Sesión de Problemas 1: Vectores y matrices (soluciones)

Notación: vectores y matrices en negrita ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}$); a mano, $\vec{u}$ o $\underline{u}$ para vectores y $\overline{\overline{A}}$, $\underline{\underline{A}}$ o A para matrices.

Ejercicio 1

Dado el conjunto de vectores $A = \{(2,1,4), (3,-2,-1), (-2,3,4)\}$:

a) Comprueba si el conjunto de vectores A forma una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución: A es un conjunto de 3 vectores de $\mathbb{R}^3$. Para formar una base de $\mathbb{R}^3$ han de ser *linealmente independientes*. Aplicando su definición, los vectores de A son linealmente independientes *si y solo si* la única combinación de parámetros (a,b,c) que cumple

$$a\,(2,1,4) + b\,(3,-2,-1) + c\,(-2,3,4) = (0,0,0) \tag{1}$$

es $(a,b,c) = (0,0,0)$. En cualquier otro caso, los vectores de A serían *linealmente dependientes* y, por tanto, no formarían una base de $\mathbb{R}^3$. La ecuación (1) es un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Despejando $a = 2b - 3c$ en la segunda ecuación y sustituyendo en las otras dos, ambas se reducen a $7b - 8c = 0$: el sistema es compatible indeterminado, con soluciones $(a,b,c) = t\,(-5,8,7)$, con $t \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(a,b,c) = (-5,8,7) \neq (0,0,0)$ es solución, por lo que el conjunto de vectores A no forma una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Comprueba si el vector $(5,2,1)$ pertenece al subespacio generado por A. Si es así, escribe el vector $(5,2,1)$ como combinación lineal de los vectores de A.

Solución: Para que el vector pertenezca al subespacio generado por A, tiene que ser *combinación lineal* de los vectores de A. Aplicando su definición:

$$a\,(2,1,4) + b\,(3,-2,-1) + c\,(-2,3,4) = (5,2,1). \tag{2}$$

Despejando $a = 2 + 2b - 3c$ en la segunda ecuación del sistema (2) y sustituyendo en las otras dos se obtiene $7b - 8c = 1$ y $7b - 8c = -7$, que son contradictorias. El sistema es, por tanto, incompatible, con lo que el vector no pertenece al subespacio generado por A.

Ejercicio 2

Dado el conjunto de vectores $B = \{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$:

a) Comprueba si el conjunto de vectores B forma una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Alternativamente, podemos usar que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son *linealmente independientes si y solo si* el determinante de la matriz cuyas columnas son esos vectores es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 - 1 - 4 - 1 + 3 = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{linealmente independientes},$$

por lo que el conjunto de vectores B sí forma una base de $\mathbb{R}^3$.

© 2025 Manuel Gómez González (Universitat de Barcelona).
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

b) Comprueba si el vector $(1,-2,5)$ pertenece al subespacio generado por B. Si es así, escribe el vector $(1,-2,5)$ como combinación lineal de los vectores de B.

Solución: Como B es una base de $\mathbb{R}^3$ (apartado anterior), genera todo $\mathbb{R}^3$, así que el vector sí pertenece al subespacio generado por B. Para escribirlo como *combinación lineal* de los vectores de B, imponemos:

$$a\,(1,1,1) + b\,(1,2,3) + c\,(2,-1,1) = (1,-2,5). \tag{3}$$

La ecuación (3) es un sistema lineal compatible determinado (su determinante es el del apartado anterior, $5 \neq 0$). Restando la primera ecuación de la segunda y la segunda de la tercera se obtiene $b - 3c = -3$ y $b + 2c = 7$, de donde $c = 2$, $b = 3$ y $a = -6$:

$$(1,-2,5) = -6\,(1,1,1) + 3\,(1,2,3) + 2\,(2,-1,1).$$

Es decir, las coordenadas del vector en la base B son $(-6,3,2)$.

Ejercicio 3

Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (1,-3,-1)$ y $\boldsymbol{v} = (0,-5,1)$, y el escalar $\lambda = 2$, calcula:

a) El producto $\lambda\boldsymbol{u}$.

Solución: $\lambda\boldsymbol{u} = 2\,(1,-3,-1) = (2,-6,-2)$.

b) El producto escalar $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$.

Solución: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (1,-3,-1)\cdot(0,-5,1) = 0 + 15 - 1 = 14$.

c) La norma euclídea de los vectores: $\|\boldsymbol{u}\|$ y $\|\boldsymbol{v}\|$.

Solución:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11},$$
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$$

d) La distancia euclídea entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

Solución:

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} = (1-0,-3-(-5),-1-1) = (1,2,-2),$$
$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})} = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

e) El ángulo, θ, entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Solución:

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{14}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{286}},$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{286}}\right) \approx 0{,}596\,\text{rad} \approx 34{,}1°.$$

f) La proyección escalar de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{v}$, $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$.

Solución:

$$\text{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\boldsymbol{u}\|\cos(\theta) = \frac{14}{\sqrt{26}}.$$

© 2025 Manuel Gómez González (Universitat de Barcelona).
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

g) La proyección vectorial de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$.
Solución:

$$\begin{aligned}\mathbf{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) &= \|\boldsymbol{u}\|\cos(\theta)\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \mathrm{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}\\ &= \frac{14}{26}(0,-5,1) = \left(0,-\frac{35}{13},\frac{7}{13}\right).\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Dados los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,0)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (2,0,1)$:

a) Comprueba que forman una base de $\mathbb{R}^3$.
Solución: Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ si son *linealmente independientes*. Lo comprobamos con el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2-4-1 = -3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{linealmente independientes},$$

por lo que forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Halla una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ aplicando el método de Gram-Schmidt a $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$.
Solución:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{v}_1 = (1,1,1),\\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - \mathbf{proy}_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1\\ &= (1,2,0) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (0,1,-1),\\ \boldsymbol{w}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - \mathbf{proy}_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}_3) - \mathbf{proy}_{\boldsymbol{w}_2}(\boldsymbol{v}_3)\\ &= \boldsymbol{v}_3 - \frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_3\cdot\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2\\ &= (2,0,1) - \frac{3}{3}(1,1,1) - \frac{-1}{2}(0,1,-1) = \left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

c) Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ normalizando la base ortogonal del apartado anterior.
Solución: Dividimos cada vector entre su norma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\\ \boldsymbol{u}_2 &= \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1),\\ \boldsymbol{u}_3 &= \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1),\end{aligned}$$

ya que $\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{2}$ y $\|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2$.

© 2025 Manuel Gómez González (Universitat de Barcelona).
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

Ejercicio 5

Sea E un espacio vectorial con base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Demuestra que los vectores $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_2$ también forman una base de E.

Solución: En la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ tienen coordenadas $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, -1, 1)$, respectivamente. Como $\dim E = 3$, forman una base de E si son *linealmente independientes*, lo que comprobamos con el determinante de la matriz cuyas columnas son esas coordenadas:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{linealmente independientes},$$

por lo que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ forman una base de E.

Ejercicio 6

Determina el valor de k que hace que los vectores $\boldsymbol{u} = (1, k, 2, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (k, -3, -1, 2)$ sean ortogonales en $\mathbb{R}^4$.

Solución: Dos vectores no nulos (como $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, para cualquier valor de k) son ortogonales si forman un ángulo $\theta = \pi/2\,\text{rad}$, es decir, si $\cos(\theta) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})/(\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|) = 0$, lo que equivale a que su producto escalar sea nulo:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1, k, 2, 1) \cdot (k, -3, -1, 2) = k - 3k - 2 + 2 = -2k = 0,$$

con lo que $k = 0$.

Ejercicio 7

Dada la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcula:

a) Su traza: $\text{tr}(\boldsymbol{A})$.
Solución: $\text{tr}(\boldsymbol{A}) = 1 + 3 + 2 = 6$.

b) Su determinante: $\det(\boldsymbol{A})$.
Solución:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 2 = 7.$$

c) Su traspuesta: $\boldsymbol{A}^t$.
Solución:

$$\boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

© 2025 Manuel Gómez González (Universitat de Barcelona).
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

Ejercicio 8

Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

calcula:

a) El producto matricial $\boldsymbol{AB}$.

Solución:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

b) El producto matricial $\boldsymbol{BA}$.

Solución:

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -10 & -5 & 7 \\ 14 & 8 & -10 \end{bmatrix}.$$

Los dos productos existen, pero $\boldsymbol{AB}$ es de tamaño 2×2 y $\boldsymbol{BA}$, de tamaño 3×3: el producto de matrices no es conmutativo.

© 2025 Manuel Gómez González (Universitat de Barcelona).
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).