Exercicis de Matemàtiques I pels graus d'Economia i Empresa

Càlcul

Oriol Roch Casellas
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Facultat d'Economia i Empresa
Universitat de Barcelona

Índex

1 Dominis i corbes de nivell **3**

2 Derivada parcial **14**

3 Aplicacions de la derivada **16**

4 Derivada direccional **19**

5 Derivació parcial successiva **21**

6 Derivació de funcions compostes **23**

7 Derivació de funcions definides implícitament **25**

8 Funcions homogènies **27**

1 Dominis i corbes de nivell

Exercicis

1. Dibuixeu el domini de les següents funcions i determineu si es tracta d'un conjunt obert, tancat, fitat i convex.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

   (c) $f(x,y) = \ln\left(y-x^2\right)$

   (d) $f(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x}}$

   (e) $f(x,y) = \ln(1-y)\sqrt{1-x^2-y^2}$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{\frac{2x-y}{x+y}}$

   (g) $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$

2. Dibuixeu les corbes de nivell de les funcions:

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2$

   (b) $f(x,y) = xy$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{x/y}$

   (d) $f(x,y) = (x+2)^2+(y-4)^2$

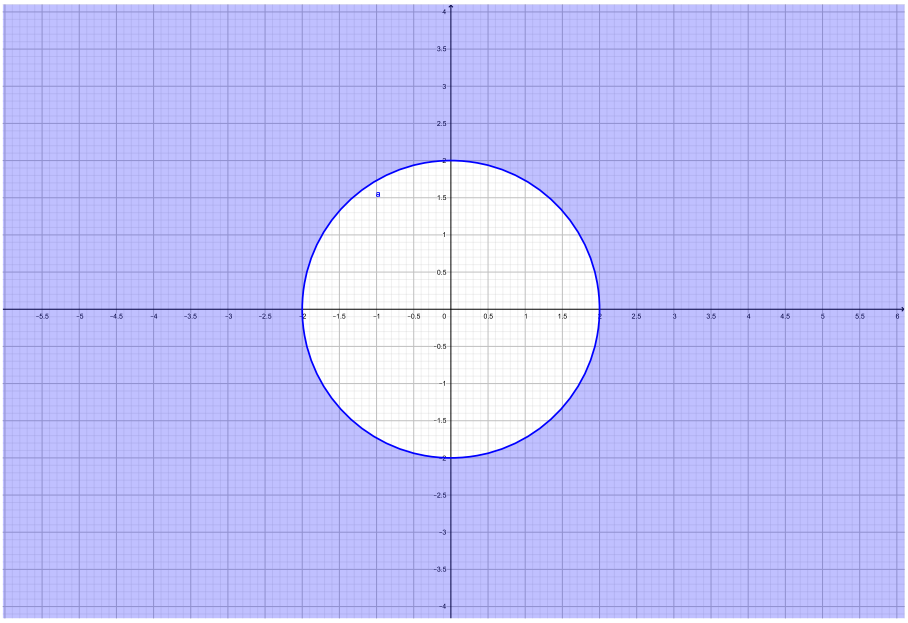
   (e) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y-4}}$

Solucions

1. (a) En primer lloc observem que es tracta d'una funció arrel quadrada. Per tant, l'argument de l'arrel quadrada no pot ser negatiu, ja que en cas contrari, al avaluar la funció no obtindríem un nombre real. Només són vàlides aquelles combinacions de x, y tals que $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$. Podem escriure el domini com el conjunt

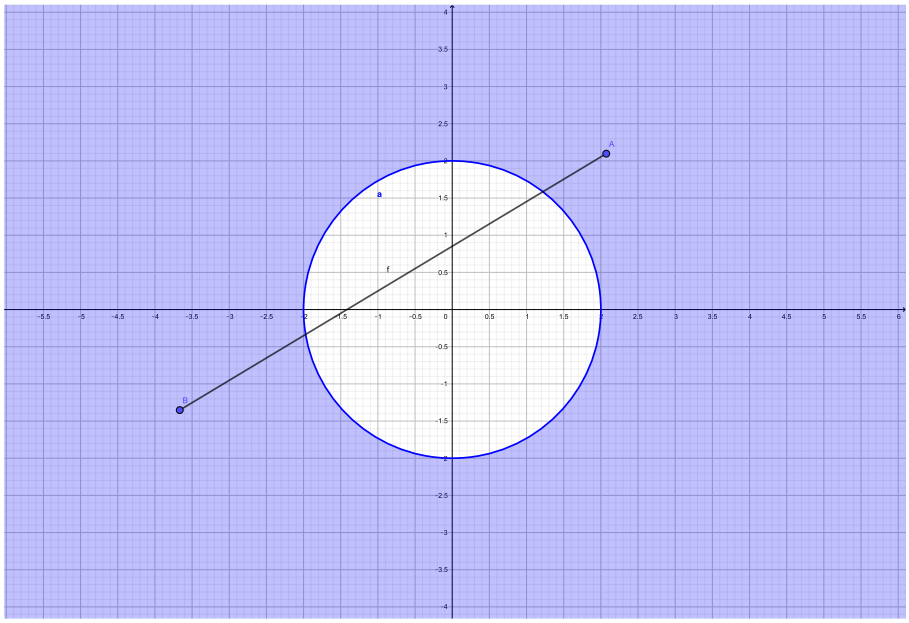
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4 \geq 0\}.$$

Observem que aquests són els punts que queden fora d'una circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 2. De forma gràfica, tenim



.

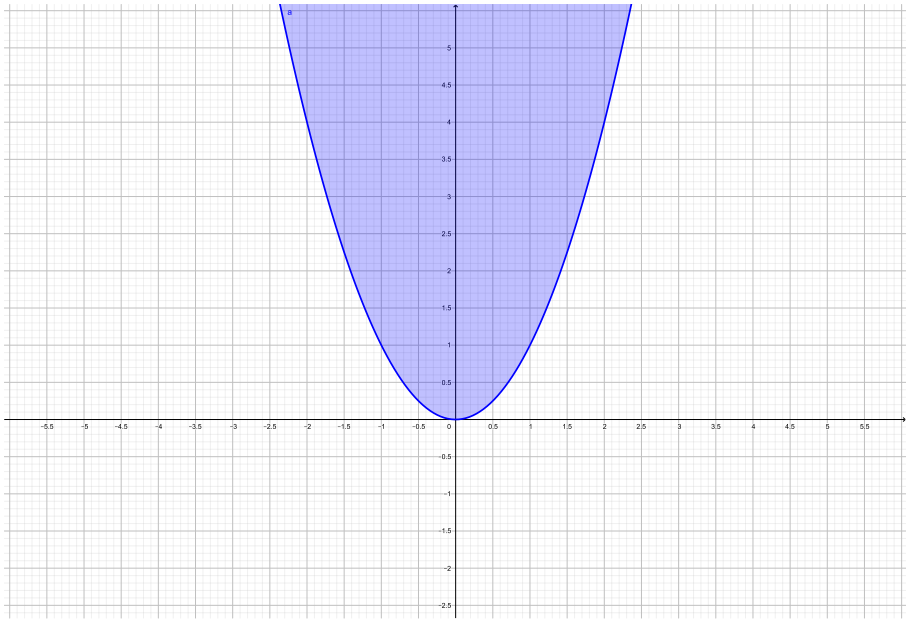
També observem que la frontera està formada per punts de la circumferència. Com aquests punts no estan inclosos en el domini, el domini és obert. Com la frontera no està tota inclosa en el conjunt, el domini és tancat. Com el domini s'estén cap a l'infinit i no es pot contenir dins de cap bola de radi finit, el conjunt és no fitat (o no acotat). Per últim, i tal com podem comprovar en el següent gràfic, podem trobar dos punts del domini tals que el segment que el uneix queda fora del domini. Per tant, el domini no és convex.



(b) De forma semblant a l'apartat anterior, al tractar-se d'un funció arrel quadrada, els punts del domini han de complir la restricció $y - x^2 \geq 0$, o el que és el mateix, $y \geq x^2$. Així, el domini és el conjunt

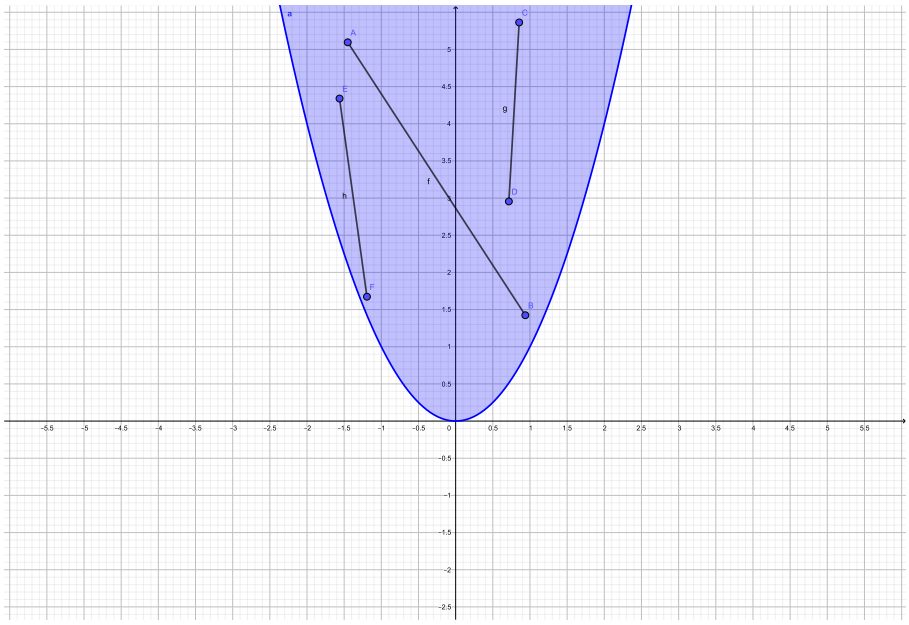
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}.$$

Es tracta dels punts que queden dins la paràbola $y = x^2$. Gràficament, tenim



En aquest cas la frontera del domini és la paràbola, que s'inclou dins del domini (tots els punts de la paràbola compleixen la condició $y \geq x^2$, com per exemple el punt $(2, 4)$, ja que $4 \geq 2^2$). Per tant, el domini es un

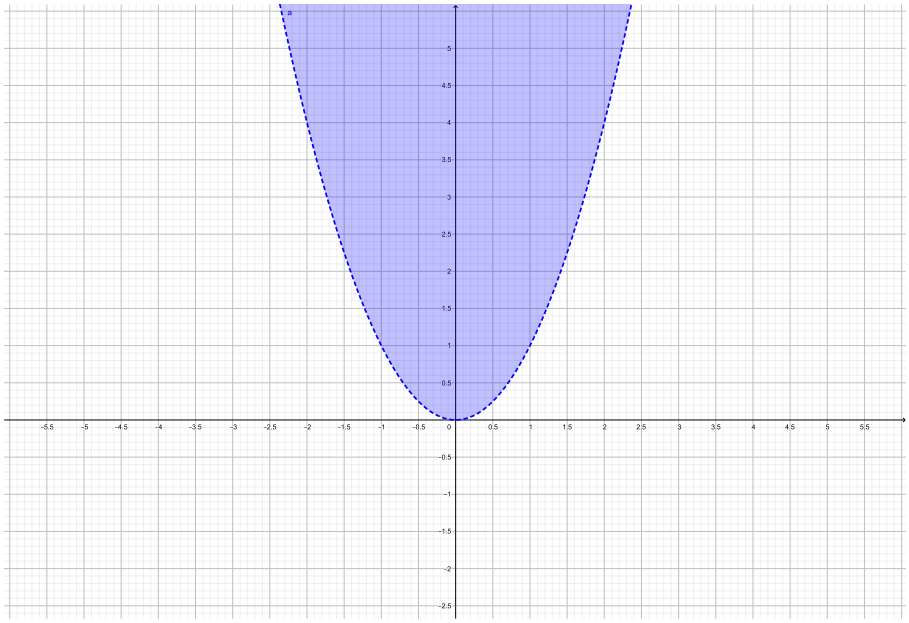
conjunt tancat. No es tracta d'un conjunt obert perquè no exclou tot el domini. El domini no és acotat perquè s'estén cap a l'infinit. Sí que es convex, perquè donats dos punts qualssevol del domini, el segment que els uneix queda íntegrament dins el domini. El següent gràfic descriu aquesta situació.



(c) Es tracta d'un funció logarítmica, pel que els punts del domini hauran de complir la condició $y > x^2$. En domini s'expressa com el conjunt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

Es un cas molt semblant a l'anterior, excepte en que, en aquest cas, la frontera (la paràbola) no s'inclou en el domini (punts de la paràbola, com el $(2, 4)$ no compleixen la condició $y > x^2$). Gràficament,

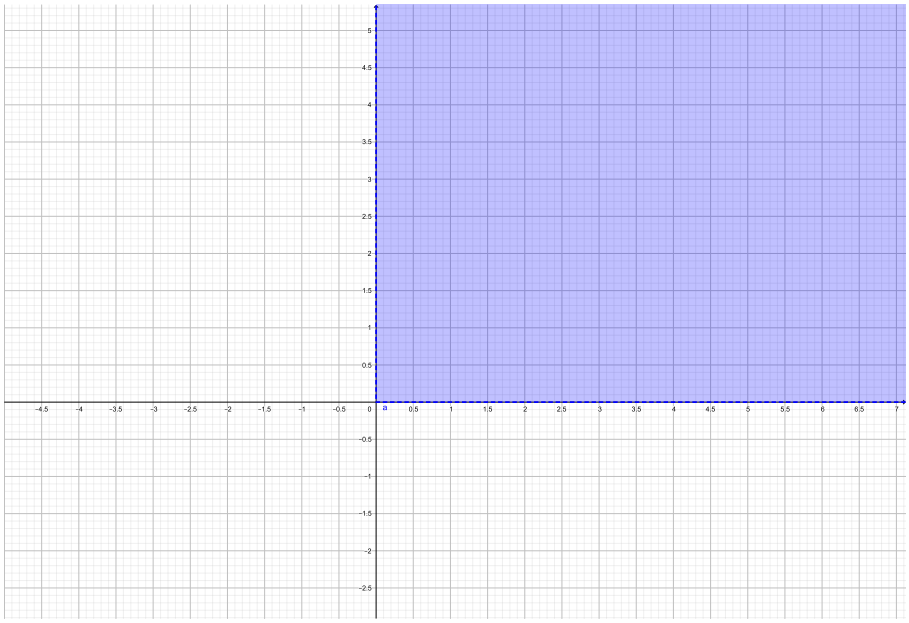


El conjunt és obert, perquè exclou tota la frontera, no és tancat, perquè no inclou tota la frontera, no és acotat perquè s'estén cap a l'infinit i sí és convex, tal com s'ha vist a l'apartat anterior.

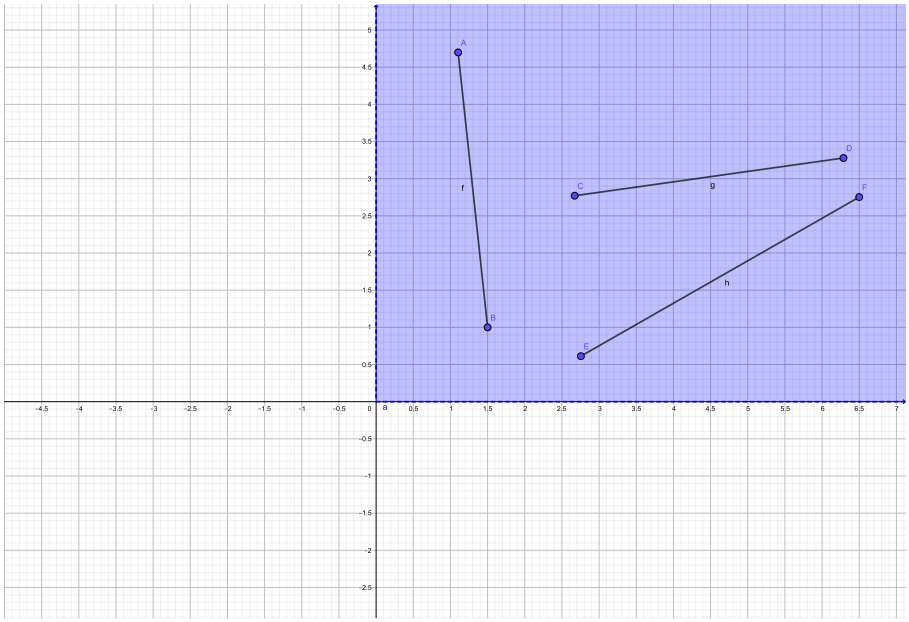
(d) En primer lloc, observem que el denominador de la funció no pot ser igual a 0, cosa que es donaria si $x = 0$. Per tant, aquest cas queda exclòs del domini. Observem també que l'argument de l'arrel quadrada ha de ser més gran o igual a 0, per tant, tenim la condició $x \geq 0$. Per últim, observem que l'argument de la funció logarítmica ha de ser estrictament més gran que 0, d'on traiem la condició $y > 0$. Les tres condicions es resumeixen en $x > 0$ i $y > 0$ simultàniament. El domini s'escriu com

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}.$$

Gràficament, tenim els punts



La frontera del conjunt no s'inclou en el domini, per tant és un conjunt obert. Com no tota la frontera pertany al domini (en realitat, cap punt), no és un conjunt tancat. Com el domini s'estén cap a l'infinit, no és un conjunt acotat. Com per a qualsevol parell de punt el segment que els uneix queda dins el domini, tal com exemplifica el següent gràfic, el domini és convex.

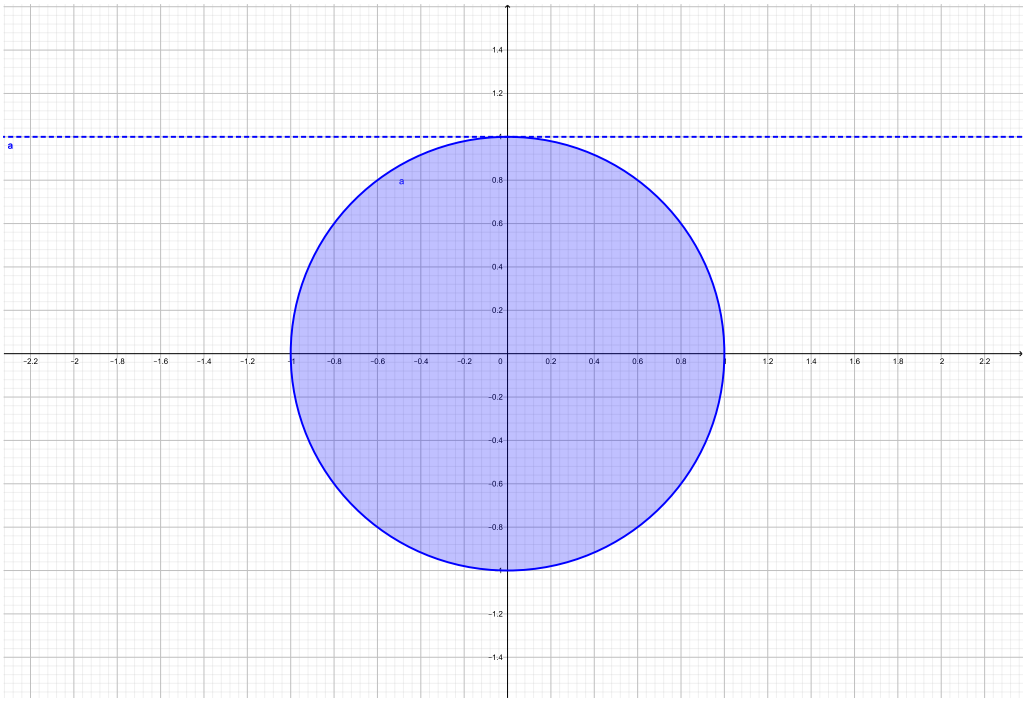


(e) Com l'argument de la funció logarítmica ha de ser positiu, tenim la condició $y < 1$. A més a més, com l'argument de la funció arrel quadrada no pot ser negativa, tenim la condició $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, o el que és el mateix, $x^2 + y^2 \leq 1$. En aquesta última condició trobem aquells punts del cercle de centre $(0, 0)$ i radi 1. Combinant les dues restriccions detectem

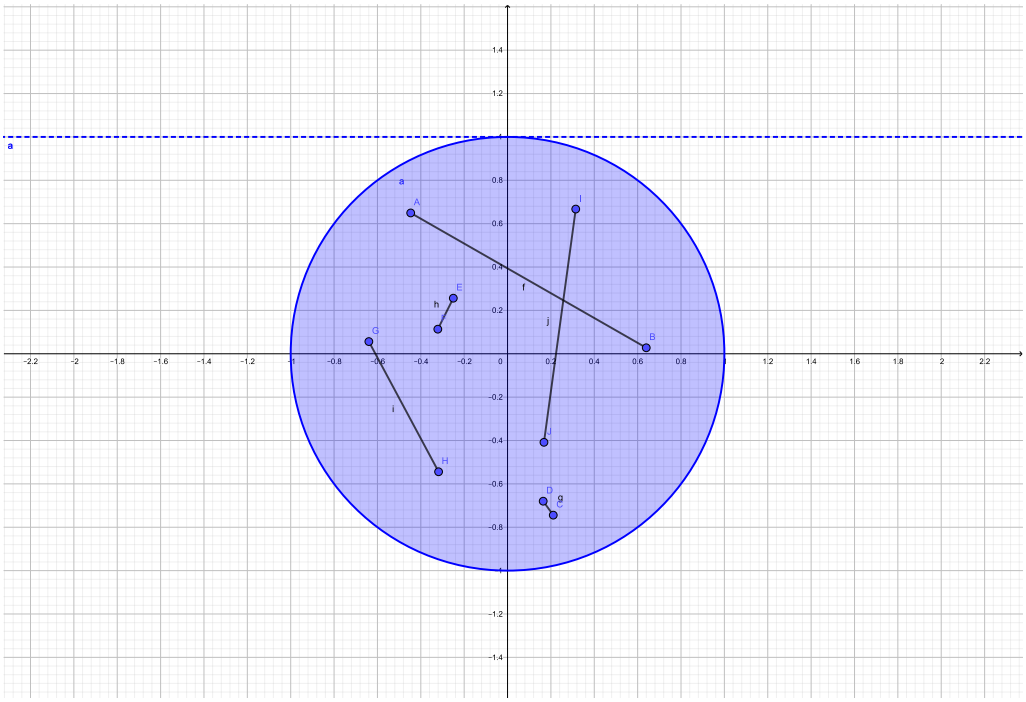
que el domini seran totes les combinacions de x, y tal que formin part del cercle de centre (0,0) i radi 1, excepte del punt (0,1), que no compleix la condició $y < 1$. Així,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, y > 1\},$$

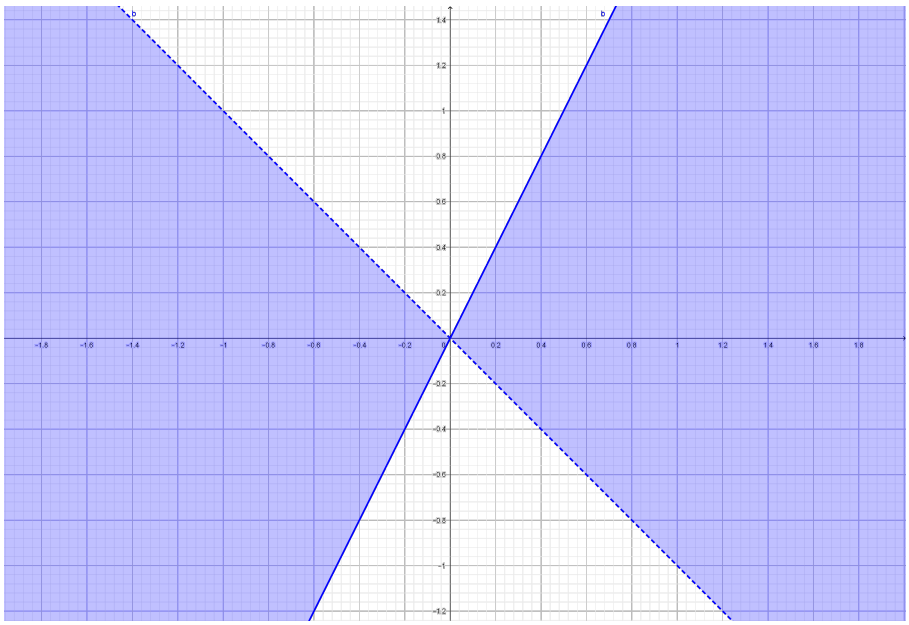
que gràficament és



Observem que la frontera del conjunt és tota la circumferència a excepció del punt $(0, 1)$. Per tant, no és un conjunt tancat, perquè no tota la frontera s'inclou en el conjunt, tampoc és un conjunt obert, perquè no exclou tota la frontera, és un conjunt acotat, perquè no s'estén cap a l'infinit. Sí que és un conjunt convex, com exemplifica el gràfic següent

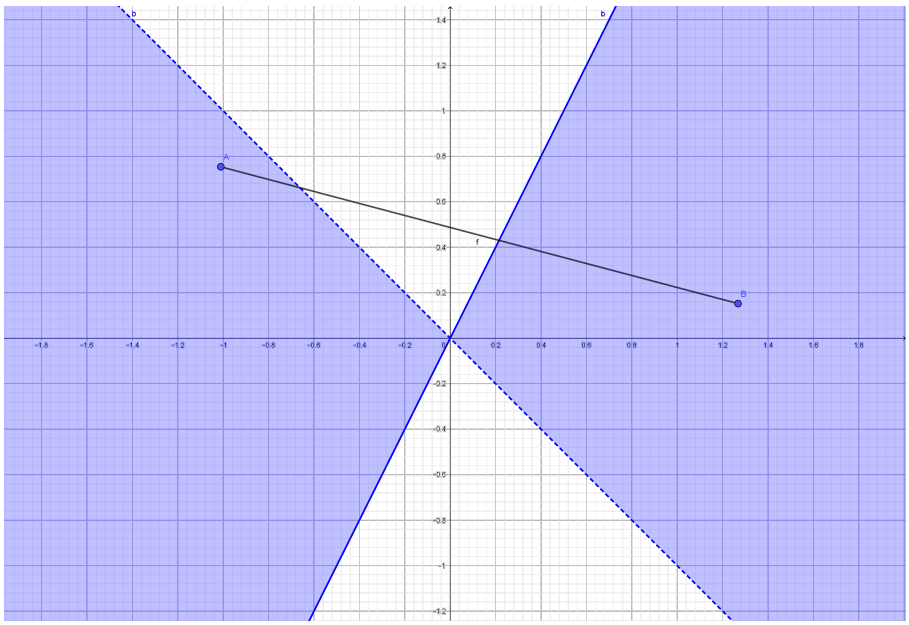


(f) En aquest cas l'argument de la funció arrel quadrada ha de ser més gran o igual a 0. Serà el cas quan el numerador i del denominador tinguin el mateix signe (els dos positius o negatius a la vegada). Hem de tenir en compte que el denominador no pot ser 0, per tant, s'haurà de complir o bé que $2x - y \geq 0$ i $x + y > 0$ o bé que $2x - y \leq 0$ i $x + y < 0$. Gràficament tenim.

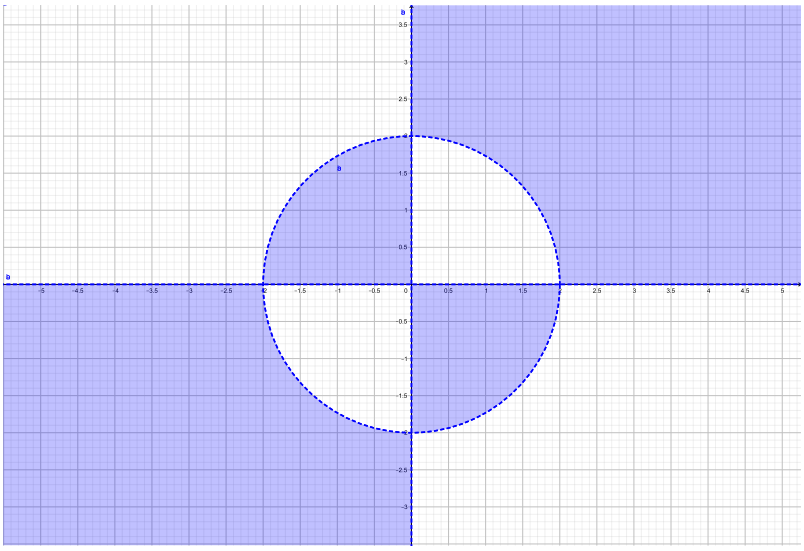


La frontera del conjunt està formada per les rectes $y = 2x$ i $y = -x$. Es tracta d'un conjunt no tancat, perquè no inclou tota la frontera (la recta

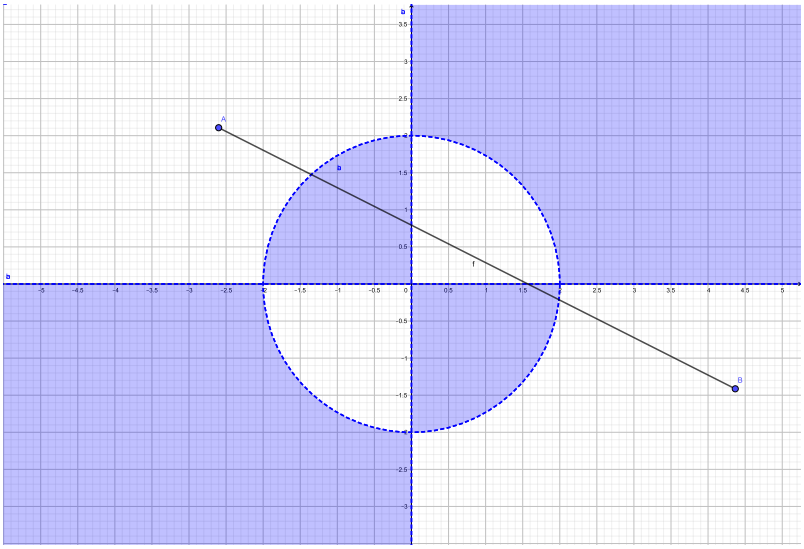
$y = -x$ no forma part del domini), no és oberta perquè no exclou tot el domini (la recta $y = 2x$ forma part del domini). no és un conjunt fitat i tampoc és convex, com es comprova en el gràfic no convex.



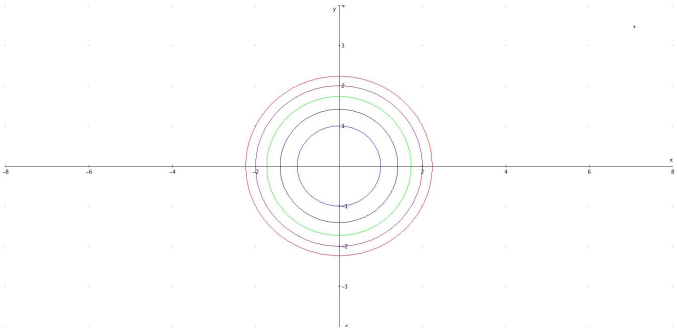
(g) L'argument de la funció logarítmica no pot menor que 0, pel que el numerador i el denominador han de coincidir en signe. Això, s'haurà de complir o bé que $xy > 0$ i $x^2+y^2-4 > 0$ o bé que $xy < 0$ i $x^2+y^2-4 < 0$. Gràficament



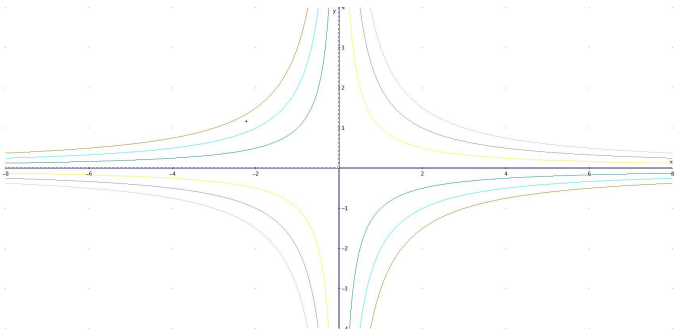
Per tant es tracta d'un conjunt conjunt obert, no tancat, no fitat i no convex, com es comprova en la figura



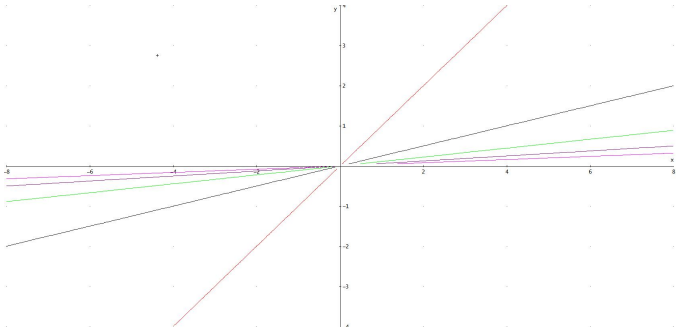
2. (a)



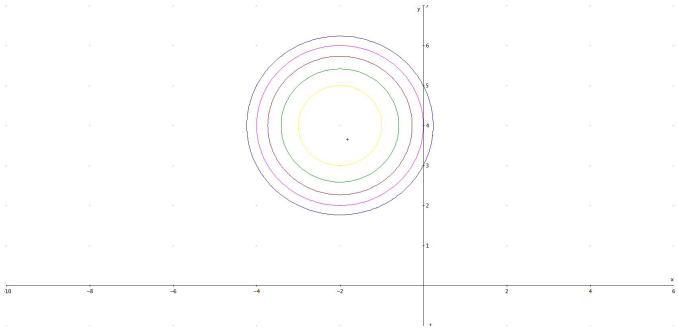
(b)



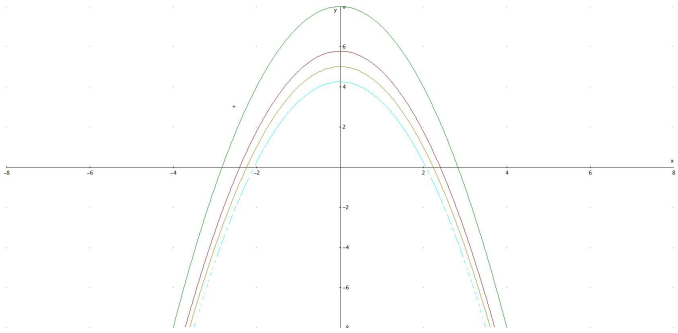
(c)



(d)



(e)



2 Derivada parcial

Exercicis

Calculeu les derivades parcials de les funcions:

1. $f(x,y) = x^2y + x + 3$
2. $f(x,y) = e^{x-1}\sin(xy)$
3. $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$
4. $f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{x}$
5. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{e^{2x+3y}}$
6. $f(x,y) = \frac{x+\sin(y+2)}{x+2y}$
7. $f(x,y,z) = e^{xyz}$
8. $f(x,y,z) = xe^y + ze^{xy}$
9. $f(x,y,z) = \frac{x+yz}{xyz}$
10. $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{xz}}{xy}$

Solucions

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-1}(\sin(xy) + y\cos(xy)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x-1}x\cos(xy)$

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x)\sin(y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x)\cos(y)$

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-xy\sin(xy)-\cos(xy)}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy)$

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{2x+3y}(y\cos(xy)-2\sin(xy))}{(e^{2x+3y})^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{2x+3y}(x\cos(xy)-3\sin(xy))}{(e^{2x+3y})^2}$

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+2y)-(x+\sin(y+2))}{(x+2y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x+2y)\cos(y+2)-2(x+\sin(y+2)}{(x+2y)^2}$

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}$

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + yze^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + xze^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xyz-yz(x+yz)}{(xyz)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xyz^2-xz(x+yz)}{(xyz)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy^2z-xy(x+yz)}{(xyz)^2}$

10. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{-1}z^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^{\frac{-1}{2}}y^{-2}z^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}y^{-1}z^{\frac{-1}{2}}$

3 Aplicacions de la derivada

Exercicis

1. Sigui $Q(K, L)$ un funció tal que $Q(5,5) = 10$, $\frac{\partial Q(5,5)}{\partial K} = 4$, $\frac{\partial Q(5,5)}{\partial L} = 2$. Calculeu el valor aproximat de la funció en el punt $(6, 5)$ utilitzant el concepte de marginalitat.

2. Sigui $Q(K, L) = 400K^{1/4}L^{3/4}$ una funció de producció Cobb-Douglas d'una empresa on actualment s'utilitzen 100 unitats de factor capital i 200 de factor treball. Avalueu l'efecte en la producció d'augmentar en una unitat el factor treball mentre es manté constant el factor capital mitjanạnt l'anàlisi marginal i compareu-lo amb el valor exacte.

3. Calculeu la derivada elàstica (elasticitat) de la funció $f(x) = xe^x$ en el punt $x = 2$.

4. Calculeu l'elasticitat de la funció $f(x, y, z) = e^{1-y} + xyz$ respecte la variable y en el punt $(2, 1, 3)$

5. Calculeu l'elasticitat de la funció $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ respecte la variable x en el punt $(10, 5)$

6. Calculeu l'equació del pla tangent a la funció $f(x, y) = 4x^3 + 2y^2 - xy + 3$ en el punt $(-1, 2)$

7. Calculeu l'equació del pla tangent a la funció $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ en el punt $(4, -3)$

8. Calculeu l'equació del pla tangent a la funció $f(x, y) = 2xye^x$ en el punt $(1, 2)$

Solucions

1. La derivada parcial de la funció respecte de la variable K en el punt $(5,5)$ aproxima l'increment de la funció en incrementar la variable K en una unitat, és dir, en passar d'avaluar la funció del punt $(5,5)$ al punt $(6,5)$. Per tant, la funció incrementarà en 4 unitat. Com en el punt $(5,5)$ la funció valia 10, al passar al punt $(6,5)$ la funció aproximadament valdrá $10+4=14$. Així, escrivim que $Q(6,5) \approx 14$.

2. Per utilitzar el concepte de marginalitat ens caldrà calcular la derivada parcial de la funció respecte de la variable L (el treball), que és $\frac{\partial Q}{\partial L} = 300K^{1/4}L^{-1/4}$. Al avaluar la derivada en el punt $(100,200)$ obtindrem l'increment aproximat de la producció al passar del punt $(100,200)$ al punt $(100,201)$, és a dir tindrem un increment de $\frac{\partial Q(100,200)}{\partial L} = 252,27$ unitats. Podem compara aquest resultat aproximat amb l'exacte, que seria de $Q(100,201) - Q(100,200) = 252,11$ unitats.

3. Per a calcular l'elasticitat de la funció en el punt ens cal avaluar la funció i la seva derivada en el punt. Per una banda tenim que $f(2) = 2e^2$. Per altra banda, $f'(x) = e^x + e^x x = e^x(1+x)$, que en el punt $x=2$ val $f'(2) = 3e^2$. Substituint en l'expressió de la derivada elàstica obtenim

$$E_x f(2) = f'(2)\frac{2}{f(2)} = 3e^2\frac{2}{2e^2} = 3.$$

4. Seguint els mateixos passos que en l'exercici anterior, calculem $f(2,1,3) = 7$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{1-y} + xz$ i que en el punt és $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1,3) = 5$. Aplicant l'expressió de la derivada elàstica en un punt tenim

$$E_y f(2,1,3) = \frac{\partial f(2,1,3)}{\partial y}\frac{1}{f(2,1,3)} = 5\frac{1}{7} = \frac{5}{7}.$$

5. De forma anàloga als exercicis anteriors, ens cal $f(1,1) = 750$ i $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy - y^2$, que en el en punt val $\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 175$. Aplicant l'expressió de la derivada elàstica en un punt tenim

$$E_x f(1,1) = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}\frac{1}{f(1,1)} = 175\frac{10}{750} = \frac{7}{3}.$$

6. Per calcular l'expressió del pla tangent de la funció en el punt $(1,1)$ ens caldrà avaluar la funció i les seves derivades parcials en el punt. Així, $f(-1,2) = 9$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12x^2 - y$, $\frac{\partial f(-1,2)}{\partial x} = 10$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y - x$ i $\frac{\partial f(-1,2)}{\partial y} = 9$. Substituint a la fórmula del pla tangent tenim

$$\begin{aligned} t &= 9 + 10(x+1) + 9(y-2) \\ &= 10x + 9y + 1. \end{aligned}$$

7. De forma anàloga a l'exercici anterior, calculem $f(4,-3)=4$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial f(4,-3)}{\partial x}=-3$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-x}{(x+y)^2}$ i $\frac{\partial f(4,-3)}{\partial y}=-4$. Substituint a la fórmula del pla tangent tenim

$$\begin{aligned} t &= 4+(-3)(x-4)+(-4)(y+3) \\ &= -3x-4y+4. \end{aligned}$$

8. Ens cal calcular $f(1,2)=4e$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2ye^x(1+x)$, $\frac{\partial f(4,-3)}{\partial x}=8e$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2xe^x$ i $\frac{\partial f(4,-3)}{\partial y}=2e$. Substituint a la fórmula del pla tangent tenim

$$\begin{aligned} t &= 4e+8e(x-1)+2e(y-2) \\ &= 8ex+2ey-8e \\ &= 2e(4x+y-4). \end{aligned}$$

Fixem-nos que en aquest cas e és una constant, de valor $e \approx 2,71828...$

4 Derivada direccional

Exercicis

1. Calculeu la derivada parcial respecte de x en el punt $\vec{a} = (0,0)$ de la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x+y} & \text{si } x+y=0 \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

2. Calculeu la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ en el punt $(1,1,1)$ segons la direcció del vector $\vec{v} = (3,0,4)$.

3. Calculeu la derivada direccional de la funció $f(x,y,z) = 2xy^2e^{2z+2}$ en el punt $(2,2,-1)$ segons la direcció del vector $\vec{v} = (1,1,0)$.

4. Calculeu la derivada direccional de la funció $f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y}{y}\right)$ en el punt $(2,3)$ segons la direcció del vector $\vec{v} = (3,2)$.

Solucions

1. En aquest cas hem de calcular la derivada parcial amb la definició

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,0)-f(a_1,a_2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3(0+h)\cdot 0}{(0+h)\cdot 0}-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

   Per a fer el darrer pas, com al substituir la h per 0 donava una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, hem aplicat la regla de l'Hôpital.

2. En primer lloc cal calcular la norma del vector que dóna la direcció, és a dir, $||\vec{v}|| = ||(3,0,4)|| = \sqrt{3^3+0^2+4^2} = 5$. Així el vector $\vec{v}$ normalitzat és $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. També necessitem el vector gradient de la funció, $\nabla f(x,y,z) = (1, 2y, 3x^2)$, que avaluat en el punt $(1,1,1)$ és $\nabla f(1,1,1) = (1,2,3)$. Finalment,

$$f'_{(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1)\cdot(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}) = (1,2,3)\cdot(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5}) = 3.$$

3. La norma del vector que dóna la direcció és $||\vec{v}|| = ||(1,1,0)|| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, el que permet obtenir el vector $\vec{v}$ normalitzat, $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. El gradient de la funció és $\nabla f(x,y,z) = (2y^2e^{2z+2}, 4xye^{2z+2}, 4xy^2e^{2z+2})$, que avaluat en el punt és $\nabla f(2,2,-1) = (8,16,36)$. Substituint a la fórmula de la derivada direccional obtenim

$$f'_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)}(2,2,-1) = \nabla f(2,2,-1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) = (8,16,36)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) = \frac{24}{\sqrt{2}}.$$

4. El primer pas sempre és normalitzar el vector que dóna la direcció. En aquest cas, com $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$, tindrem el vector normalitzat $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$. Per calcular el vector gradient de la funció calen les derivades parcials

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1/y}{(x+y)/y} = \frac{1}{x+y},$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-x/y^2}{(x+y)/y} = \frac{-x}{(x+y)y}.$$

   Per tant, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{-x}{(x+y)y}\right)$ i $\nabla f(2,3) = \left(\frac{1}{2+3}, \frac{-2}{(2+3)3}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{15}\right)$. Finalment, podem calcular

$$f'_{(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}})}(3,2) = \nabla f(3,2)\cdot(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}) = \left(\frac{1}{5},\frac{-2}{15}\right)\cdot(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}) = \frac{1}{3\sqrt{13}}.$$

5 Derivació parcial successiva

Exercicis

1. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y) = \ln(xy) + 2ye^x$
2. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y) = \ln(x)/e^y$
3. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y, z) = 3xe^{yz}$ i avalueu-la en el punt $(1, 0, 1)$
4. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y)$ i avalueu-la en el punt $(\pi/2, \pi/2)$
5. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y) = x^3e^{x-y} + xy^3$ i avalueu-la en el punt $(2, 2)$
6. Calculeu la hessiana de la funció $f(x, y) = \ln(x^2 + y^4)$ i avalueu-la en el punt $(1, 1)$

Solucions

1. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} + 2ye^x & 2e^x \\ 2e^x & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

2. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2e^y} & \frac{1}{xe^y} \\ \frac{1}{xe^y} & \frac{-\ln(x)}{e^y} \end{pmatrix}$

3. $Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 3ze^{yz} & 3ye^{yz} \\ 3ze^{yz} & 3xz^2e^{yz} & 3xe^{yz}(1+yz) \\ 3ye^{yz} & 3xe^{yz}(1+yz) & 3xy^2e^{yz} \end{pmatrix}$

   $Hf(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) - \cos(x+y) & \sin(x-y) - \cos(x+y) \\ \sin(x-y) - \cos(x+y) & -\sin(x-y) - \cos(x+y) \end{pmatrix}$

   $Hf(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Nota: la derivada del sinus o cosinus s'evalua en radians. Per tant, la calculadora ha d'estar configurada en radians, i no graus com és habitual.

5. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^3 + 6x^2 + 6x) & -3x^2e^{x-y} - x^3e^{x-y} + 3y^2 \\ -3x^2e^{x-y} - x^3e^{x-y} + 3y^2 & x^3e^{x-y} + 6xy \end{pmatrix}$

   $Hf(2,2) = \begin{pmatrix} 44 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$

6. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^4}{(x^2+y^4)^2} & \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2} \\ \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2} & \frac{12x^2y^2-4y^6}{(x^2+y^4)^2} \end{pmatrix}$

   $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

6 Derivació de funcions compostes

Exercicis

1. Sigui $f(x,y) = 2xy + y^2x$, on $x = u + v$, $y = 2u - v$. Calculeu $\frac{\partial f}{\partial u}$ i $\frac{\partial f}{\partial v}$.
2. Sigui $f(x,y) = \frac{e^x}{y}$, on $x = \ln(u+v)$, $y = 2u$. Calculeu $\frac{\partial f}{\partial u}$ i $\frac{\partial f}{\partial v}$.
3. Sigui $f(x,y) = x^2e^y$, on $x = u + v$, $y = uv$. Calculeu $\frac{\partial f}{\partial u}$ i $\frac{\partial f}{\partial v}$.
4. Sigui $z = f(x,y)$, on $x = uv$, $y = vw$. Calculeu $\frac{\partial z}{\partial w}$.
5. Sigui $z = f(x,y)$, on $x = w - u$, $y = uw$. Calculeu $\frac{\partial z}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$.
6. Sigui $F(r(t),t) = 100e^{-r(t)(T-t)}$ el preu en cada moment del temps t d'un actiu financer (en particular, un bo) amb data de venciment T. La funció $r(t)$ representa el tipus d'interès meritat pel bo en cada moment del temps t. Calculeu $\frac{\partial F}{\partial t}$, és a dir, el rati de variació del preu del bo davant d'un increment infinitesimal del pas del temps t.

Solucions

1. Observem que f depèn de les variables x i y, el que escrivim com $f(x,y)$, i que a la seva vegada x i y depenen de les variables u, v. Per tant, tenim $x(u,v)$ i $y(u,v)$. La derivada parcial de f respecte de u és:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2y+y^2)(1) + (2x+2xy)(2) = 2y + y^2 + 4x + 4xy.$$

La derivada parcial de f respecte de v és:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2y+y^2)(1) + (2x+2xy)(-1) = 2y + y^2 - 2x - 2xy.$$

2. Tenim $f(x,y)$, $x(u,v)$ i $y(u)$. Per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{e^x}{y}\frac{1}{u+v} + \frac{-e^x}{y^2}2 = \frac{e^x}{y}\left(\frac{1}{u+v} - \frac{2}{y}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{e^x}{y}\frac{1}{u+v}.$$

3. En aquest cas, $f(x,y)$, $x(u,v)$ i $y(u,v)$. Aleshores,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2xe^y(1) + x^2e^y v = xe^y(2+vx),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2xe^y(1) + x^2e^y u = xe^y(2+ux).$$

4. A diferència dels exercicis anteriors, no tenim explicitada la funció $z = f(x,y)$, i per tant, no ho podrem substituir a la fòrmula.

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial y}v.$$

5. Ara tenim $z = f(x,y)$, $x(u,w)$ i $y(u,w)$.

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}w.$$

6.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} &= 100e^{-r(t)(T-t)}(T-t)\frac{dr}{dt} + r(t)100e^{-r(t)(T-t)} \\ &= 100e^{-r(t)(T-t)}(T-t+r(t)).\end{aligned}$$

7 Derivació de funcions definides implícitament

Exercicis

1. La relació $y^3 - x^3 - y = -1$ defineix implícitament a y com a funció de x a l'entorn del punt $(1, 1)$. Calculeu el valor de $\frac{dy}{dx}$ en aquest punt.

2. La relació $x^2 e^{2xy} - y - 1 = 0$ defineix implícitament a y com a funció de x a l'entorn del punt $(-1, 0)$. Calculeu el valor de $\frac{dy}{dx}$ en aquest punt.

3. La relació $e^{xz} + \cos(yz) - e - 1 = 0$ defineix implícitament a z com a funció de x, y a l'entorn del punt $(1, 0, 1)$. Calculeu el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en aquest punt.

4. La relació $xe^{x+y} + x + 3y = 1$ defineix implícitament a y com a funció de x a l'entorn del punt $(-1, 1)$. Calculeu el valor de $\frac{dy}{dx}$ en aquest punt.

5. La relació $y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$ defineix implícitament a $z = f(x, y)$ com a funció de x, y a l'entorn del punt $(0, e, 2)$. Calculeu el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en aquest punt.

Solucions

1. Primer calculem la derivada de y respecte de x i després substituim en el punt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{-(-3x^2)}{3y^2 - 1},$$

que avaluada al punt $(1,1)$ és $\frac{dy(1,1)}{dx} = 3/2$.

2. Igual que en el cas anterior, tenim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{-(2xe^{2xy} + 2ye^{2xy}x^2)}{2x^3e^{2xy} - 1},$$

que avaluada al punt $(-1,0)$ és $\frac{dy(-1,0)}{dx} = -2/3$.

3. Procedim de forma anàloga i tenim

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-ze^{xz}}{xe^{xz} - y\sin(yz)},$$

que avaluada al punt $(-1,0)$ és $\frac{\partial z(1,0,1)}{\partial x} = -1$.

4. Igual que en el cas anterior, tenim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{-(e^{x+y} + e^{x+y}x + 1)}{xe^{x+y} + 3},$$

que avaluada al punt $(-1,1)$ és $\frac{dy(-1,1)}{dx} = 1/2$.

5. Com z és funció de dues variables, en aquest cas tenim dues derivades parcials.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-z}{x + 2z - e^z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-2y}{x + 2z - e^z}.$$

En el punt $(0,e,2)$ valen $\frac{\partial z(0,e,2)}{\partial x} = \frac{-2}{4-e^2}$ i $\frac{\partial z(0,e,2)}{\partial y} = \frac{-2e}{4-e^2}$.

8 Funcions homogènies

Exercicis

1. Estudieu la homogeneïtat de la funció $f(x,y,z) = \frac{e^{x/y}+e^{z/x}}{x^2}$.
2. Estudieu la homogeneïtat de la funció $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) + e^{x-y}$.
3. Estudieu la homogeneïtat de la funció $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{xyz}}{2x-y}$.
4. Estudieu la homogeneïtat de la funció $f(x,y,z) = x^2 + xy + 7$.
5. Estudieu la homogeneïtat de la funció $f(x,y,z) = e^{x/y}\frac{x^2\sin(x/z)}{2y}$.

Solucions

1. Avaluant la funció al punt (tx, ty, tz) tenim

$$f(tx, ty, tz) = \frac{e^{tx/ty} + e^{tz/tx}}{(tx)^2} = \frac{e^{x/y} + e^{z/x}}{(t^2x^2)} = \frac{1}{t^2} f(x, y, z).$$

   Per tant, la funció és homogènia de grau -2.

2. Avaluant la funció al punt (tx, ty, tz) tenim

$$f(tx, ty, tz) = \ln\left(\frac{tx + ty}{tx}\right) + e^{tx-ty} = \ln\left(\frac{x + y}{x} + e^{t(x-y)}\right).$$

   No podem treure factor comú el paràmetre t, pel que no expressar $f(tx, ty, tz)$ con a $t^k f(x, y, z)$ per a cap k. La funció no és homogènia.

3. Avaluant la funció al punt (tx, ty, tz) tenim

$$f(tx, ty, tz) = \frac{\sqrt{txtytz}}{2tx - ty} = \frac{\sqrt{t^3xyz}}{t(2x - y)} = \frac{t^{3/2}\sqrt{xyz}}{t(2x - y)} = t^{1/2} f(x, y, z).$$

   La funció és homogènia de grau 1/2.

4. Avaluant la funció al punt (tx, ty, tz) tenim

$$f(tx, ty, tz) = (tx)^2 + (tx)(ty) + 7.$$

   No podem treure factor comú a t elevat a algun k. Per tant, la funció no és homogènia.

5. Avaluant la funció al punt (tx, ty, tz) tenim

$$f(tx, ty, tz) = e^{tx/ty} \frac{(tx)^2 \sin(tx/tz)}{2ty} = e^{x/y} \frac{t^2x^2 \sin(x/z)}{2ty} = \frac{1}{t} f(x, y, z).$$

   És homogènia de grau 1.