Análisis Dinámico: Integración

Jesús Getán y Eva Boj

Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Mayo de 2017

Podemos pensar que el origen de la integración está en la búsqueda de solución a dos problemas,

1) Dada una función $f(x)$ definida en un dominio D abierto, halla una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D$. (Se puede ver como operación inversa de la derivación).
2) Dada una función $f(x)$ definida en un dominio D, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in D$, dar una definición del área entre la curva $y = f(x)$ y el eje OX que no recurra a la intuición geométrica.

Por simplificar, en lo que sigue estudiaremos el caso de una sola variable y limitándonos al caso de que la función f sea continua en D. En algunos momentos estudiamos el caso de una función que tiene un número de discontinuidades finito en D.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$.

Definition

Llamaremos **integral indefinida** (brevemente **integral**) de la función $f(x)$ definida en $[a, b]$, a una función $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

La escribiremos

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante.

Vamos a explicar la presencia de la constante C.

Antes, recordamos el siguiente Teorema

Theorem

Sea $f(x)$ una funcion derivable en un dominio abierto D. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in D$, entonces $f(x) = c$ para todo $x \in D$ y para alguna constante c.

Suponemos que $G(x)$ es otra integral de $f(x)$, entonces $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Con estas hipótesis podemos enunciar

Theorem

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos integrales indefinidas de la misma función $f(x)$ entonces, las funciones F y G difieren en una constante.

Dem: Dadas $F(x)$ y $G(x)$ definidas para todo $x \in (a, b)$, construimos la función diferencia $F(x) - G(x)$. Como ambas son derivables en (a, b), la diferencia también lo será. Por tanto

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad (1)$$

y, en vitud del Teorema anterior, tenemos que $F(x) - G(x) = C$, que reescrito nos da

$$F(x) = G(x) + C.$$

Este resultado nos sugiere que la solución de una integral indefinida es una familia de funciones que depende de un parámetro C.

Propiedades:

Dada la integral

$$\int f(x)\,dx,$$

podemos enunciar algunas propiedades generales para simplificar el cálculo de las integrales que se llaman propiedades de linealidad.

Primera propiedad:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Que se deduce del hecho de que $(kF(x))' = kF'(x)$.

Segunda propiedad:

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Que se deduce del hecho de que
$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x)$.

Tercera propiedad:

$$\int \left(k_1 f_1(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)\right) dx = k_1 \int f_1(x) \pm \cdots \pm k_n \int f_n(x).$$

Que es una combinación de las reglas anteriores.

Cálculo de integrales

El problema que resolvemos en esta Subsección es el de encontrar una función integral $F(x)$ para la integral

$$\int f(x)\,dx.$$

Con el objeto de calcularlas de una manera sencilla, podemos o bien clasificarlas en tipos sencillos y fácilmente reconocibles o bien dar reglas generales de cálculo sencillas.

Integrales inmediatas

Como regla de clasificación en tipos sencillos y fácilmente reconocibles, podemos enunciar

Definition

Sea dada la integral

$$\int f(x)\,dx.$$

Decimos que una integral es inmediata cuando, para solucionarla sólo se requiere recordar las fórmulas elementales de derivación.

Veamos un ejemplo:

Calcular

$$\int x \, dx.$$

Solución $\quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$

Denotaremos por $u = u(x)$ una genérica función real de variable real.

$\int u^n u' dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C.$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln(u) + C.$
$\int e^u u' dx = e^u + C.$	$\int a^u u' dx = \frac{1}{\ln a} a^u + C.$
$\int \sin(u) u' dx = -\cos(u) + C.$	$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} dx = \tan(u) + C.$
$\int \cos(u) u' dx = \sin(u) + C.$	$\int \frac{-u'}{\sin^2(u)} dx = ctan(u) + C.$
$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C.$	$\int \frac{-u'}{1+u^2} dx = arcctan(u) + C.$
$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C.$	$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arccos(u) + C.$
$\int \tan(u) u' dx = -\ln\cos(u) + C.$	

Las integrales inmediatas, junto con la propiedad de linealidad de la integral indefinida y la regla de la cadena del cálculo de derivadas nos permitirá calcular de manera sencilla muchas integrales indefinidas.

Integrales por cambio de variable

Sea dada la integral

$$\int f(x)\; dx.$$

Con el fin de simplificar la integral, podemos definir una nueva variable $t = g(x)$ de tal manera que podamos despejar fácilmente la variable original x, resultando $x = h(t)$ que al derivar nos da $dx = h'(t)\; dt$.

Al sustituir en la integral x y dx por los elementos respectivos, resolver y por último deshacer el cambio, obtenemos

$$\int f(x)\ dx = \int f(h(t))\ h'(t)\ dt = G(t) + C = G(g(x)) + C.$$

Calcular

$$\int 3x^5 e^{x^6}\ dx.$$

La solución es:

Hacemos el cambio $t = x^6$, entonces $dt = 6\ x^5\ dx$ de donde $x^5\ dx = \frac{dt}{6}$.

Al sustituir en la integral

$$\int 3x^5 e^{x^6}\ dx = \int 3e^t\ \frac{dt}{6} = \frac{3}{6}\int e^t\ dt = \frac{1}{2}e^{x^6} + C.$$

Integrales por partes

Sean dos funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$. Si derivamos su producto obtenemos

$$(uv)' = (u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x),$$

al integrar la expresión se obtiene

$$\int (u(x)\,v(x))'\,dx = \int u'(x)\,v(x)\;dx + \int u(x)\,v'(x)\;dx.$$

Reordenando y simplificando da

$$\int u(x)\, v'(x)\ dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\ dx,$$

siendo esta expresión muy útil para la resolución de integrales.

Calcular

$$\int xe^x \, dx.$$

La solución es:

$$\int xe^x \; dx = xe^x - \int e^x \; dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^x \; dx & v = e^x \end{array}$$

Integrales polinómicas racionales

Son integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con coeficientes reales y los grados de los polinomios son $\mathrm{grad}P(x)$ y $\mathrm{grad}Q(x)$.

La forma de resolverlas consiste en transformar los cocientes en suma de fracciones simples.

CASO 1. Si $\text{grad}P(x) < \text{grad}Q(x)$.

Descomponemos el polinomio $Q(x)$ en factores primos (i.e. usando la regla de Ruffini)

Veamos primero el caso en que todas las raíces son reales y simples, por ejemplo

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_k)$$

y transformamos el cociente en suma de fracciones simples de la siguiente forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_k}{x - a_k},$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, \cdots, A_k$ son a determinar.

Resultando la integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_k}{x-a_k}\,dx,$$

siendo todas inmediatas.

Ahora estudiamos el caso de que exista alguna raíz de multiplicidad l. Por ejemplo

$$Q(x) = (x-a)^l$$

y transformamos el cociente en suma de fracciones simples de la siguiente forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x-a)^l},$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, \cdots, A_l$ son a determinar.

Resultando la integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_l}{(x-a)^l}\,dx,$$

siendo todas inmediatas.

CASO 2. Si $\mathrm{grad} P(x) \geq \mathrm{grad} Q(x)$.

Efectuamos la división de los polinomios, resultando $P(x) = c(x)\, Q(x) + r(x)$ donde $c(x)$ es el cociente y el $r(x)$ resto de la división. Finalmente, resolvemos la integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \right) dx = \int c(x)\ dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\, dx,$$

donde la última integral, como $\mathrm{grad} r(x) \leq \mathrm{grad} Q(x)$, se resuelve como en el CASO 1.

Calcular

$$\int \frac{5}{x^2 - 3x + 2}\, dx.$$

La solución es:

Primero miramos los grados de los polinomios y notamos que $\operatorname{grad} P(x) = 0 < 2 = \operatorname{grad} Q(x)$. Por tanto estamos en el Caso 1.

Por Ruffini tenemos que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

entonces la suma de fracciones simples será de la forma

$$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2},$$

Veamos un procedimiento de cálculo de los coeficientes:

$$\frac{5\,(x-1)\,(x-2)}{x^2-3x+2} = \frac{A_1\,(x-1)\,(x-2)}{x-1} + \frac{A_2\,(x-1)\,(x-2)}{x-2},$$

$$\begin{array}{ll} \text{al simplificar} & 5 = A_1\,(x-2) + A_2\,(x-1)\,, \\ \text{desarrollando} & 5 = A_1x - 2A_1 + A_2x - A_2, \\ \text{reagrupando} & 5 = (A_1 + A_2)\,x - 2A_1 - A_2, \end{array}$$

Aplicando la regla que dice, dos polinomios son iguales si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales. Resulta el sitema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 = 0 \\ -2A_1 - A_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = -5 \text{ y } A_2 = 5.$$

Por tanto, la integral queda como sigue:

$$\int \frac{5}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-5}{x-1}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx$$

$$= -5\ln(x-1) + 5\ln(x-2) + C.$$

Calcular

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}\, dx.$$

La solución es:

Primero miramos los grados de los polinomios y notamos que $\operatorname{grad} P(x) = 2 \geq 1 = \operatorname{grad} Q(x)$. Por tanto estamos en el Caso 2.

Efectuando la división obtenemos que

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} = x + 1 + \frac{6}{x - 4},$$

luego la integral es

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}\, dx = \int (x + 1)\, dx + \int \frac{6}{x - 4}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 6 \ln (x - 4) + C.$$

Definition

Llamaremos **integral definida** de la función $f(x)$ definida en $[a, b]$, a

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

donde $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Se conoce como **Regla de Barrow**.

Dada la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

podemos enunciar algunas propiedades generales para simplificar el cálculo de las integrales definidas

Primera propiedad: Propiedad aditiva en el intervalo $[a, b]$.

Si $c \in (a, b)$ tenemos que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Segunda propiedad: Sobre los límites de integración

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Tercera propiedad:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cuarta propiedad:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx.$$

Quinta propiedad:

Sean $f, g \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Sexta propiedad:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Ejemplo de función definida a tramos:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0,1), \\ 1 & \text{si } x \in [1,4]. \end{cases}$

Calcular la integral

$$\int_0^4 f(x)dx.$$

Solución:

$$\int_0^1 x^3 dx + \int_1^4 1dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + [x]_1^4 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}.$$

Función integral

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ con la característica de que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Definition

Llamaremos **función integral** de la función $f(x)$ definida en $[a, b]$, a una función $A(x)$ definida por

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a) \text{ para todo } x \in [a, b] .$$

En general la escribiremos

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C \text{ para todo } x \in [a, b] ,$$

donde C es una constante.

Entendemos como función integral a la función que se define cuando uno de los extremos del intervalo de integración para una función $f(x)$ es de carácter variable, con tal de que $f(x)$ conserve su carácter de integrable dentro del intervalo en cuestión.

Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo del área de una función positiva en un intervalo

Dada $f(x) = x + 4$, calcular el área en el intervalo $[1, 3]$:

$$\int_1^3 (x+4)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^3 = 12.$$

Cálculo del área de una función negativa en un intervalo

Dada $f(x) = x^2 - 4x + 3$, calcular el área en el intervalo $[1, 3]$:

$$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}.$$

El área es igual a $\frac{4}{3}$.

Cálculo del área de función que alterna signo en un intervalo

Dada $f(x) = x^2 - 4x + 3$, calcular el área en el intervalo $[0, 3]$:

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3} - (-\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}.$$

Cálculo del área entre dos funciones

Calcular el área comprendida entre la recta $f(x) = x + 3$ y la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Primero calculamos los puntos de intersecció de la recta y la parábola $(x, y) = (0, 3)$ y $(x, y) = (5, 8)$.

Podemos ver gráficamente que la recta está por encima de la parábola. Aunque no es necesario si utilizamos el valor absoluto.

$$\int_0^5 ((x+3)-(x^2-4x+3))dx =$$

$$\int_0^5 (-x^2+5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}.$$

Generalizando todo lo anterior, tenemos la siguiente regla:

Supongamos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, con puntos de corte de abcisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. El área comprendida entre ambas funciones se calcula como:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\ dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x) - g(x)\ dx\right| + \cdots +$$

$$\left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) - g(x)\ dx\right|.$$

Aplicaciones económicas: Coste total con base al coste marginal.

Sea $C'(x) = x^3 + 2x$ el coste marginal de generar la x-ésima unidad de un cierto producto. Hallar el coste total suponiendo que los costes fijos son 45 u.m.

¿Cuánto cuesta producir 100 unidades?

Nota: También se puede hacer un ejemplo parecido con el ingreso marginal.

La solución es:

La función costes totales, $CT(x)$, será la suma de los costes variables, $CV(x)$, más los costes fijos, CF:

$$CT(x) = CV(x) + CF = \int_0^x (t^3 + 2t)\, dt + 45 = \frac{x^4}{4} + x^2 + 45.$$

El coste total de producir 100 unidades será:

$CT(100) = \int_0^{100} \left(t^3 + 2t\right) dt + 45 = \frac{100^4}{4} + 100^2 + 45 = 25.010.045$ u.m.