p'(z)$ , de forma que, si el grado de  $p(z)$  es  $d$ , el de  $p'(z)$  es  $d-1$ . Entonces, según la notación del teorema anterior, nos encontramos en el caso en que  $n = m + 1$  y podemos demostrar que el punto del infinito es repulsor a partir de la conjugación que proporciona.

**Corolario 5.3.2.** Sea  $\dot{z} = f(z) = -p(z)/p'(z)$ , donde  $p(z) = a_0 + \dots + a_d z^d$ . Entonces  $\dot{z} = f(z)$  es conformalmente conjugado en  $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$  a

$$\dot{z} = -\frac{1}{d}z.$$

En consecuencia, el punto del infinito es repulsor.

*Demostración.* Tomando la notación del Teorema 5.3.1, fijémonos en que la función racional con la que estamos trabajando es

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = -\frac{p(z)}{p'(z)} = -\frac{a_0 + \dots + a_d z^d}{a_1 + \dots + a_d z^{d-1}}.$$

El coeficiente del término de mayor grado del numerador es  $-a_d$ , mientras que el del denominador es  $a_d d$ . Como  $n = m + 1$ , existe  $R > 0$  tal que la ecuación diferencial  $\dot{z} = f(z)$  es conformalmente conjugado en  $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$  a

$$\dot{z} = \left( \frac{-a_d}{a_d d} \right) z = \left( -\frac{1}{d} \right) z.$$

Por tanto, en las coordenadas de  $w$  (ver demostración del Teorema 5.3.1), es equivalente a

$$\dot{w} = \frac{1}{d}w.$$

Como  $1/d > 0$ , el punto del infinito representado por  $w = 0$  es repulsor. Al aplicar el cambio  $w = x + iy$  de la misma forma que en la Proposición 5.2.2, el sistema de ecuaciones en el plano es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriz tiene como valores propios  $1/d$  y, como  $d$  es un número natural mayor o igual a 2,  $1/d$  es positivo y el punto del infinito es repulsor. Para saber qué tipo de repulsor es y la forma de las órbitas alrededor del punto, podemos calcular los vectores propios. Sea  $A$  la matriz del sistema. La ecuación  $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$  resulta en  $0 = 0$ , lo cual implica que cualquier vector no nulo es vector propio y las órbitas son líneas rectas que salen del punto del infinito.  $\square$

## 5.4. Cuencas de atracción del flujo de Newton

En las secciones anteriores hemos demostrado todo lo necesario para poder plantear una de las principales afirmaciones de este trabajo, que desarrollaremos en esta sección. Habíamos visto que una propiedad fundamental del método de Newton consistía en que las cuencas de atracción de las raíces del polinomio al que se aplicaba eran no acotadas. Proponemos una demostración para la afirmación que enuncia que esta propiedad se mantiene en el estudio del método de Newton como sistema continuo a través del flujo de Newton.

Para empezar, conocemos el concepto de cuenca de atracción en el caso discreto, pero en el caso continuo, está relacionado con el comportamiento de las soluciones.

**Definición 5.4.1.** Sea  $\dot{z} = f(z)$  y  $\varphi(t)$  una solución de la ecuación diferencial. Si  $z_0$  es un punto de equilibrio atractor, se denomina la cuenca de atracción de  $z_0$ ,  $\mathcal{A}(z_0)$ , como:

$$\mathcal{A}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0\}$$

Por otro lado, el Teorema del índice de Poincaré-Hopf es un teorema auxiliar que permitirá analizar los diferentes tipos de puntos singulares y órbitas que pueden existir dentro de una hipotética órbita periódica en nuestra proposición. Su demostración puede hallarse en [10, Capítulo 6].

**Definición 5.4.2.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y  $x_0 \in U$  un cero aislado de  $X$ . La función

$$\tilde{X}(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

envía una pequeña esfera centrada en  $x_0$  a la esfera unidad. El grado de esta aplicación se denomina índice  $i$  de  $X(x)$  en  $x_0$ , o  $i_{x_0}(X(x))$ .

**Teorema 5.4.3.** (Poincaré-Hopf) Sea  $M$  una variedad compacta y  $X$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  en  $M$  con ceros aislados. Si  $M$  tiene una frontera, se requiere que  $X$

apunte hacia el exterior en todos los puntos de la frontera. Entonces,

$$\sum_j i_{x_j}(X(x)) = \chi(M),$$

donde  $x_j$  indica cada cero de  $X$  y  $\chi(M)$  es la característica de Euler de  $M$ . En particular, esta suma de índices es una invariante topológica de  $M$ : no depende de la elección del campo vectorial.

El índice de un punto singular atractor o repulsor es 1, mientras que el índice de un punto singular de tipo silla es -1. Como resultado, al aplicar el Teorema de Poincaré-Hopf a la región interior a una órbita cerrada, como la característica de Euler de la región es 1, la órbita periódica debe contener siempre o un punto atractor, repulsor o centro, o dos de estos y un punto de silla, o combinaciones que resulten en índice 1, pero nunca un punto de silla solamente (o, en general, puntos de índice negativo).

Es pertinente señalar que trabajamos en una variedad de Riemann con estructura compleja, como lo es  $\hat{\mathbb{C}}$ . Sin embargo, la variedad topológica correspondiente es  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , cuya característica de Euler es  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ . De ahí que podemos confirmar que se verifica el Teorema de Poincaré-Hopf para la esfera y el campo vectorial asociado al sistema  $\dot{z} = -p(z)/p'(z)$ : para un polinomio de grado  $d$ , el flujo de Newton posee  $d + 1$  puntos singulares atractores y repulsores, mientras que tiene  $d - 1$  puntos de silla:

$$\sum_j i_{x_j} = 1 \cdot (d + 1) + (-1) \cdot (d - 1) = 2 = \chi(\mathbb{S}^2)$$

Sin embargo, además del Teorema de Poincaré-Hopf, una de las aplicaciones del Teorema de Poincaré-Bendixson también afirma que debe existir un punto singular en el interior de una órbita cerrada. Solo enunciaremos este teorema por su aplicación en la demostración posterior y dicha aplicación, pero están demostradas minuciosamente en [8].

**Definición 5.4.4.** Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  y  $\{\varphi(t, x_0), x_0 \in U\}$  el flujo correspondiente que suponemos definido para todo  $\mathbb{R}$ . Dado  $x \in U$ , se definen los conjuntos siguientes:

$$\alpha(x) = \{y \in U \mid \exists \{t_n\} \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

$$\omega(x) = \{y \in U \mid \exists \{t_n\} \rightarrow \infty \text{ y } \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}$$

**Teorema 5.4.5.** (Poincaré-Bendixson) Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$  con un número finito de puntos de equilibrio. Sea  $K \subset U$  un compacto y  $x \in U$  tal que  $\gamma_+(x) := \{\varphi(t, x); t \geq 0\} \subset K$ . Existen las siguientes posibilidades:

- $\omega(x)$  solo contiene puntos regulares y  $\omega(x)$  es una órbita periódica.
- $\omega(x)$  contiene puntos regulares y singulares y, entonces,  $\omega(x)$  consiste en un conjunto finito de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de los puntos de equilibrio cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Se dice que  $\omega(x)$  es un grafo.
- $\omega(x)$  no contiene puntos regulares y, entonces,  $\omega(x)$  es un único punto de equilibrio.

**Proposición 5.4.6.** Sea  $X$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $\gamma$  una órbita cerrada de  $X$  tal que  $\text{Int}(\gamma) \subset U$ . Entonces, existe un punto singular de  $X$  contenido en  $\text{Int}(\gamma)$ .

Por último, que la aplicación  $f$  en el sistema  $\dot{z} = f(z)$  sea holomorfa tiene implicaciones muy fuertes sobre el comportamiento de las separatrices de los puntos de silla. Esto se debe a que no pueden existir ciclos límites, definición que recordaremos a continuación, o policiclos, que son grafos monodrómicos. El teorema que lo afirma está demostrado en [9].

**Definición 5.4.7.** *Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^r, r \geq 1$ . Sea  $\varphi(t, x)$  el flujo asociado. Decimos que  $\gamma$  es un ciclo límite de  $X$  si  $\gamma$  es una órbita periódica y existe un entorno (tubular)  $V$  de  $\gamma$  tal que no hay otras órbitas periódicas que intersequen con  $V$ .*

**Teorema 5.4.8.** *Sea el sistema  $\dot{z} = f(z)$ , donde  $f$  es una aplicación analítica en  $\mathbb{C}$  excepto, como mucho, en singularidades aisladas. Se satisfacen las afirmaciones siguientes:*

- *No existen ciclos límite. Además, en cualquier entorno de una órbita periódica  $C$  en la cual esté definida la aplicación de retorno, todas las órbitas son periódicas y tienen el mismo periodo que  $C$ .*
- *Si  $\Gamma$  es un grafo monodrómico, en cualquier entorno en forma de anillo de  $\Gamma$  en el cual la aplicación es definida, las órbitas de la ecuación diferencial son periódicas.*

Mediante este teorema, podemos demostrar que no pueden existir órbitas periódicas o grafos en el sistema  $\dot{z} = f(z)$ .

**Lema 5.4.9.** *Sea  $\dot{z} = f(z)$ , donde  $f$  es una aplicación analítica en  $\mathbb{C}$  excepto, como mucho, en singularidades aisladas. Entonces, el sistema no posee ni órbitas periódicas, ni órbitas de tipo grafo.*

*Demostración.* Existen varias posibilidades respecto a las soluciones. Por el Teorema 5.1.8, las órbitas pueden ser curvas abiertas simples, un punto de equilibrio, o una órbita periódica. Además, por el Teorema de Poincaré-Bendixson, el conjunto  $\omega$ -límite puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un grafo. Para demostrar que solo pueden ser curvas abiertas o puntos de equilibrio, suponemos la existencia de cada uno de ellos:

- Suponemos que existe una órbita periódica. No existen ciclos límite, los cuales son órbitas periódicas aisladas, por aplicación del Teorema 5.4.8 al flujo de Newton. En consecuencia, debe estar rodeada de más en un entorno en forma de anillo alrededor de la órbita. Según la Proposición 5.4.6, debe de contener un punto singular en su interior. Además, como resultado del Teorema de Poincaré-Hopf, puede ser un atractor, repulsor o centro, o dos de estos y un punto de silla. En el segundo caso, en cada uno de los policiclos que se forman, tomamos uno, en el cual puede suceder lo mismo, pero repetimos el proceso hasta el que solo quede un punto singular en el interior. El flujo de Newton solo presenta atractores; sin embargo, si alrededor de la órbita son todas órbitas periódicas, el punto singular debe ser un centro, lo cual nos lleva a contradicción.
- Suponemos que existe un grafo. Según el Teorema 5.4.8, si existe un grafo monodrómico, lo cuales serían todas las posibles órbitas si fuesen grafos, existiría un entorno en forma de anillo en el cual todas las órbitas serían periódicas. Por el contrario, hemos visto que no existen órbitas periódicas y, por tanto, no puede existir el grafo.

Como resultado, las órbitas deben ser curvas abiertas o puntos de equilibrio.  $\square$

Llegados a este punto, tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema siguiente, el cual propone que las cuencas de atracción de los puntos singulares atractores del método de Newton son no acotadas.

**Proposición 5.4.10.** *Sea el flujo de Newton  $\dot{z} = p(z)/p'(z)$  y  $\alpha$  una raíz de  $p$ , es decir,  $p(\alpha) = 0$ . Entonces,  $\mathcal{A}(\alpha)$  es no acotada.*

*Demostración.* Sea  $d$  el grado del polinomio  $p$ . Entonces,  $p$  tiene  $d$  ceros y, por tanto,  $p'$  tiene  $d - 1$ . Según las Proposiciones 5.2.2 y 5.2.3, existen en el plano  $d$  puntos atractores, correspondientes a los ceros de  $p$ , y  $d - 1$  puntos de silla, correspondientes a los ceros de  $p'$ .

Acto seguido, afirmamos que existe un abierto  $U \in \mathbb{C}$  (o, a través del cambio de variable  $z = x + iy$ ,  $U \in \mathbb{R}^2$ ) tal que  $U$  es positivamente invariante. Esto quiere decir que, para cualquier condición inicial  $z_0 \in \partial U$ , es decir, en la frontera, la solución de  $\dot{z} = f(z)$ ,  $f(z) = -p(z)/p'(z)$  tal que  $\varphi(0) = z_0$  satisface que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0}, \nabla F \right\rangle < 0, \quad (5.4.1)$$

donde  $F$  es el campo escalar  $F(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2$ , cuyas curvas de nivel (puntos donde la función toma el mismo valor) son círculos concéntricos alrededor del origen  $w = 0$ . Veámoslo. En primer lugar, recordemos que el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel de  $f$ . Para dicho campo el gradiente correspondiente es

$$\nabla F = \left( \frac{dF}{dw_1}, \frac{dF}{dw_2} \right) = (2w_1, 2w_2).$$

Por tanto, el gradiente apunta radialmente hacia afuera del origen. Por otro lado, por el Corolario 5.3.2, dado cualquier  $D(0, r)$  en las coordenadas  $w$ , es decir, en  $z = \infty$ , donde  $r \ll 1$  es suficientemente pequeño, la ecuación que define la dinámica local y sus soluciones de condición inicial  $w = (w_1, w_2)$  son:

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} w \quad \rightarrow \quad \varphi(t, w) = \begin{pmatrix} w_1 e^{\frac{t}{d}} \\ w_2 e^{\frac{t}{d}} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, a medida que crece  $t$ , las soluciones se alejan del origen de manera radial y su módulo crece con la distancia. Entonces, al tomar la curva de nivel de  $F$  que satisface  $F(w_1, w_2) = r^2$ , el gradiente y las órbitas tienen el mismo sentido y el producto escalar (5.4.1) es positivo. Sin embargo, al volver al plano  $z$ , el disco de radio  $r$  pequeño centrado en el infinito es un disco de radio  $1/r \gg 1$ , es decir, de tamaño considerable, alrededor del origen. En cambio, las soluciones ahora apuntan hacia el interior del disco y el producto es negativo.

Una vez tenemos este resultado, tomamos dicho abierto  $U$ , dentro del cual se hallarán todos los ceros de  $p$  y de  $p'$  o, en otras palabras, todos los puntos atractores y de silla del sistema. Por el Lema 5.4.9, sabemos que las órbitas deben ser abiertas y, como resultado, una separatriz de un punto de silla no puede unirse con otra de sí misma. De la misma forma, no pueden unirse dos separatrices de dos puntos de silla a la vez porque formarían un grafo monodrómico. Por último, una de las separatrices podría unirse con una de otro punto de silla, pero siempre que o se cierre el ciclo, no es relevante para nuestro propósito.

Tomamos un entorno  $V$  de un cero  $\alpha$  de  $p$ , el cual será un punto singular atractor. Dicho entorno tiene un número finito de puntos, de los cuales escogemos uno,  $z_1 \in V$  y miramos su órbita a tiempos negativos, es decir,  $t \rightarrow -\infty$ , la cual debe ser una curva abierta simple. El conjunto  $\alpha$ -límite puede ser o un punto de silla, o el vacío. Suponemos que lleva a una de las separatrices de un punto de silla, pues, en caso contrario, la órbita solo puede venir del infinito y esta solución recorre todo el camino hacia el infinito y la cuenca de atracción  $\alpha$  es no acotada. Como no es lo que buscamos, tomamos  $z_2 \in V$  y repetimos el mismo proceso hasta obtener una sucesión  $z_1, z_2, z_3, \dots$  en  $V$  para los cuales ninguno tiene una órbita que alcance el punto del infinito. Sin embargo, como solo pueden existir un número finito de puntos críticos, la sucesión puede tener, como mucho,  $2k$  elementos, donde  $k$  es el número de puntos críticos en  $U$ . Sea  $z_{2k+1} \in V$  el siguiente. A  $t \rightarrow -\infty$ , la única posibilidad es que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, z_{2k+1}) = \infty.$$

□

**Observación 5.4.11.** Si una órbita que empieza en un punto de silla llega a otra, y una de esta llega a otro tercer punto de silla y sucesivamente, no influye en nuestra demostración más allá de provocar que se acelere el proceso, pues el número de órbitas que empezaron en un punto de silla al tomar un punto en el entorno de un cero es menor.

**Observación 5.4.12.** En el caso discreto, demostramos que las cuencas de atracción inmediatas eran no acotadas. Sin embargo, no hemos tenido en cuenta esta restricción ya que, en este caso,  $\mathcal{A}(\alpha)$  es siempre conexo. Para verlo, basta con tomar dos puntos en él y observar la órbita en tiempo positivo, pues como a  $t \rightarrow \infty$ , se cumple  $\varphi(t) \rightarrow \alpha$ , esta solución conecta los dos puntos. Al ser arco-conexa, es conexa.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Esta memoria ha estado dedicada al estudio en los complejos del método de Newton aplicado a polinomios, tanto en su versión discreta como en su versión continua. Era un método conocido a lo largo del grado, pero nunca explorado con tanta profundidad como en este trabajo.

En primer lugar, se ha explorado la dinámica del método de Newton discreto, ampliamente estudiado en la literatura. En este caso, es bien sabido que las cuencas de atracción de las raíces son conjuntos no acotados, una propiedad que se refleja en las estructuras fractales que surgen al observar las regiones de convergencia de cada raíz en el plano complejo. A lo largo del trabajo, se han ilustrado estos fenómenos mediante ejemplos concretos.

En el caso continuo, se han analizado los comportamientos cualitativos del flujo de Newton, incluyendo las regiones de atracción, la dinámica en torno a los puntos críticos, y el tratamiento riguroso del comportamiento en el entorno del infinito. El resultado central alcanzado ha sido la demostración de que las cuencas de atracción del método de Newton continuo también son no acotadas. Esta conclusión extiende al régimen continuo una propiedad fundamental del método discreto.

En conjunto, este trabajo ha permitido establecer un puente claro entre ambas formulaciones del método de Newton. La comparación entre las dinámicas discreta y continua, apoyada en herramientas teóricas y en un análisis cuidadoso, ha puesto de manifiesto la profundidad del método de Newton como objeto de estudio dentro de la dinámica compleja.

# Bibliografía

- [1] Carleson, L.; Gamelin T. W.: *Complex Dynamics*.
- [2] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis. An introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, Inc.
- [3] Rosado, D.: *El mètode de Newton com a sistema dinàmic*. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona, 2022.
- [4] Beardon, A. F. *Iteration of rational functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Springer-Verlag.
- [5] McMullen, C. T. *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press (1994).
- [6] Jarque, X.: *Apunts d'Equacions Diferencials*.
- [7] Fagella, N.: *Apunts de Models Matemàtics i Sistemes Dinàmics*.
- [8] Sotomayor, J: *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNP, 1979.
- [9] Garijo, A.; Gasull, A.; Jarque, X.: Local and global phase portrait of equation  $\dot{z} = f(z)$ . *Discrete and continuous dynamical systems of the American Mathematical society*, 17(2), 2007.
- [10] Milnor, J. W.: *Topology from the differentiable viewpoint*. University press of Virginia, 1965.
- [11] <https://mathematica.stackexchange.com/questions/15047/how-to-draw-fractal-images-of-iteration-functions-on-the-riemann-sphere>